

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן

מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)

מס': 8821105

מרצה: פרופ' מיכאל מגרל

מועד ב'

חומר עזר: רק מחשבון

משך המבחן: שעתיים

השאלות:

5 מתוך 6

1. תהי $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ חבורה אבלית ונגדיר $b = a_1 a_2 \cdots a_n$.

הוכח:

א. $b^2 = 1$.

ב. אם ב G אין איבר מסדר 2 אזי $b = e$.

ג. הוכח: לכל p ראשוני $(p-1)!+1$ מתחלק ב p .

ד. בעזרת משפט Euler חשב את 197^{81} מודולו 34.

2. א. הוכח שאם $[G:H] = 2$ אז $H \triangleleft G$. האם זה נכון אם $[G:H] = 3$? (לנמק היטב)

ב. תהי $D_4 = \langle a, \sigma \rangle$ היא חבורה דיהדרלית (a הוא סיבוב). נסמן:

$$K = \{e, \sigma a\}, \quad H = \{e, \sigma a, a^2, \sigma a^3\}$$

ת"ח נורמלית ב D_4 , K ת"ח נורמלית של H אבל K לא נורמלית ב D_4 .

ג. תנו דוגמה של תת חבורות K, H בחבורה G כך שתת קבוצה KH היא לא תת חבורה.

3. עבור $H \leq G$ נגדיר: $N(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$

("נורמליזטור" של H ב- G).

הוכח:

א. $N(H) = G \Leftrightarrow H \triangleleft G$ ו- $N(H) \leq G$.

ב. $H \triangleleft N(H)$ ואם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$.

ג. $|\{gHg^{-1} : g \in G\}| = [G:N(H)]$.

ד. אם $K \leq H \triangleleft G$ ו- H ציקלית סופית אז $K \triangleleft G$.

4. א. הוכח משפט האיזומורפיזם הראשון.
 ב. הוכח או הפרך: $C^*/T \cong R$, $R/5Z \cong T$, (כאשר $T := \{z \in C \mid \|z\|=1\}$).
 ג. מצא תמונות אפימורפיות (עד כדי איזומורפיזם) של חבורת Euler U_8 .
 ד. מצא מספר חבורות אבליות שונות (עד כדי איזו') עם 2500000 אלמנטים.
5. א. הוכח משפט Sylow 2.
 ב. הוכח או הפרך: קיימת חבורה לא פתירה עם 77 איברים.
 ג. הוכח או הפרך: קיימת חבורה פשוטה עם 125 איברים.
6. א. הוכח שהצמדה $G \times G \rightarrow G, g \circ x \mapsto gxg^{-1}$ מגדירה פעולה של G מעל G .
 ב. הוכח שבפעולה הנ"ל קבוצת F של נקודות שבת היא שווה למרכז של G .
 ג. מצא מספר מחלקות צמידות בחבורה S_{10} .
 ד. בעזרת משפט Burnside מצא מספר משולשים שונים (עד כדי D_3) אשר מתקבלים ממשולש משוכלל נתון אם מותר לצבוע קודקודים ב 3 צבעים קבועים.

בהצלחה !