

מבחן רזניקוב עם 10-11

מבחן בועז ובוריס עם 1-9

בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 (88-113-05/08) - מועד ב'

אוניברסיטת בר-אילן, יום א', כ"ח אדר ב' תשע"א (3.4.11 למ')

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: אוהד נבון, עדי ניב, דורון פרלמן.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות הבחינה.

השתמש במחברת הבחינה לטייטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. משקל כל שאלה הוא 32 נקודות. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	ניקוד (לשימוש הבודקים)
1	
2	
3	
4	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרות:

- גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, כל המרחבים הוקטוריים במבחן הם ממימד סופי.
- גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

לכל n טבעי, נגדיר מטריצה

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 \\ 4 & \cdots & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{n \times n}$$

א. חשב את $|A_n|$. התוצאה צריכה להיות נוסחה התלויה ב n . (22 נקודות)

ב. חשב את $|A_{71}|$. התוצאה צריכה להיות איבר של $\mathbb{Z}_7$. (10 נקודות)

תשובה:

שאלה 2

יהיו V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי נורמלי.

א. הוכח שלכל וקטור עצמי $v \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$: אם $Tv = \lambda v$, אז $T^*v = \bar{\lambda}v$. (16 נקודות)

ב. הוכח שלכל $\lambda \in \mathbb{F}$, תת־המרחב $(V_\lambda)^\perp$ הוא אינוריאנטי תחת T . (16 נקודות)

תשובה:

שאלה 3

תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

לכל אחת מהאפשרויות הבאות עבור $\mathbb{F}$, קבע האם יש מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{4 \times 4}$ כך ש $P^{-1}AP$ בצורת ג'ורדן.

אם התשובה חיובית, מצא P כזו וציין מהי צורת ג'ורדן המתקבלת.

א. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (10 נקודות)

ב. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (22 נקודות)

תשובה:

שאלה 4

יהי V מרחב וקטורי מממד n . הגדר את האיזומורפיזם הטבעי (הקנוני) מ V ל V^{**} , והוכח שהוא אכן איזומורפיזם.
(32 נקודות)

תשובה:

302

$$= -\lambda(-\lambda^3 + \lambda - 4\lambda) + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 - \lambda^2 = (\lambda^2 + 1)^2$$
$$(\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2$$

2C ~~for~~ ~~cont~~

I لعلهم

II intelle

III ~~~~~

~~2-11 68 6 6 277, 56~~

$\hat{\sigma}_L^2$, הממוצע ב ל ממוצעים 2, $\tilde{\sigma}_L^2$ נדרש על ידי זיו

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2011
b

2 אפריל

1. $T: V \rightarrow V$ נרמל. ויהי λ ערך עצמי של T ו- $v \neq 0$.
נניח:

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)(T - \lambda I)^* &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) = \\ &= TT^* - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + \lambda \bar{\lambda} I = T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + \lambda \bar{\lambda} I = \\ &= (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I) = (T - \lambda I)^*(T - \lambda I) \end{aligned}$$

וקיבלנו $(T - \lambda I)$ נרמל

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle =$$

נניח:

אנחנו A נרמל:

$$\begin{aligned} \langle v, A^*Av \rangle &= \langle v, AA^*v \rangle = \overline{\langle AA^*v, v \rangle} = \\ &= \overline{\langle A^*v, A^*v \rangle} = \langle A^*v, A^*v \rangle = \|A^*v\|^2 \end{aligned}$$

$$\|(T - \lambda I)v\| = 0 \iff (T - \lambda I)v = 0 \quad \text{נניח:}$$

$$(T^* - \bar{\lambda} I)v = 0 \iff \|(T - \lambda I)^*v\| = 0 \iff$$

$$\blacksquare \quad T^*v = \bar{\lambda}v \iff$$

2011
b

שאלה 2

ב. נניח V מרחב וקטורי מממדי n מעל $\mathbb{C}$. $T: V \rightarrow V$ היא תופת.

א. $T(v) \in V_\lambda$ לכל $v \in V_\lambda$. $T(v) \notin V_\lambda$ עבור $v \in V_\lambda$ אם ורק אם $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

ב. $\langle T(v), v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ אם ורק אם $\lambda = 0$.

נראה: $\langle T(v), v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = 0$

יחס T ו- T^* הם λ ו- $\bar{\lambda}$ בהתאמה. $T^*v = \bar{\lambda}v$ לכל $v \in V_\lambda$.

$$\langle v, T^*v \rangle = \langle v, \bar{\lambda}v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = 0$$

אם $\lambda \neq 0$ אז $\langle v, v \rangle \neq 0$ ולכן $\bar{\lambda} = 0$ ו- $\lambda = 0$.

$$T(v) = 0v = 0 \in V_\lambda$$

סלילה.

שאלון סגור

אלגברה ליניארית 2

מועד ב. 88-113

מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מהאוניברסיטה.

משך בחינה: שעתיים וחצי (לאחר הארכה).

הנחיות: יש לפתור כל 3 השאלות. (ציון המקסימאלי הוא 100)

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תיבדק.

1.

(א) תהי $A \in Mat_{n \times n}(F)$ מטריצה נילפוטנטית ו $f \in F[x]$ פולינום שמקיים $f(0) \neq 0$. הוכיחו ש $f(A) \in Mat_{n \times n}(F)$ הפיכה. (15 נק.).(ב) תהי $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ הפיכה. הוכיחו ש A הרמיטית אם ורק אם $adj A$ הרמיטית $adj A$ היא צמודה קלאסית. (15 נק.)

(ג) האם (ב) נכון גם למטריצות לא הפיכות? נמקו את התשובה. (5 נק.)

2.

(א) יהי $A: V \rightarrow V$ אופרטור במרחב עם מכפלה פנימית ו A' אופרטור צמוד.הוכיחו ש $Im A' \perp Ker A$ ו $Im A \perp Ker A'$. (17 נק.)(ב) יהי $C: V \rightarrow V$ אופרטור צמוד עצמי. הוכיחו שאופרטור $B = C - i \cdot Id$ לא

סינגולארי. (17 נק.)

3.

(א) תהי $A \in Mat_{n \times n}(F)$ מטריצה. הגדירו מושגים: ערך עצמי ווקטור עצמי שלמטריצה A , פולינום אופייני $p_A(\lambda)$ ופולינום מינימאלי $m_A(\lambda)$. (5 נק.)(ב) $\rightarrow$ תהי $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ מטריצה מאפסת את הפולינום $p(x) = x^k - x$ כאשר $k \geq 2$.האם A לכסינה בהכרח? נמקו את התשובה. (20 נק.)(ג) נתונה מטריצה $A \in Mat_{12 \times 12}(F)$ נילפוטנטית, המקיימת $Rank A = 8, Rank A^4 = 2$. כתובו צורות ז'ורדן אפשריות של A . נמקו את התשובה.

(10 נק.)

$$8 \times 11 \quad A^4 = 2$$

בהצלחה!

נא כתוב פתרונות רק בטופס המצורף.

המחברת לא תיבדק. נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

טופס פתרונות

שאלון סגור

אלגברה ליניארית 2, מועד א. 88-113

מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

נא כתבו פיתרון סופי מפורט בטופס זה. במקרה חרום מותר להשתמש בדף נוסף

מס' שאלה	1	2	3		
ציון					

המצורף בסוף הטופס. ההתייחסות למחברת היא

כלטיוטה בלבד. המחברת לא תיבדק.

נא כתבו למטה את מספר השאלה.

נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

פתרון לשאלה [2]: (א) נוכח'ח $\ell \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad \langle A^t A u, v \rangle = 0$

(ב) 'ה'ו' $u, v \in \mathbb{R}^n$. $\langle A(u+v), (u+v) \rangle = 0$ $\Rightarrow$ $\langle A u, v \rangle = -\langle A v, u \rangle$

$$\langle A(u+v), u+v \rangle = \underbrace{\langle A u, u \rangle}_{=0} + \langle A u, v \rangle + \langle A v, u \rangle + \underbrace{\langle A v, v \rangle}_{=0} \Rightarrow$$

$$\langle A u, v \rangle = -\langle A v, u \rangle = -\langle u, A v \rangle$$

בטבלה $\langle \cdot, \cdot \rangle$ סימטרית

$$(A^t = A^t) \langle A u, v \rangle = \langle u, A^t v \rangle \quad \text{ע"פ מ"ק"ר}$$

$$u, v \quad \langle u, A^t v \rangle = -\langle u, A v \rangle \quad \Leftarrow$$

$$\boxed{A^t = -A} \quad \forall u, v \quad \langle (A^t + A)u, v \rangle = 0 \quad \Leftarrow$$

(ב) נוכח'ח ℓ $A \in M_n(\mathbb{C})$ ℓ $\langle A u, v \rangle = 0$ $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$ $\Rightarrow A = 0$

$$0 = \langle A u, v \rangle = \langle A v, u \rangle = \langle A v, u \rangle = \langle A v, u \rangle$$

מכאן $\langle A v, u \rangle = 0$ $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$ $\Rightarrow A = 0$

$$\Rightarrow \text{כל בלוק של } A \text{ הוא } 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A v_1 = 0, A v_2 = v_1, \dots, A v_{n-1} = v_{n-2}, A v_n = v_{n-1})$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} 0 = \langle A(v_1 + v_2), v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle \\ 0 = \langle A v_2, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$$

$$1 < \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \quad \Leftarrow$$

$$(A = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{כל בלוק של } A \text{ הוא } 0 \text{ ב-} 1 \times 1 \text{ מ"מ})$$