

113-88-תרגיל 1:

1. כתוב את התמורות הבאות כהרכבת מחזורים זרים ומתוכם כהרכבת חילופים. קבע את זוגיותן.

$$א. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} ב. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ע"מ 67:

1.1 תרגיל. תהא X קבוצה סופית. ותהא $f: X \rightarrow X$ פונקציה כלשהי. הוכח: f חד-חד ערכית $\Leftrightarrow f$ על.

1.3 תרגיל. הכן רשימה של כל התמורות האפשריות ב S_3 , והצג כל אחת מהן בשלש ההצגות האפשריות, כאשר בהצגה של פירוק למחזורים ... כתוב את שתי הצורות האפשריות (המלאה, וזאת שאינה כוללת מחזורים מאורך אחד).

1.4 תרגיל. א. הוכח שלכל שתי תמורות $\sigma, \tau \in S_n$, גם $\tau\sigma$ היא תמורה.

ב. הוכח שלכל תמורה $\sigma \in S_n$ מתקיים $\sigma \circ \text{id} = \text{id} \circ \sigma = \sigma$.
(הכוונה כמובן לכל טאו ב S_n)

1.11 תרגיל. מצא את הסימן של כל אחת מהתמורות המופיעות בתרגיל 1.3.

(כלומר של S_3)

1.12 תרגיל. תהא $\sigma \in S_n$. הוכח: $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$. [ראו: מכל היפוק סדר $i < j$ על σ

אפשר לקבל היפוק סדר על σ^{-1} בצורה הבאה: נסמן $i' := \sigma(i)$, $j' := \sigma(j)$. מתקיים:

$$[i' < j' \Leftrightarrow \sigma^{-1}(i') < \sigma^{-1}(j')]$$

1. כתוב את התמורות הבאות כהרכבת מחזורים זרים ומתוכם כהרכבת חילופים. קבע את זוגיותן.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 2)(3 \ 5) = (4 \ 2)(2 \ 1)(3 \ 5) \Rightarrow \text{א.אי זוגית}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 6 \ 3)(2 \ 7) = (4 \ 6)(6 \ 3)(3 \ 1)(2 \ 7) \Rightarrow \text{ב.זוגית}$$

ע"מ 67:

1.1 תרגיל. תהא X קבוצה סופית. ותהא $f: X \rightarrow X$ פונקציה כלשהי. הוכח: f חד-חד ערכית $\Leftrightarrow f$ על.

תהי f חח"ע. נניח f איננה על, אזי קיים $y \in \{1, 2, \dots, n\} = X$ כך של- y לא קיים מקור $x \in X$. כלומר, הטווח (שזהה לתחום) מכיל ממש את קבוצת תמונות הפונקציה ולכן גדול ממש ממנה. ממתטיקה בדידה ידוע לנו שפונ' לטווח סופי אשר תחומה גדול מטווחה איננה חח"ע, בסתירה להנחה.

תהי f פונ' על. נניח f איננה חח"ע, אזי קיימים שני מקורות הנישלחים לאותה תמונה, אזי, קב' התמונות של הפונ' קטן ממש מתחומה, שהוא גם טווחה. אזי הפונ' לא מכסה את כל הטווח, בסתירה להנחה.

1.3 תרגיל. הכן רשימה של כל התמורות האפשריות ב S_3 , והצג כל אחת מהן בשלש ההצגות האפשריות, כאשר בהצגה של פירוק למחזורים ... כתוב את שתי הצורות האפשריות (המלאה, וזאת שאינה כוללת מחזורים מאורך אחד).

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{(1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)\} = \{ID, (12), (13), (23), (123), (132)\} = \{ID, (12), (13), (23), (12)(23), (13)(32)\}$$

1.4 תרגיל. א. הוכח שלכל שתי תמורות $\sigma, \tau \in S_n$, גם $\tau\sigma$ היא תמורה.

ב. הוכח שלכל תמורה $\sigma \in S_n$ מתקיים $\sigma \tau = \tau \sigma$ (הכוונה כמובן לכל טאו ב S_n)

א.

σ, τ תמורות ב S_n $\Leftrightarrow \sigma, \tau: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ חח"ע ועל $\Leftrightarrow \tau\sigma$ גם תמורה ב S_n וגם חח"ע ועל $\Leftrightarrow \tau\sigma$ גם תמורה ב S_n

ב.

$$\forall \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\begin{aligned} \tau id &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ id(1) & id(2) & \dots & id(n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau id(1) & \tau id(2) & \dots & \tau id(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ id(1) & id(2) & \dots & id(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ id \tau(1) & id \tau(2) & \dots & id \tau(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \tau \end{aligned}$$

1.11 תרגיל. מצא את הסימן של כל אחת מהתמורות המופיעות בתרגיל 1.3.

(כלומר של S_3)

$$\text{sign}(ID) = 1$$

$$\text{sign}((12)) = \text{sign}((13)) = \text{sign}((23)) = -1$$

$$\text{sign}((123)) = \text{sign}((132)) = 1$$

1.12 תרגיל. תהא $\sigma \in S_n$. הוכח: $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$. [רמז: מכאן הפוקס סדר $i < j \mapsto \sigma(i) < \sigma(j)$ על σ

אפשר לקבל הפוקס סדר על σ^{-1} בצורה הבאה: נסמן $i' := \sigma(i)$, $j' := \sigma(j)$. מתקיים:

$$[i' < j' \mapsto \sigma^{-1}(i') < \sigma^{-1}(j')]$$

הוכחה דרך מס' החילופים:

ראינו שדרך אחת לבניית שרשרת החילופים השקולה לתמורה σ היא ע"י מציאת רצף ההחלפות בין זוגות המעביר אותנו מ- $1 \ 2 \ \dots \ n$ לסדר הנדרש בתמורה: $\sigma(1) \ \sigma(2) \dots \sigma(n)$. ע"מ לבנות את σ^{-1} הרי שנעבור בדיוק את אותן החלפות אך בסדר הפוך ולכן מס' החילופים לא ישתנה, בעקבותיו זוגיות התמורה ולכן גם סימן התמורה ישמר

אלגברה לינארית 2

תרגיל 2

שאלה 1:

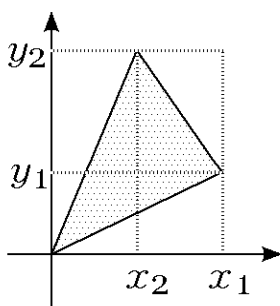
חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

א. מטריצת סיבוב 3×3 כללית מעל $\mathbb{Z}_3$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, והוכח ששווה ל- $a+b+c$.

ב. המטריצה $A - \lambda I$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$, והוכח שהיא מאפסת את

הפולינום המתקבל, כאשר מציבים $\alpha I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ במקום סקלר α .

שאלה 2:



א. חשב שטח משולש במישור שקודקודיו הם $\vec{0} = (0,0)$,

$$v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$$

הוכח שהוא שווה ל- $\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|$. לשם הפשטות, הניחו

כי v_1, v_2 שניהם ברביע הראשון, וכן $x_2 < x_1$ וגם $y_1 < y_2$.

ב. הכלל את התוצאה שקיבלת למשולש כלשהו במישור.

כלומר בהינתן משולש כלשהו במישור שקודקודיו הם

$v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2), v_3 = (x_3, y_3)$ הוכח כי שטחו שווה ל:

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \right|$$

רמז: בצע הזזה של המישור ביחס לקודקוד v_1 .

שאלה 3:

א. הוכח כי $\det \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B & C^T \end{pmatrix} = |A| \cdot |C|$ כאשר $A \in \mathbb{F}^{n \times n}, B \in \mathbb{F}^{m \times n}, C \in \mathbb{F}^{m \times m}$.

ב. הוכח או הפרך: $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = |A| \cdot |D| - |B| \cdot |C|$.

ג. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -8 & 34 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ 18 & 2 & 26 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

תזכורת: בהרצאה הוכחתם $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = |A| \cdot |C|$.

שאלה 4:

יהא n אי-זוגי, הוכח שאם $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ דטרמיננטה של כל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אנטי-סימטרית ($A = -A^T$) שווה ל-0.

שאלה 5:

נגדיר $A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, ובאופן דומה נגדיר את A_n .

א. חשב את הדטרמיננטות של A_3, A_4 .

ב. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n} .

ג. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n-1} , והסק מהם ערכי λ שעבורם היא הפיכה.

בהצלחה!

אלגברה לינארית 2

תרגיל 2 - פתרון

שאלה 1:

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

א. מטריצת סיבוב 3×3 כלית מעל $\mathbb{Z}_3$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, והוכח ששווה ל- $a+b+c$.

פתרון: נחשב $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - (abc + bca + cab) = a^3 + b^3 + c^3 - 3 \cdot abc$.

מעל $\mathbb{Z}_3$ נקבל $a^3 + b^3 + c^3$ ולפי משפט פרמה הקטן $a+b+c$.

ב. המטריצה $A - \lambda I$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$, והוכח שהיא מאפסת את הפולינום המתקבל, כאשר מציבים

$\alpha I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ במקום סקלר α .

פתרון: נפתח לפי השורה השלישית לקבל

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-2-\lambda) - (-4) \cdot 3] = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 10)$$

כעת נציב את A בפולינום שהתקבל

מש"ל $A^2 = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -14 \\ -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + A + 10 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, I - A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (1-A)(A^2 + A + 10I) = 0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

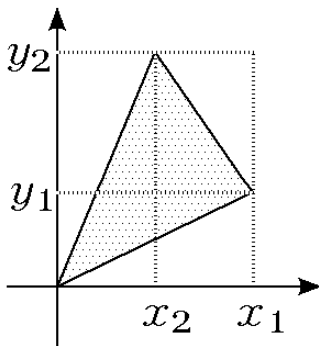
שאלה 2:

א. חשב שטח משולש במישור שקודקודיו הם $\vec{0} = (0,0)$,

$$v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$$

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|$$

הוכח שהוא שווה ל-



פתרון:

$$S_{\Delta} = x_1 y_2 - \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) + x_2 y_2 + x_1 y_1] = x_1 y_2 - \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

מש"ל

$$= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|$$

ב. הכלל את התוצאה שקיבלת למשולש כלשהו במישור.

כלומר בהינתן משולש כלשהו במישור שקודקודיו הם $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2), v_3 = (x_3, y_3)$ הוכח כי שטחו

שווה ל:

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \right|$$

פתרון: נבצע הזזה של המישור ב $(-v_1)$ לקבלת המשולש:

$v'_1 = (0, 0), v'_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), v'_3 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ עתה לפי סעיף (א) נטען כי

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = x_2 y_3 + x_1 y_2 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2$$

נפשט את אגף ימין:

$$= x_2(y_3 - y_1) - x_1 y_3 - x_3(y_2 - y_1) + x_1 y_2 + (x_1 y_1 - x_1 y_1)$$

$$= x_2(y_3 - y_1) - x_1(y_3 - y_1) - x_3(y_2 - y_1) + x_1(y_2 - y_1)$$

$$= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

לכן נקבל את הדרוש. מש"ל

שאלה 3:

א. הוכח כי $\det \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B & C^T \end{pmatrix} = |A| \cdot |C|$ כאשר $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

פתרון:

נזכר במסקנה מההרצאה כי $|A^T| = |A|$ ונעזר בתזכורת:

$$\det \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B & C^T \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B & C^T \end{pmatrix}^T = \det \begin{pmatrix} A & B^T \\ 0 & C \end{pmatrix} = |A| \cdot |C|$$

מש"ל

ב. הוכח או הפרך: $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = |A| \cdot |D| - |B| \cdot |C|$

פתרון:

נפריך על ידי דוגמא נגדית.

תהיינה $A = D = I, B = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ אזי

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{I_1} - \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{I_2}$$

$$= \underbrace{[1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)]}_{I_1} - (-1) \underbrace{[1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)]}_{I_2} = 4$$

ומצד שני $|A| \cdot |D| - |B| \cdot |C| = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \neq 4$.

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -8 & 34 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ 18 & 2 & 26 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ג. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה}$$

פתרון:

$$\det \begin{pmatrix} 12 & 0 & -8 & 34 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ 18 & 2 & 26 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -1 \\ 18 & 2 & 26 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{נעזר בתזכורת,}$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -1 \\ 18 & 2 & 26 \end{vmatrix} = (-2) [12 \cdot (-1) - (-8) \cdot 3] = -24, \quad \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 1$$

$$\det(\bullet) = (-24) \cdot 1 = -24 \Leftarrow$$

שאלה 4:

יהא n אי-זוגי, הוכח שאם $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ דטרמיננטה של כל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אנטי-סימטרית ($A = -A^T$) שווה ל-0.

הוכחה:

בהרצאה ראינו כי $|A| = |A^T|$, ולפי הנתון $|-A| = |A^T|$. על כן $|A| = |-A|$. כזכור $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, כלומר $|A| = |-A| = (-1)^n \cdot |A|$. נתון כי n אי-זוגי ולכן $|A| = -|A|$.

נעזר בנתון $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ כדי להסיק $|A| = 0$. משי"ל

שאלה 5:

$$A_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ נגדיר}$$

$$A_n = \lambda I - \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}$$

א. חשב את הדטרמיננטות של A_3, A_4 .

פתרון:

$$\det(A_3) = \lambda(\lambda - 1)\lambda - (-1)(\lambda - 1)(-1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$\det(A_4) = \lambda^4 + (-1)^4 - \lambda(-1)^2\lambda - (-1)\lambda^2(-1) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$$

ב. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n} .

פתרון:

$$\det(A_{2n}) = \lambda^{2n} + (-1)^{2n} - \lambda^{n-1}(-1)^2\lambda^{n-1} - (-1)^{n-1}\lambda^2(-1)^{n-1} = \lambda^{2n} - 2\lambda^{2n-2} + 1$$

ג. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n-1} , והסק מהם ערכי λ שעבורם היא הפיכה.

פתרון:

$$\det(A_{2n-1}) = \lambda^{n-1}(\lambda - 1)\lambda^{n-1} - (-1)^{n-1}(\lambda - 1)(-1)^{n-1} = \lambda^{2n-1} - \lambda^{2n-2} - \lambda + 1$$

$$\lambda^{2n-1} - \lambda^{2n-2} - \lambda + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \det(A_{2n-1}) \neq 0$$

נבדוק מתי הדטרמיננטה מתאפסת:

$$\lambda^{2n-1} - \lambda^{2n-2} - \lambda + 1 = \lambda^{2n-2}(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda^{2n-2} - 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda^{2n-2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

על A_{2n-1} הפיכה עבור $\lambda \neq \pm 1$.

אלגברה לינארית 2

תרגיל 3

שאלה 1:

תהא $A \in F^{n \times n}$, הוכיחו כי $\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}| = 0$ לכל $i \neq k$.
הדרכה: הגדירו מטריצה זהה ל- A פרט לשורה ה- i .

שאלה 2:

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:
הערה: a באלכסון הראשי, b באלכסון מעליו, ו- b נוסף בפינה השמאלית.
$$A = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ \ddots & a & \ddots & \\ & 0 & \ddots & b \\ b & & \ddots & a \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$$

שאלה 3:

תהא $A = \begin{pmatrix} z & \bar{z} & |z| \\ \bar{z} & z & |z| \\ \frac{1}{|z|} & \frac{1}{|z|} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $z \neq 0$.

- (א) מצא את $|A|$ ואת $\text{adj}(A)$.
- (ב) עבור אילו ערכי z המטריצה הפיכה.
- (ג) מצא את A^{-1} .

שאלה 4:

הוכח שלכל מטריצה $A \in F^{n \times n}$ משולשית עליונה גם $\text{adj}(A)$ משולשית עליונה.
רמז: חשב את המינור A_{ij} כאשר $i > j$.

ע"מ 81:

1.6 תרגיל. תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

- א. מצא את הערכים העצמיים של A . [רמז: כעצרת דטרמיננטה]
- ב. מצא את המרחבים העצמיים של A .

1.7 תרגיל. הוכח שלמטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ אין ערכים עצמיים.

1.9 תרגיל. [מקור: תהליכים מקריים] מטריצת מרקוב היא מטריצה ריבועית, שסכום אברי כל עמודה שלה הוא 1. תהא A מטריצת מרקוב. הוכח שלמטריצה A^t יש ערך עצמי $\lambda = 1$. מהו הוקטור העצמי המתאים?

1.12 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ותהא $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ההעתקה של כפל במטריצה A משמאל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

- א. v וקטור עצמי של A (המתאים לערך עצמי λ).
- ב. v וקטור עצמי של T_A (המתאים לערך עצמי λ).

תזכורת- מטריצה נילפוטנטית:

A היא מטריצה ריבועית, זמטריצה נילפוטנטית מסדר k , $A^i = 0 \wedge A^{i-1} \neq 0$, כך ש:

1.15 תרגיל.* תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה נילפוטנטית מסדר k .

א. מהם הערכים העצמיים של A ?

ב. הוכח $(\alpha I - A) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ הפיכה.

קבוצת הערכים העצמיים של העתקה לינארית T נקראת **הספקטרום של T** , ומסומנת $\sigma(T)$. באופן דומה מגדירים את $\sigma(A)$ עבור מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

1.18 תרגיל. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. [ראו: $(AB)v = (BA)Av$].
ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(A) = \sigma(A^t)$. [ראו: בעזרת דטרמיננטה].

בהצלחה!

אלגברה לינארית 2

תרגיל 3 - פתרון

שאלה 1:

תהא $A \in F^{n \times n}$, הוכיחו כי $\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}| = 0$ לכל $i \neq k$.

הוכחה:

יהי $1 \leq i \neq k \leq n$ נגדיר את $B \in F^{n \times n}$ כך ש- $b_{ij} = \begin{cases} a_{lj} : l \neq i \\ a_{kj} : l = i \end{cases}$, אזי $R_k(B) = R_i(B) = R_k(A)$. כלומר

שורותיה ל B תלויות לינארית זו בזו ולכן היא אינה הפיכה, ובפרט $\det(B) = 0$.

נפתח את דטרמיננטת B לפי השורה ה- i שלה: $\det(B) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} |B_{ij}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} |B_{ij}|$.

לכל $1 \leq j \leq n$ המינור B_{ij} הוא בדיוק A_{ij} כי $R_l(B) = R_l(A)$ $\forall 1 \leq l \neq i \leq n$ ולכן

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}| = \det(B) = 0 \text{ מש"ל.}$$

שאלה 2:

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ \ddots & a & \ddots & \\ & 0 & \ddots & b \\ b & & \ddots & a \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$$

הערה: a באלכסון הראשי, b באלכסון מעליו, ו- b מוסף בפינה השמאלית.

פתרון:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} |A_{i,1}| = a |A_{1,1}| + (-1)^{n+1} b |A_{n,1}|$$

$$|A_{1,1}| = \det \begin{pmatrix} a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ & & & a \end{pmatrix} = a^{n-1}, |A_{n,1}| = \det \begin{pmatrix} b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \end{pmatrix} = b^{n-1}$$

$$\det(A) = a^n + (-1)^{n+1} b^n \text{ לכן}$$

שאלה 3:

$$. z \neq 0, A = \begin{pmatrix} z & \bar{z} & |z| \\ \bar{z} & z & |z| \\ \frac{1}{|z|} & \frac{1}{|z|} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \quad \text{תהא}$$

(א) מצא את $|A|$ ואת $\text{adj}(A)$.

(ב) עבור אילו ערכי z המטריצה הפיכה.

(ג) מצא את A^{-1} .

הוכחה:

$$|A| = z^2 + \bar{z} + \bar{z} - z - \bar{z}^2 - z = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x - 2iy - 2x - 2iy - x^2 + 2ixy + y^2 = 4iy(x-1)$$

(א)

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} z-1 & 1-\bar{z} & |z|(\bar{z}-z) \\ 1-\bar{z} & z-1 & |z|(\bar{z}-z) \\ \frac{1}{|z|}(\bar{z}-z) & \frac{1}{|z|}(\bar{z}-z) & z^2 - \bar{z}^2 \end{pmatrix}$$

(ב) A הפיכה $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) \neq 0 \wedge \text{Re}(z) \neq 1$.

(ג) נכתוב את $\text{adj}(A)$ בכתיב $z = x + iy$:

$$|A| = \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} x-1+iy & 1-x+iy & \sqrt{x^2+y^2}(-2iy) \\ 1-x+iy & x-1+iy & \sqrt{x^2+y^2}(-2iy) \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-2iy) & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-2iy) & 4ixy \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{iy} \right) & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{iy} \right) & \sqrt{x^2+y^2} \frac{1}{2(1-x)} \\ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{iy} \right) & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{iy} \right) & \sqrt{x^2+y^2} \frac{1}{2(1-x)} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2(1-x)} & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2(1-x)} & \frac{x}{x-1} \end{pmatrix}$$

שאלה 4:

הוכח שלכל מטריצה $A \in F^{n \times n}$ משולשית עליונה גם $\text{adj}(A)$ משולשית עליונה.

הוכחה:

יהי $i > j$, ונסמן $B = \text{adj}(A)$, לכן צ"ל $b_{ij} = 0$.

ובכן $b_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$. המינור A_{ji} הוא מטריצה משולשית עליונה עם 0 על האלכסון, ולכן $b_{ij} = 0 \Leftarrow |A_{ji}| = 0$ מש"ל

$$1.6 \text{ תרגיל. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ תהא}$$

א. מצא את הערכים העצמיים של A . [רמז: כעצרת דטרמיננטה]
 ב. מצא את המרחבים העצמיים של A .

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda(\lambda - 4) + 5) + (-2) + 0 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda - 2 =$$

$$\lambda^2(\lambda - 1) - 3\lambda(\lambda - 1) + 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1, 2$$

$$(A - \lambda I)v_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = t \\ x_1 = t \end{matrix} \Rightarrow v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{\lambda_{1,2}} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

$$(A - \lambda I)v_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = 0.5t \\ x_1 = 0.25t \end{matrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.25t \\ 0.5t \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

$$1.7 \text{ תרגיל. הוכח שלמטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ אין ערכים עצמיים.}$$

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$$

אבל זה ביטוי שתמיד גדול מאפס ולכן לא קיים λ שמאפס את הפולינום האופייני. כלומר לא קיימים ערכים עצמיים.

1.9 תרגיל. [מקור: תהליכים מקריים] **מטריצת מרקוב** היא מטריצה ריבועית, שסכום אברי כל עמודה שלה הוא 1. תהא A מטריצת מרקוב. הוכח שלמטריצה A^t יש ערך עצמי $\lambda=1$. מהו הוקטור העצמי המתאים?

תוצאת המכפלה $B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ היא וקטור שהעמודה ה-1 שלו היא סכום השורה ה-1 של B . השורות של A^t הינן

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

העמודות של A ולכן A היא וקטור העמודה ה-1 של A הוא אחד. לכן הוקטור העצמי הוא

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ והערך העצמי הוא } 1$$

1.12 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ותהא $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ההעתקה של כפל במטריצה A משמאל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

- v וקטור עצמי של A (המתאים לערך עצמי λ).
- v וקטור עצמי של T_A (המתאים לערך עצמי λ).

פתרון:

$$\forall (x_1 \dots x_n) \quad T_A(x_1 \dots x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

↓

$$A \text{ של } v \text{ ו"ע } \lambda \Leftrightarrow \exists v \neq 0, \lambda \in F : \lambda v = Av = T_A v \Leftrightarrow T_A \text{ של } v \text{ ו"ע } \lambda \text{ ע"ע } \lambda$$

תזכורת- מטריצה נילפוטנטית:

מטריצה נילפוטנטית מסדר i היא מטריצה ריבועית, A , כך ש: $A^i = 0 \wedge A^{i-1} \neq 0$.

1.15 תרגיל.* תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה נילפוטנטית מסדר k .

א. מהם הערכים העצמיים של A ?

ב. הוכח (כא כעצרת (ג)) : $\alpha I - A$ הפיכה $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

פתרון:

- א. ניליפוטנטית מסדר k לכן $A^{k-1} \neq 0$ וגם $A^k = 0$. נניח λ ע"ע של A . לכן $Av = \lambda v$. עבור איזה $v \neq 0$. נכפול ב A^{k-1} לקבל $A^k v = \lambda^k v$ אבל $0 = A^k v$ לכן $\lambda = 0$. אפס חייב להיות ערך עצמי של A מכיוון שאפס הוא ע"ע של כל מטריצה לא הפיכה (ובוודאי ניליפוטנטית לא הפיכה). בסיכום, 0 ע"ע של A והוא יחיד.

- ב. $\alpha I - A$ הפיכה אם $\alpha I - A \neq 0$ אם α לא ע"ע של A אם $\alpha \neq 0$ (לפי א').

קבוצת הערכים העצמיים של העתקה לינארית T נקראת **הספקטרום של T** , ומסומנת $\sigma(T)$. באופן דומה

מגדירים את $\sigma(A)$ עבור מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

1.18 תרגיל. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. [ראו: $A(BA)v = (AB)Av$ יש σ בנפרד]

באקרה $Av=0$

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(A) = \sigma(A^t)$. [ראו: כעצרת דטרמיננטה]

פתרון:

א.

$$\underline{Av \neq 0} : BA \text{ של } \lambda \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : BAv = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : A(BA)v = A\lambda v = \lambda Av \\ \Leftrightarrow \exists Av \neq 0 : (AB)Av = \lambda Av \Leftrightarrow AB \text{ של } \lambda$$

$$\underline{Av = 0} : \Rightarrow BAv = 0 \Leftrightarrow BA \text{ של } \lambda \Leftrightarrow |BA - 0I| = 0 \Leftrightarrow |BA| = 0 \Leftrightarrow |B||A| = 0 \Leftrightarrow |AB| = 0 \\ \Leftrightarrow |BA - 0I| = 0 \Leftrightarrow AB \text{ של } \lambda$$

וכנ"ל בכיון ההפוך

ב.

$$\lambda \text{ פותר את הפולינום האופייני : } \lambda I - A \Leftrightarrow \lambda \text{ של } A$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{אבל :} \\ 0 = |\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^t| = |(\lambda I)^t - (A)^t| = |\lambda I - (A)^t| \\ \text{ולכן :} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow |\lambda I - (A)^t| = 0 : \lambda \text{ פותר את הפולינום האופייני : } \lambda \text{ של } A^t$$

1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

(א) חשב את $adj(A), adj(B)$.

(ב) חשב את $\det(AB)$.

רמז: למה שווה המטריצה $A \cdot adj(A) \cdot B \cdot adj(B)$?

2. עבור המט' הבאות מצא: ע"ו-ו"ע, במידה ו- A לכסינה, מצא: מט' מלכסנת P ומט' אלכסונית D וכמו כן את: A^{-1}, A^3 ע"י שימוש בפרוק $A = PDP^{-1}$.

(רמז לחזקות: לאחר שמצאתם את הפרוק היזכרו שבעצם A^n הוא מכפלת A n פעמים (מה קורה ל P ?). השתמשו בחישוב חזקתה של מטריצה אלכסונית שהיא פשוטה מאוד...)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ג.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ד.}$$

2.3 תרגיל. להלן שני ניסוחים של משפט הליכסון. הוכח שהם שקולים (מבלי להוכיח את המשפט):

א. תהא $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. T לכסינה אם ורק אם ל V יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T .

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. A לכסינה אם ורק אם יש ל $\mathbb{F}^n$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A .

ע"מ 84 תר' 2.7:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

א. לכסן את A (כלומר מצא את הפרוק הנדרש ל D אלכסונית ו P מלכסנת)

ב. חשב את A^n

(רמז: לאחר שמצאתם את הפרוק היזכרו שבעצם A^n הוא מכפלת A n פעמים (מה קורה ל P ?). השתמשו בחישוב חזקתה של מטריצה אלכסונית שהיא פשוטה מאוד...)

2.10 תרגיל. תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.

2.11-החלק השני (שלא נעשה בכיתה).

ע"מ 87 תר' 3.13:

א. $A \in Mat_n(F)$ לכסינה. הוכח שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לנאריים ומצא גורמים אלו (רמז: למטריצות דומות אותו פולינום אופייני)

ב. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א?

1.

$$.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \text{ תהיינה}$$

(א) חשב את $adj(B), adj(A)$.

(ב) חשב את $\det(AB)$.

פתרון:

(א)

$$adj(A) = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| & -|A_{41}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| & |A_{42}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| & -|A_{43}| \\ -|A_{14}| & |A_{24}| & -|A_{34}| & |A_{44}| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \cdot (-3) \cdot 2 & -(-1)2 \cdot (-1)(-1) & 1 \cdot (-8) & -(-3)(-8) \\ -(-2) \cdot 10 & 2(-4) & -(-8) \cdot 4 & -(-1) \cdot 10 \\ 5(-2) & -2(-2) & 2(-8) & -2(-1) \cdot (-24) \\ -5(-6) & -3 \cdot 4 & -(-5)(-1)(-1) & -5(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 2 & -8 & -24 \\ 20 & -8 & 32 & 10 \\ -10 & 4 & -16 & -48 \\ 30 & -12 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$adj(B) = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 & -8 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(ב) כזכור $A \cdot adj(A) = |A|I$, ולכן $A \cdot adj(A) \cdot B \cdot adj(B) = |A|I \cdot |B|I = |AB|I$. נחשב את

השורה הראשונה של $A \cdot adj(A)$ ואת הטור הראשון של $B \cdot adj(B)$.

$$R_1(A \cdot adj(A)) = R_1(A) \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -48 & 2 & -8 & -24 \\ 20 & -8 & 32 & 10 \\ -10 & 4 & -16 & -48 \\ 30 & -12 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot R_1(adj(A)) - R_3(adj(A)) = \begin{pmatrix} -96 & 4 & -16 & -48 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 4 & -16 & -48 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -86 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$.C_1(B \cdot adj(B)) = B \cdot C_1(adj(B)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{pmatrix} -86 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -946 \Leftarrow$$

2. עבור המט' הבאות מצא: ע"ו-ו"ע, במידה ו A לכסינה, מצא: מט' מלכסנת P ומט' אלכסונית D וכמו כן את: A^{-1}, A^3 ע"י שימוש בפרוק $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad .א$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -4 & \lambda - 10 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 10) - 8 = \lambda^2 - 13\lambda + 22 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 88}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2} = 11, 2 \Rightarrow A \text{ לכסינה}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & | & 0 \\ 4 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & -1 & | & 0 \\ -8 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = t, x_1 = \frac{1}{4}t \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 4 & 8 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -2t \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 155 & 294 \\ 588 & 1184 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad .ב$$

$$\lambda_{1,2} = -1,-2 \Rightarrow \text{לכסינה} -A$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} P^{-1}, A^3 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .ג$$

$$\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A \text{ איננה לכסינה}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .7$$

A – לכסינה $\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, A^3 = P \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

2.3 תרגיל. להלן שני ניסוחים של **משפט הליכסון**. הוכח שהם שקולים (מבלי להוכיח את המשפט):

א. תהא $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. T לכסינה אם ורק אם ל V יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T .

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. A לכסינה אם ורק אם יש ל $\mathbb{F}^n$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A .

פיתרון:

(הערה: אמ"מ = אם ורק אם. למה? זה מגיע מהקיצור באנגלית iff. למה? iff לא ברור אבל אימצנו)

א' גורר ב':

A לכסינה. נבחר T ה"ל כך ש A המטריצה המייצגת שלה לפי איזושהו בסיס B , אזי $[T]_B$ לכסינה. $[T]_B$ אמ"מ היא דומה למטריצה אלכסונית והמטריצה שמלכסנת אותה, P , תהווה מטריצת מעבר מהבסיס B לאיזושהו בסיס אחר C , כלומר המטריצה האלכסונית שתתקבל, D , היא המטריצה המייצגת של D לפי בסיס זה: $[T]_C = P [T]_B P^{-1} = D$, כל זאת אמ"מ T לכסינה. ע"פ סעיף א' זה קורה אמ"מ ל V בסיס וקטורים עצמיים. ע"פ האופן בו בחרנו את T , ו"ע אלו הם ו"ע של A ויהיו בסיס ל F^n .

ב' גורר א':

T לכסינה אמ"מ קיים ל V בסיס B כך שמטריצתו המייצגת, D , אלכסונית ובפרט לכסינה. לפי סעיף ב' זה קורה אמ"מ ל F^n בסיס ו"ע של D , למעשה, בגלל ש D אלכסונית בסיס זה יהיה מורכב מוקטורי הבסיס הסטנדרטי: $De_i = \lambda_i e_i$. נמצא מטריצת מעבר, P , בין הבסיס הסטנדרטי לבין הבסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ שנתן לנו את D ונקבל: $Pe_i = P^{-1}[T]_B Pe_i = Tv_i = \lambda_i v_i$ ולכן בסיס B הוא בסיס ו"ע של T .

ע"מ 84 תר' 2.7:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

א. לכסן את A (כלומר מצא את הפרוק הנדרש ל D אלכסונית ו P מלכסנת)

$$\lambda_{1,2} = 2, \quad \lambda_3 = 6$$

$$V_{\lambda_{1,2}} = sp \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda_3} = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

שימו לב לרשום את הו"ע ב P באותו סדר שהנחנו את הו"ע ב D, ואת אלו להניח בסדר ריבוי יורד

ב. חשב את A^n

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2.10 תרגיל. תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.

$$\left| \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x & -a^2 \\ -1 & -4 & x \end{pmatrix} \right| = (x-2)(x^2 - 4a^2) = (x-2)(x-2a)(x+2a)$$

אם שלושת הו"ע שונים אז כפי שהוכחנו בכיתה A וודאי לכסינה, לכן כבר בשלב זה ניתן לומר שעבור $a \neq 1, -1, 0$ A לכסינה. נראה מה קורה כשהיא כן שווה לאחד מהם:

$$a=1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2, -2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0.5c, a = 2b - c = c - c = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0, b = -0.5c \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לא לכסינה

$$a = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

$$a = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 2, 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = \frac{1}{3}c, a = 2b = \frac{2}{3}c \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

2.11-חלק שני:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n-2} = PD^{n-2}P^{-1}$$

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

ע"מ 87 תר' 3.13:

א. $A \in Mat_n(F)$ לכסינה. הוכח שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לנאריים ומצא גורמים אלו

$A \Leftarrow A$ דומה למטריצה אלכסונית שערכיה העצמיים באלכסונה הוכחנו בשעורים קודמים כי למטריצות דומות אותו פולינום אופייני ולכן הפולינום של A יהיה זהה לזה של המטריצה האלכסונית אשר הוא מהצורה $\prod (\lambda - \lambda_i)$ עבור כל λ_i איבר על אלכסונה.

ב. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א?

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = t, x_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר אין מספיק ו"ע לליכסון A . לא סותר כיוון שכיוון הגרירה הפוך

3.3 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח את התכונות הבאות של הפולינום האופייני $f_A(x)$:

א. $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : f_A(\lambda) = 0\}$.

ב. $f'_A(0) = |A|$ בפרט, $f'_A(0) \neq 0 \Leftrightarrow A$ הפיכה

[רמז: אפשר להציב את הסקלר זרע אחר כך לחשב את הדטרמיננטה]

3.4 תרגיל. תהא $A = \alpha I \in \mathbb{F}^{n \times n}$. מצא את הפולינום האופייני של A .

3.9 תרגיל. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x) = f_B(x)$ (באזים: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$ [רמז: (א)]

3.11 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח שלכל ערך עצמי λ של A , הריבוי הגאומטרי של λ קטן או שווה לריבוי האלגברי שלו.

הצרכה: נביח עבור הצתקה $T: V \rightarrow V$, כאשר V מרחב ממימד n . (מדוע זה מספיק?)

א. יהא $v_1, \dots, v_k$ בסיס עבור V_λ . כרגיל, נשים אותו לבסיס $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ עבור V .

ב. הראו ש $(x - \lambda)^k$ מחלק את הפולינום האופייני של $T|_B$.

3.15 תרגיל. זוכרים את דני? עכשיו הוא חושב שיש לו הוכחה פשוטה למשפט קיילי-המילטון: תהא

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. לפי ההגדרה, $f_A(x) = |A - xI|$, לכן $f_A(A) = |A - AI| = |A - A| = |O| = 0$. אבל דני בחור

פיקח: הוא יודע ש $f_A(A)$ צריכה להיות מטריצה, והוא קיבל סקלר! מה לא נכון בהוכחה של דני? [רמז:

כיצד נראית המטריצה xI ? האם אפשר להציב A במקום ה- x במטריצה זו?]

3.18 תרגיל'. מופע הקסמים של vandermonde & companion.

א. יהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ ותהא $A = \text{companion}(a_0, \dots, a_{n-1})$ הוכח שהפולינום

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

[רמז: תרגיל מסעיף 7 בפרק ו']

ב. מצא מטריצה המאפסת את הפולינום $5x^5 + 3x^3 - x^2 + 7 \in \mathbb{R}[x]$

ג. לכל אות m , $x \in \{i, g, \dots\}$ נסמן ב- $\underline{x}$ את הערך הגימטרי שלה ($\underline{1} = i, \underline{2} = g, \dots, \underline{20} = \dots$,

$\underline{100} = \dots, \underline{400} = \dots$). מצא מטריצה A המאפסת את הפולינום:

$$x^{10} + \underline{2}x^9 + \underline{1}x^8 + \underline{7}x^7 + \underline{10}x^6 + \underline{5}x^4 + \underline{3}x^3 + \underline{7}x^2 + \underline{1}x + \underline{1}$$

ד. מצא מטריצה ממשית הדומה למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$ [רמז: יש לה 3 ערכים עצמיים שונים. מציא

מטריצה ממשית עם ערכים עצמיים אלו]

ה. יהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ ותהא $A = \text{companion}(a_0, \dots, a_k)$. מהם הוקטורים העצמיים של A ?

ו. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ השורשים של הפולינום $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{C}[x]$. הוכח: אם

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים זה מזה, אזי מטריצת ונדרמונדה

$$\text{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

היא הפיכה (למה?), והמטריצה

$$\text{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} \text{companion}(a_0, \dots, a_{n-1}) \text{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

היא אלכסונית (מהם איברי האלכסון?).

3.3 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח את התכונות הבאות של הפולינום האופייני $f_A(x)$:

א. $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : f_A(\lambda) = 0\}$.

ב. $f_A(0) = |A|$, בפרט, $f_A(0) \neq 0 \Leftrightarrow A$ הפיכה.

[רמז: אפשר להציב את הסקלר ורק אחר כך לחשב את הדטרמיננטה]

פתרון:

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow 0 = |A - \lambda I| = f_A(\lambda)$$

קיים פתרון לא טריוויאלי

$$f_A(0) = (-1)^n |A - 0 \cdot I| = (-1)^n |A|$$

$$A \text{ הפיכה} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |A - 0 \cdot I| \neq 0 \Leftrightarrow f_A(0) \neq 0$$

3.4 תרגיל. תהא $A = \alpha I \in \mathbb{F}^{n \times n}$. מצא את הפולינום האופייני של A .

פתרון:

$$A = \alpha I \Rightarrow |\lambda I - A| = |\lambda I - \alpha I| = |(\lambda - \alpha)I| = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)^n$$

3.9 תרגיל. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x) = f_B(x)$ (באזים: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$ [רמז: (א)]

פתרון:

$$B = P^{-1}AP$$

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda P - P^{-1}AP| = \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}|(\lambda I - A)|P| = |(\lambda I - A)| = f_A(\lambda) \end{aligned}$$

בה"כ נניח A הפיכה, אזי:

$$\begin{aligned} AB &= A(P^{-1}AP) \\ BA &= (P^{-1}AP)A = (A^{-1}A)(P^{-1}AP)A = A^{-1}(A(P^{-1}AP))A = A^{-1}(AB)A \\ \Rightarrow BA &\approx AB \Rightarrow f_{AB}(x) = f_{BA}(x) \end{aligned}$$

3.11

$$T: V \rightarrow V$$

$$\dim V = n$$

תהי λ ע"ע עם ריבוי i ומ"ע ממימד j .

אזי $f_T(x) = (x - \lambda)^j P(x)$ עבור $P(x)$ פולינום ממעלה $n-i$.

יהיו $v_1, \dots, v_j$ הו"ע הפורשים את המ"ע המתאים לה. נשלימם לבסיס עבור V : $v_1, \dots, v_n$ ונקבל

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \ddots & \vdots & \# & \# & \# \\ \vdots & \ddots & \lambda & \# & \# & \# \\ & \dots & 0 & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow f_T(x) = (x - \lambda)^j q(x), \text{ where } q(x) \in F_{n-j}[x]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_j \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in F^{n-j \times n-j}}$

ולכן $f_T \mid (x - \lambda)^j$ ובסה"כ $j \leq i$.

3.15

הטעות נובעת מהתייחסות למט' הסקלרית xI ככפל בין מטריצות. למעשה בהצבת A במקום x היא אמורה להופיע בכל רכיב באלכסון וליצור מטריצת בלוקים אלכסונית.

3.18

א. ראה קובץ באתר

$$5x^5+3x^3-x^2+7=0$$

$$\Downarrow$$

$$x^5+\frac{3}{5}x^3-\frac{x^2}{5}+\frac{7}{5}=0\qquad\qquad\qquad\text{ב.}$$

$$\Downarrow$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-7/5&0&1/5&-3/5&0\end{pmatrix}$$

ג.בדומה ל-ב'

ד.

$$f_A=(x-1)(x-(1-i))(x-(1+i))=(x-1)((x-1)+i)((x-1)-i)=(x-1)((x-1)^2-i^2)=(x-1)((x-1)^2+1)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

ה.

$$\text{עבור } \lambda \text{ ע"ע. } \begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^k\end{pmatrix}$$

ו.

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\cdots&0\\ 0&\cdots 0&1&\cdots 0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ -a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\cdots&0\\ &\lambda_2&&\vdots\\ &&\ddots&\\ 0&\cdots&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

*פ"א פולינום אופייני, פ"מ פולינום מינימלי

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

האם היא ניתנת לשילוש? אם כן מצא את המשולשית לה היא דומה

2. הוכח שכל מט' אידמפוטנטית דומה למט' אלכסונית.

ע"מ 91, 5.4:

א. הוכח שלמטריצות B, A דומות אותו פ"מ
ב. הוכח שאם A או B הפיכות אז הפ"מ של AB ושל BA זהים

ע"מ 91, 5.5:

מצא פ"מ עבור המט' הבאות לפי האלגוריתם למציאתו (משעור קודם), כלומר, לא ע"י הפ"א.

$$a, b \neq 0 \quad \text{א.} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

(זיכרו, הפולינום המתוקן המתאים לכל פולינום במאפס גם שייך למאפס)

ע"מ 92, 5.10:

$$A \in \text{Mat}_n(F)$$

$$\text{הוכח: } f_A(x) \mid m_A^n(x)$$

ע"מ 92, 5.12:

$$A \in \text{Mat}_n(F)$$

$$M_A(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

הוכח שהמטריצה $f(A)$ הפיכה

(רמז: השתמש בעובדה ש A מתאפסת על הפ"מ שלה ע"מ לפשט את $f(A)$ וזכור שמט' הפיכה עם הדט' שלה שונה מאפס)

ע"מ 93, 5.14:

השתמש בפ"א כדי למצוא פ"מ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ע"מ 93, 5.15:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מצא M_A ובעזרתו A^{-1}
(רמז: זיכרו מה קורה ל M_A כאשר נציב בו את A ובודדו משם את I)

ע"מ 93, 5.16:

$$A \in \text{Mat}_n(F)$$

$$M_A(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

הוכח שהבאים שקולים:

א. A רגולרית ב. 0 איננו ע"ע של A ג. $a_0 \neq 0$

ע"מ 94, 5.22:

$$A \in \text{Mat}_n(F) \text{ מטריצה אידמפוטנטית } (A^2 = A)$$

מצא את הע"ע של A, הראה שהפ"א מתפרק לגורמים לנאריים, מצא פ"מ של A, ותאר את $\text{tr}(A)$

113-88-תרגיל 6-פיתרון:

*פ"א פולינום אופייני, פ"מ פולינום מינימלי

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

האם היא ניתנת לשילוש? אם כן מצא את המשולשית לה היא דומה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2. הוכח שכל מט' אידמפוטנטית דומה למט' אלכסונית.

$$A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = A(A - I) = 0 \Rightarrow f_A = x^a(x-1)^b : M_A = x(x-1)$$

לכן A לכסינה

ע"מ 93, 5.16:

$$A \in Mat_n(F)$$

$$M_A(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

הוכח שהבאים שקולים:

א. A רגולרית ב. 0 איננו ע"ע של A ג. $a_0 \neq 0$

פיתרון:

א ← ב: הוכחנו

$$M_A(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i = a_m x^m + \dots + a_1 x^1 = x(a_m x^{m-1} + \dots + a_1) \text{ אזי } a_0 = 0 \text{ נניח ג:}$$

כלומר 0 שורש של הפ"מ לכן 0 שורש של הפ"א בסתירה לנתון. אזי $a_0 \neq 0$

ג ← א: נניח בשלילה ש A סינגולרית אזי 0 ע"ע של A אזי 0 שורש של הפ"א ולכן של הפ"מ, אזי הפ"מ הוא מהצורה: $P_i(x) \in F[x]$, $M_A(x) = xP_i(x)$, ולכן אין בו חזקת 0 של x בסתירה לנתון. אזי A רגולרית

ע"מ 94, 5.22:

$$A \in Mat_n(F) \text{ מטריצה אידמפוטנטית } (A^2 = A)$$

מצא את הע"ע של A, הראה שהפ"א מתפרק לגורמים לנאריים, מצא פ"מ של A, ותאר את $\text{tr}(A)$

פיתרון:

ע"מ למצוא ע"ע נבדוק איפה הפ"א מתאפס, לכן:

$$0 = |xI - A| = |xI - A^2|$$

מצד שני הוכחנו:

$$0 = |x^2 I - A^2|$$

לכן, לכל x ע"ע :

$$x^2 = x$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - x = x(x-1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f_A(x) = x^\alpha (x-1)^\beta$$

$$M_A(x) = x(x-1)$$

$$\text{tr}(A) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \beta$$

ע"מ 93, 5.14:

השתמש בפ"א כדי למצוא פ"מ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

פיתרון:

$$f_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \Rightarrow x_1 = 1, x_{2,3} = 2, x_{4,5} = 3$$

$$M_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2 \quad \text{בחישוב:}$$

ע"מ 93, 5.15:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מצא M_A^{-1} ובעזרתו

(רמז: זיכרו מה קורה ל M_A כאשר נציב בו את A ובודדו משם את I)

פיתרון:

$$f_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

לכן האפשרויות לפ"מ הן: $(x-1)^2(x-2), (x-1)(x-2)$
נבדוק את הדרגה הנמוכה ראשית:

$$(A - I)(A - 2I) = 0$$

$\Downarrow$

$$M_A(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

נחפש את ההפוכה ל A . ידוע ש A מתאפסת על הפ"מ שלה, אזי:

$$M_A(A) = 0$$

$\Downarrow$

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

$\Downarrow$

$$A^2 - 3A = -2I$$

$\Downarrow$

$$A(A - 3I) = -2I$$

$\Downarrow$

$$A \left[-\frac{1}{2}(A - 3I) \right] = I$$

$\Downarrow$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ע"מ 92, 5.12:

$$A \in \text{Mat}_n(F)$$

$$M_A(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

הוכח שהמטריצה $f(A)$ הפיכה

(רמז: השתמש בעובדה ש A מתאפסת על הפ"מ שלה ע"מ לפשט את $f(A)$ וזכור שמט' הפיכה עם הדט' שלה שונה מאפס)

פיתרון:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = M_A(x) + 6x + 2$$

$\Downarrow$

$$f(A) = M_A(A) + 6A + 2I = 6A + 2I$$

נניח בשלילה ש A לא הפיכה, אזי:

$$0 = |f(A)| = |6A + 2I| = 6^n \left| A + \frac{1}{3}I \right|$$

↓

$$0 = \left| A + \frac{1}{3}I \right|$$

↓

$\frac{1}{3}$ הינו שורש של הפ"א בסתירה לכך שאיננו שורש של הפ"מ.
אזי A הפיכה.

ע"מ 92, 5.10:

$$A \in \text{Mat}_n(F)$$

הוכח: $f_A(x) \mid m_A^n(x)$

ראו קובץ של דר' צבאן באתר

ע"מ 91, 5.5:

מצא פ"מ עבור המט' הבאות לפי האלגוריתם למציאתו (משעור קודם), כלומר, לא ע"י הפ"א.

$$\text{א. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

(זיכרו, הפולינום המתוקן המתאים לכל פולינום במאפס גם שייד למאפס)
פיתרון:
א.

$$M_A(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$M_A(A) = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I = 0$$

$$a_2 \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

↓

$$\begin{cases} a_2 \cdot 7 + a_1 + a_0 = 0 \\ a_2 \cdot 10 + a_1 \cdot 2 = 0 \\ a_2 \cdot 15 + a_1 \cdot 3 = 0 \\ a_2 \cdot 22 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -5a_2, \quad a_0 = -2a_2$$

↓

$$f \in N_A, f(x) = a_2 x^2 - 5a_2 x - 2a_2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 5x - 2 = \left(x - \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$M_A(x) = x^2 - 5x - 2$$

ב.

$$M_A(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$M_A(A) = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I = 0$$

$$a_2 \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_2 \cdot a^2 + a_1 \cdot a + a_0 = 0 \\ 2a_2 \cdot ab + a_1 \cdot b = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2a_2 a, \quad a_0 = a_2 a^2$$

$\Downarrow$

$$f \in N_A, f(x) = a_2 x^2 - 2a_2 ax + a_2 a^2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \Rightarrow$$

$$M_A(x) = (x-a)^2 \quad \forall \quad (x-a)$$

$$A - aI \neq 0 \Rightarrow M_A(x) = (x-a)^2$$

ע"מ 91, 5.4:

א. הוכח שלמטרירות B, A דומות אותו פ"מ
ב. הוכח שאם A או B הפיכות אז הפ"מ של AB ושל BA זהים

פיתרון:

א.

$$A \approx B \Rightarrow \exists P: A = PBP^{-1}$$

$\Downarrow$

$$0 = M_A(A) = M_A(PBP^{-1}) = PM_A(B)P^{-1} \Rightarrow 0 = M_A(B) \Rightarrow M_A \in N_B$$

$$(0 = M_B(B) = M_B(P^{-1}AP) = P^{-1}M_B(A)P \Rightarrow 0 = M_B(A) \Rightarrow M_B \in N_A, \text{ (ובהתאמה)})$$

לכן M_A חייב להיות מינימלי ב N_B (ובהתאמה: M_B חייב להיות מינימלי ב N_A) אחרת הוא לא

יהיה מינימלי ב N_A (ובהתאמה: תיפגע מינימליות M_B ב N_B)

ולכן $M_B = M_A$

ב. הוכחנו בעבר כי AB דומה ל BA ולכן יש להן אותו פ"מ לפי סעיף א

113-88-תרגיל 7:

ע"מ 95, תרגילים: 1.2, 1.4, 1.6, 1.9, 1.13

אלגברה לינארית 2

תרגיל 7 - פתרון

ע"מ 95 – תרגיל 1.2:

יהי $v \in V$ אזי מתקיים $\langle v, v \rangle = 0$ ומצד שני $\langle \vec{0}, v \rangle = \overline{\langle v, \vec{0} \rangle} = \overline{0} = 0$.

ע"מ 95 – תרגיל 1.4:

$$א. \langle (1 \ 2 \ 3), (-1 \ -2 \ -3) \rangle = 1(-1) + 2(-2) + 3(-3) = -1 - 4 - 9 = -14$$

$$ב. \left\langle \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}^* \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 7 \end{pmatrix} = 8$$

$$ג. \langle f(x), g(x) \rangle = \int_{a=0}^{b=1} (x^2 + 2x + 3)(x - 2) dx = \int_0^1 (x^3 - x - 6) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 6x \right|_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 \right) - 0 = -6\frac{1}{4}$$

ע"מ 96 – תרגיל 1.6:

$$\langle (x_1 \ x_2), (y_1 \ y_2) \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + \alpha x_2 y_2 = (x_1 \ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & \alpha \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ובכיתה ראינו שהיא מ"פ אם ורק אם $|A| > 0 \wedge a_{11}, a_{22} > 0 \wedge A = A^t$.
המטריצה שלנו היא סימטרית ולכן נותר לדרוש כי $(\alpha - 9 > 0) \wedge (1 > 0, \alpha > 0)$, ולפיכך
המ"פ הנתונה היא אכן מ"פ כאשר $\alpha > 9$.

ע"מ 96 – תרגיל 1.9:

$$א. \text{ נתון } A = (a_{kh}) = (\langle e_k, e_h \rangle), k, h = 1, \dots, n \text{ ויהיו } u = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, v = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$$

$$\text{אזי: } \langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j \rangle \text{ ומצד שני}$$

$$\begin{aligned} vAu^* &= \left(\sum_{i=1}^n \beta_i e_i \right) (\langle e_k, e_h \rangle) \left(\sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} e_j^t \right) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i e_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \langle e_k, e_j \rangle \overline{\alpha_j} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i e_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} \langle e_k, e_j \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j \rangle \end{aligned}$$

$$ב. A = A^* \text{ ולכן } a_{kh} = \langle e_k, e_h \rangle = \overline{\langle e_h, e_k \rangle} = \overline{a_{hk}}.$$

$$\text{כיוון שלכל } i \text{ אז } e_i \neq 0 \text{ אז } a_{ii} = \langle e_i, e_i \rangle > 0$$

ג. עבור $\alpha = 5$ בשאלה 1.6 נקבל כי $\langle v, u \rangle = vAu^t$ אינה מ"פ.

ע"מ 96 – תרגיל 1.13:

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rangle &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^4 \langle v_i, v_i \rangle + \sum_{i=1}^4 \sum_{j \neq i}^4 \langle v_i, v_j \rangle \\ &= 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

ולפי אי-שליליות נסיק כי $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$.

3.1 תרגיל. הוכח שלכל וקטור $v \neq 0$, הוקטור $\tilde{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$ הוא נורמלי.

4.1 תרגיל. בדוק אילו מזוגות הוקטורים הבאים מאונכים זה לזה:

א. $(0, 1, 0, 2), (100, 0, -999, 0)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

ב. $(1, i), (1, i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

ג. $(1, i), (1, -i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

4.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מממד n , ותהא $B \subseteq V$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. B בסיס אורתונורמלי.

ב. B קב' אורתונ' מגודל n .

4.9 תרגיל. הגדר (ישרות) על $V = \mathbb{R}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך ש $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ יהווה בסיס אורתונורמלי לגבי מכפלה זאת.

4.16 תרגיל. א. הוכח שלכל מרחב וקטורי מממד סופי יש בסיס אורתונורמלי.

ב. הוכח שניתן להשלים כל קבוצה אורתונורמלית לבסיס אורתונורמלי של המרחב.

5.4 תרגיל. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר U, W תת-מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V :

א. $(U + W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

ב. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

ג. $(U + W)^\perp = (U \cap W)^\perp$.

5.7 תרגיל. תהא $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V . הוכח שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle v_i \in S^\perp$$

5.8 תרגיל. תהא $S = \{(1, -1, 1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ (עם האכפלה הפנימית הסטנדרטית). מצא בסיס אורתונורמלי

ל $S^\perp$.

5.15 תרגיל. הוכח או הפרך את הטענה הבאה (צג רעיון של דני): יהא V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $U, W \subseteq V$, כך ש $U \oplus W = V$. אזי $U^\perp = W$.

$$1. \text{ נתון: } S = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

א. בדוק ש S קבוצה ניצבת ושהיא בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

ב. בטאו את הווקטור $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ כצירוף ליניארי של הווקטורים ב- S .

2. הטילו את הווקטור $\mathbf{b}$ על הישר דרך $\mathbf{a}$ לקבל ווקטור ההיטל $\mathbf{p}$. בדקו ש-

$$\mathbf{e} = \mathbf{p} - \mathbf{b} \text{ הוא ניצב ל-}\mathbf{a}.$$

א. $\mathbf{a} = (1, 2, 2), \mathbf{b} = (1, 1, 1)$ ב. $\mathbf{a} = (1, 2, 3, -4), \mathbf{b} = (1, 2, 1, 2)$

3. העביר את הקבוצה $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ לבסיס ניצב של $\mathbb{R}^3$ בשימוש

השיטה שהצגנו בסוף השיעור (השיטה נקראת "גרם-שמידט").

4. העבר את הקבוצה $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ לקבוצה ניצבת T ב- $\mathbb{R}^3$ כך

ש $\text{Span } S = \text{Span } T$. כאן $\text{Span } S = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. מה הצורה של

$\text{Span } S$, הפורש של הווקטורים. בשימוש הנוסחאות מהכיתה מצא c_1, c_2 כך

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \text{ש}$$

3.1 תרגיל. הוכח שלכל וקטור $v \neq 0$, הוקטור $\tilde{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$ הוא נורמלי.

$$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = 1 \text{ ז"ל}$$

$$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \|v\|^2 = 1$$

4.1 תרגיל. בדוק אילו מזוגות הוקטורים הבאים מאונכים זה לזה:

א. $(0, 1, 0, 2), (100, 0, -999, 0)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

ב. $(1, i), (1, i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

ג. $(1, i), (1, -i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

א.

$$\langle (0 \ 1 \ 0 \ 2), (100 \ 0 \ -999 \ 0) \rangle = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0 \ 1 \ 0 \ 2) \perp (100 \ 0 \ -999 \ 0)$$

ב.

$$\langle (1 \ i), (1 \ i) \rangle = 1 \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{i} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1 \ i) \not\perp (1 \ i)$$

ג.

$$\langle (1 \ i), (1 \ -i) \rangle = 1 \cdot \bar{1} + i \cdot \overline{-i} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow (1 \ i) \perp (1 \ -i)$$

4.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מממד n , ותהא $B \subseteq V$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. B בסיס אורתונורמלי.

ב. B קב' אורתונ' מגודל n

B בסיס אורתונ' $\Leftrightarrow B$ בסיס וגם קב' אורתונ'

$B \Leftrightarrow$ קב' של n וקטורים בת"ל וגם קב' אורתונ' $B \Leftrightarrow$ קב' של n וקטורים וגם קב' אורתונ'

(כי B אורתונ' אז B בפרט אורתונ' וכפי שנלמד בכיתה זה כבר גורר שהיא קב' בת"ל ולכן התנאי כלול בתוכה ואין צורך לציין אותו שוב)

4.9 תרגיל. הגדר (ישרות) על $V = \mathbb{R}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך ש $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ יהווה בסיס אורתונורמלי לגבי מכפלה זאת.

$$\left\langle \sum_{i=0}^n a_i x^i, \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

↓

אם החזקה של אחד מהם נמוכה יותר אז יתר המקדמים עד n הם פשוט 0

נראה שזו מ"פ:

$$\begin{aligned} 1. \left\langle \alpha \sum_{i=0}^n a_i x^i + \beta \sum_{i=0}^n c_i x^i, \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^n \beta c_i x^i, \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n (\alpha a_i + \beta c_i) x^i, \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta c_i) b_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i b_i + \beta \sum_{i=1}^n c_i b_i = \alpha \left\langle \sum_{i=0}^n a_i x^i, \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\rangle + \beta \left\langle \sum_{i=0}^n c_i x^i, \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\rangle \end{aligned}$$

$$2. \left\langle \sum_{i=0}^n a_i x^i, \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n b_i a_i = \left\langle \sum_{i=0}^n b_i x^i, \sum_{i=0}^n a_i x^i \right\rangle$$

$$3. \left\langle \sum_{i=0}^n a_i x^i, \sum_{i=0}^n a_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0. \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \quad a_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0.$$

כמו כן נראה אורתונורמליות:

$$\forall i \neq j \quad \langle x^i, x^j \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\forall i \quad \langle x^i, x^i \rangle = 1 \cdot 1 = 1$$

4.16 תרגיל. א. הוכח שלכל מרחב וקטורי ממימד סופי יש בסיס אורתונורמלי.
 ב. הוכח שניתן להשלים כל קבוצה אורתונורמלית לבסיס אורתונורמלי של המרחב.

5.4 תרגיל. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר U, W תת-מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V :

א. $(U + W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

ב. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

ג. $(U + W)^\perp = (U \cap W)^\perp$.

א. הפרכה:

$$(\{0\} + V)^\perp = V^\perp$$

$$\{0\}^\perp + V^\perp = V + \{0\} = V$$

ב. הוכחה:

$$\supseteq: v \in U^\perp \cap W^\perp \Rightarrow v \in U^\perp \wedge v \in W^\perp \Rightarrow \begin{cases} \forall u \in U & \langle v, u \rangle = 0 \\ \forall w \in W & \langle v, w \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall u + w \in U + W \quad \langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v \in (U + W)^\perp$$

$$\subseteq: v \in (U + W)^\perp \Rightarrow \forall u + w \in U + W \quad \langle v, u + w \rangle = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{בפרט עבור } w = 0 \in W \\ \langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle = 0 \Rightarrow \forall u \in U \quad \langle v, u \rangle = 0 \Rightarrow v \in U^\perp \\ \text{ובפרט עבור } u = 0 \in U \\ \langle v, u + w \rangle = \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow \forall w \in W \quad \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v \in W^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow v \in U^\perp \cap W^\perp$$

ג. הפרכה:

$$(\{0\} + V)^\perp = V^\perp$$

$$(\{0\} \cap V)^\perp = \{0\}^\perp = V$$

5.7 תרגיל. תהא $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V . הוכח שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle v_i \in S^\perp$$

$$\forall v_j \in S \left\langle v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle v_i, v_j \right\rangle = \langle v, v_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle \langle v_i, v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \langle v, v_j \rangle (0 + \dots + 0 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{when } i=j}}{1} + 0 + \dots + 0) =$$

$$\langle v, v_j \rangle - \langle v, v_j \rangle = 0 \Rightarrow v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle v_i \in S^\perp$$

5.8 תרגיל. תהא $S = \{(1, -1, 1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ (עם האכפלה הפנימית הסטנדרטית). מצא בסיס אורתונורמלי

ל $S^\perp$.

$$S^\perp = \left\{ \vec{v} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : (a, b, c, d)(1, -1, 1, -1) = 0 \right\} = \left\{ \vec{v} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b + c - d = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \vec{v} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = b + d \right\} = \left\{ (a, b, c, a + c - b) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ברור שמרחב זה הוא ממימד 3 כנדרש, נחפש את הבסיס עבורו מתוך הבסיס הסטנדרטי. כלומר, נבדוק לאן $(a, b, c, a + c - b)$ שולח כל e_i :

$$e_1 \rightarrow (1, 0, 0, 1 + 0 - 0) = (1, 0, 0, 1) = b_1$$

$$e_2 \rightarrow (0, 1, 0, 0 + 0 - 1) = (0, 1, 0, -1) = b_2$$

$$e_3 \rightarrow (0, 0, 1, 0 + 1 - 0) = (0, 0, 1, 1) = b_3$$

ואכן

$$\left. \begin{aligned} &\forall (a,b,c,a+c-b) \in S^\perp \quad (a,b,c,a+c-b) = a \cdot b_1 + b \cdot b_2 + c \cdot b_3 \Rightarrow \text{span} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{independent} \end{aligned} \right\} \text{basis}$$

$$\forall i=1,2,3 \quad b_i \cdot (1,-1,1,-1) = 0 \Rightarrow \text{sp}\{b_i\}_{i=1}^3 = S^\perp$$

מתהליך גרם שמידט נהפוך את הבסיס לאורתוגל:

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1 = (1,0,0,1) \\ b'_2 &= b_2 - \frac{\langle b_2, b'_1 \rangle}{\|b'_1\|^2} b'_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2} \right) \\ b'_3 &= b_3 - \frac{\langle b_3, b'_1 \rangle}{\|b'_1\|^2} b'_1 - \frac{\langle b_3, b'_2 \rangle}{\|b'_2\|^2} b'_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

(בידקו אורתוגל ואל תשכחו לנרמל)

5.15 תרגיל. הוכח או הפוך את הטענה הבאה (35 רציון 82 דנ): יהא V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו

$$U, W \subseteq V, \quad U^\perp = W \quad \text{כך ש } U \oplus W = V \quad \text{אזי } U^\perp = W$$

בוודאי שהפרכה:

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$U = \{y=0\}$$

$$W = \{y=x\}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} +: \quad &\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y) = \underbrace{(x-y,0)}_{\in U} + \underbrace{(y,y)}_{\in W} \\ \cap: \quad &\text{if } (x,y) \in U \cap W \Rightarrow y=0 \wedge x=y \Rightarrow (x,y) = (0,0) \Rightarrow U \cap W = \{0\} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} +: \quad \\ \cap: \quad \end{aligned}} \right\} \Rightarrow U \oplus W = V$$

$$U^\perp = \{x=0\} \neq W$$

$$1. \text{ נתון: } S = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

א. בדוק ש S קבוצה ניצבת ושהיא בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

ב. בטאו את הווקטור $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ כצירוף ליניארי של הווקטורים ב- S .

2. הטילו את הווקטור $\mathbf{b}$ על הישר דרך $\mathbf{a}$ לקבל ווקטור ההיטל $\mathbf{p}$. בדקו ש-

$$\mathbf{e} = \mathbf{p} - \mathbf{b} \text{ הוא ניצב ל-}\mathbf{a}.$$

א. $\mathbf{a} = (1, 2, 2), \mathbf{b} = (1, 1, 1)$ ב. $\mathbf{a} = (1, 2, 2), \mathbf{b} = (1, -2, 3, -4)$

3. העביר את הקבוצה $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ לבסיס ניצב של $\mathbb{R}^3$ בשימוש

השיטה שהצגנו בסוף השיעור (השיטה נקראת "גרם-שמידט").

4. העבר את הקבוצה $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ לקבוצה ניצבת T ב- $\mathbb{R}^3$ כך

ש $\text{Span } S = \text{Span } T$. כאן $\text{Span } S = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. מה הצורה של

$\text{Span } S$, הפורש של הווקטורים. בשימוש הנוסחאות מהכיתה מצא c_1, c_2 כך

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \text{ש}$$

פיתרונות 1-4:

א(1)

$$\text{קב' אורתוגונלית} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1+0+1=0 \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2+4-2=0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2+0-2=0 \end{cases} S$$

S קב' בת"ל של 3 וקטורים ב $\mathbb{R}^3$
ובסה"כ S בסיס אורתוגונלי ל $\mathbb{R}^3$

ב.

$$\text{לפי: } y = \frac{yu_1}{u_1^2}u_1 + \frac{yu_2}{u_2^2}u_2 + \frac{yu_3}{u_3^2}u_3$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2

$$proj(u,v)=\frac{u\cdot v}{|v|^2}v$$

.א

$$proj(b,a)=\frac{\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&2&2\end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\\frac{10}{9}\\\frac{10}{9}\end{pmatrix}$$

$$e=p-b=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\\frac{10}{9}\\\frac{10}{9}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\text{ניצבים} \iff \langle a,e \rangle = \begin{pmatrix}1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$$

.ב.

$$proj(b,a)=\frac{\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&2&1&2\end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{8}{5}\\-\frac{4}{5}\\-\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

$$e=p-b=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\\-1\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\\-1\frac{3}{5}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-3\frac{4}{5}\\2\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\text{דו"ר} \leftarrow \langle a,e \rangle = \begin{pmatrix}1&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-3\frac{4}{5}\\2\frac{2}{5}\end{pmatrix}=-1\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-3\frac{4}{5}+4\frac{4}{5}=0$$

(3

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{x}_2-\text{pr}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2-\frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

⋮

$$\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}-\text{pr}_{\text{Span}\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{k-1}\}}\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}-\frac{\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T\mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k\;\dots-\frac{\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

לכן:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{(2 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1 \ -1 \ 0)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{(3 \ -3 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{(1 \ 1 \ -2)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{(3 \ -3 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1 \ -1 \ 0)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

נבדוק אורתוגונליות:

$$(1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ 1 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(4)

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \text{pr}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^T \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

לכן:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

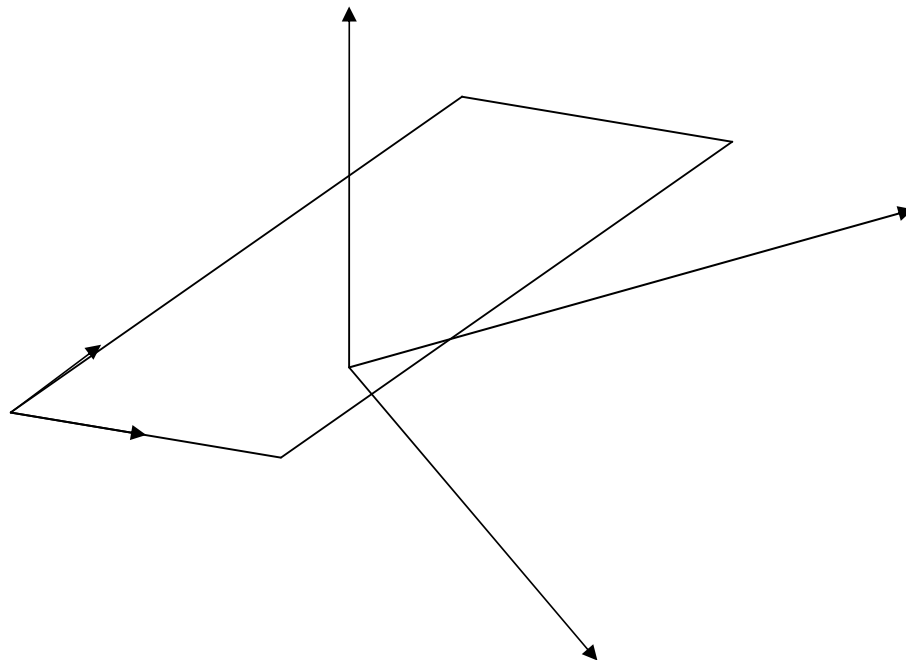
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(1 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{(3 \ 4 \ 5)^2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{4}{25} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

נבדוק אורתוגונליות:

$$(3 \ 4 \ 5) \begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{66 + 84 - 150}{25} = 0$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

המרחב $\text{span}S$ נפרש ע"י שני וקטורים בת"ל ב- $\mathbb{R}^3$ לכן צורתו מישור ב- $\mathbb{R}^3$:



(הציור להמחשה בלבד ואיננו מתחשב בכיווני הוקטורים הפרשים)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 4 & 1 & 17 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 4 & 1 & 17 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 0 & -1/3 & -3 \\ 0 & -2\frac{2}{3} & -8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 0 & -1/3 & -3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

איננו תלוי לנארית בוקטורים אלו, כלומר הוא איננו שייך למישור הנפרש על ידם.

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 17 \end{pmatrix}$$

דוגמא למציאת הצרופ הלנארי עבור וקטור שכן שייך:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 13 \\ 5 & -1 & 32 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & -2\frac{2}{3} & 18\frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$c_1 = 5, c_2 = -7$$

או, ע"י הנוסחאות מהכיתה (הנכונות לבסיס הניצב!):

$$c_1' = \frac{(8 \ 13 \ 32) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{(3 \ 4 \ 5)} = \frac{118}{25}$$

$$c_2' = \frac{(8 \ 13 \ 32) \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ -30 \end{pmatrix}}{\left(\frac{22}{25} \ \frac{21}{25} \ -\frac{30}{25}\right)^2} = -\frac{511}{73} = -7$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix} = \frac{118}{25} v_1 - 7v_2$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix} = \frac{118}{25} x_1 - 7\left(x_2 - \frac{x_2 x_1}{x_1^2} x_1\right) = \frac{118}{25} x_1 - 7x_2 + 7 \frac{x_2 x_1}{x_1^2} x_1 = \frac{118}{25} x_1 - 7x_2 + 7 \cdot \frac{1}{25} \cdot x_1 = 5x_1 - 7x_2$$

$\uparrow$ הגענו לאותה תוצאה.

113-88-תרגיל 9:

פונקציונאליים: ע"מ 1.6,1.10 :108

העתקה צמודה לסוגיה: ע"מ 2.1,2.4,2.5,2.8 :112

(1.6) נניח בשלילה ש $u \neq \alpha v$ אזי הם בת"ל וניתן להרחיבם לבסיס ל V . כעת נגדיר פונקציונל באופן הבא:

$$\text{לכל } w \text{ וקטור בסיס שונה מ- } v \quad \varphi(w) = 0 \quad \text{ועבור } v \quad \varphi(v) = 1$$

הפונקציונל הנ"ל לנארי וסותר את הנתון.

(1.10) א) הרכבת העתקות לינאריות היא העתקה לינארית.

ב)

$$\begin{aligned} T^*(\alpha\phi_1 + \phi_2) &= \varphi(T(\alpha\phi_1 + \phi_2)) = \varphi(aT(\phi_1) + T(\phi_2)) = \\ &= a\varphi(T(\phi_1)) + \varphi(T(\phi_2)) = aT^*(\phi_1) + T^*(\phi_2) \end{aligned}$$

$$[T_\alpha]^* = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = [T_\alpha] \quad (2.1)$$

(2.4) א) נסמן $T = A + iB$ כאשר B, A צל"ע. אזי

$$T^* = (A + iB)^* = A^* + (iB)^* = A^* - iB^* = A - iB$$

$$T - T^* = 2iB \rightarrow B = \frac{T - T^*}{2i} \quad \text{ו-} \quad T + T^* = 2A \rightarrow A = \frac{T + T^*}{2}$$

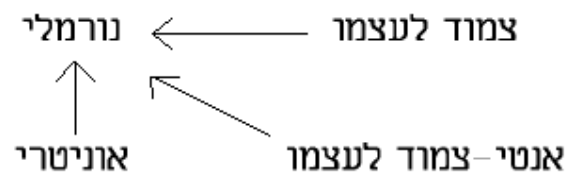
ב) נניח T נורמלי כלומר $TT^* = T^*T$. צ"ל כי $AB = BA$.

$$\begin{aligned} AB &= \frac{T + T^*}{2} \frac{T - T^*}{2i} = \frac{(iT + iT^*)(T - T^*)}{2i} \\ &= \frac{iT^2 - iTT^* + iT^*T - i(T^*)^2}{2i} = \frac{iT^2 - iT^*T + iTT^* - i(T^*)^2}{2i} \\ &= \frac{(T - T^*)(iT + iT^*)}{2i} = BA \end{aligned}$$

(2.5) באופן דומה לתרגיל הקודם, נסמן $T = X + Y$ כאשר X אופרטור צל"ע ו- Y אנטי-צל"ע. אזי:

$$T^* = X^* + Y^* = X - Y. \quad \text{נחבר ונחסר את שני השוויונות ונקבל} \quad X = \frac{T + T^*}{2}, Y = \frac{T - T^*}{2}$$

(2.8) א+ב)



הגרירות ברורות, למשל אנטי-צל"ע לנורמלי: מתקיים $T^* = -T$ וצ"ל כי $TT^* = T^*T$. אכן, $TT^* = T(-T) = -TT = T^*T$ כדרוש. באופן דומה לצל"ע, אניטרי.

נמצא למשל מטריצה נורמלית שאיננה אניטרית, צל"ע או אנטי צל"ע. נבחר $M = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$.

מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן M נורמלית. אך M לא שווה ל- M^* (לכן לא צל"ע), ולא ל- $-M^*$ (לכן לא אנטי צל"ע), וכמו כן M^* לא שווה ל- M^{-1} (לכן לא אניטרית).

ג) לפי הגרירות שראינו בסעיף א', ברור כי צל"ע חיתוך נורמלי = צל"ע, אנטי-צל"ע חיתוך נורמלי = אנטי צל"ע, אניטרי חיתוך נורמלי = אניטרי.

צמוד לעצמו וגם אנטי-צמוד לעצמו: $T = T^*, -T = T^* \rightarrow T = -T \rightarrow 2T = 0$ נקבל רק $T = 0$. שהמאפיין שלו לא 2 נקבל רק $T = 0$.

צל"ע וגם אניטרי: $T^* = T, T^* = T^{-1} \rightarrow T = T^{-1} \rightarrow T^2 = I$

אנטי צל"ע וגם אניטרי: $T^* = -T, T^* = T^{-1} \rightarrow T^{-1} = -T \rightarrow T^2 = -I$

113-88-תרגיל 10:

ע"מ 119:

3.23

ג3.24

3.27

3.30-המשך התרגיל

מבחן-2006 מועד ב:

א. תהי A מטריצה n על n מעל המרוכבים הרמיטית.

הוכיחו גרעין $A = A^2$ גרעין A^2

ב. תהי A מטריצה n על n מעל הממשיים. הוכיחו A אורתוג' אז גם $\text{adj}A$ אורתוג'.

שאלה שהופיעה כבונוס באותו מבחן(בדף זה היא שאלת חובה...):

תהי A מטריצה n על n מעל המרוכבים הרמיטית כך שהדט' שלה שלילי והעיקבה שלה חיובית. האם

A בהכרח מוגדרת חיובית?(כלומר $\langle Av, v \rangle \geq 0 \quad (\forall v \in V)$)

3.23. א. $\Leftarrow$: מהתירגול

$\Rightarrow$ T: נורמלית אז T לכסינה ונתון שהע"ע ממשיים. מההרצאה זה אומר שהנורמליות גוררת צל"ע.

ב. $\Leftarrow$ T: אוניטרית אזי

$$\lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle T^*Tv, v \rangle = \langle v, v \rangle$$

$\Downarrow$

$$|\lambda| = 1$$

$$\Rightarrow T: \text{נורמלית אזי } T \text{ לכסינה אזי } T \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$T^* \approx \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$TT^* \approx I$$

$\Downarrow$

$$TT^* = I$$

3.24:

$$T = -i(F - I)(F + I)^{-1} \quad \text{טענה:}$$

הוכחה:

מב':

$$F = (I + i(-i(F - I)(F + I)^{-1}))(I - i(-i(F - I)(F + I)^{-1}))^{-1}$$

$$F = (I + (F - I)(F + I)^{-1})(I - (F - I)(F + I)^{-1})^{-1}$$

$$(I - (F - I)(F + I)^{-1})F = (I + (F - I)(F + I)^{-1})$$

$$FI - I = F - I \quad \text{true}$$

3.27:

$$T \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D : C \text{ לכסינה אורתוגונלית מעל } C$$

$$\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j} \quad \text{נזכיר ש}$$

לכן:

$$D = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

3.30:

א. כיוון שני

$\Rightarrow$:

$$\|Tv\|^2 = \langle T^*Tv, v \rangle = \sum \alpha_i^2 \lambda_i^2 \langle v_i, v_i \rangle \leq \sum \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

מבחן 2006- מועד ב:

$$\begin{aligned} \subseteq: Av = 0 &\Rightarrow A^2v = AA v = A \cdot 0 = 0 \\ \supseteq: \langle Av, Av \rangle &= \langle A^*Av, v \rangle = \langle A^2v, v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0 \end{aligned} \text{ א.}$$

$$\begin{aligned} AadjA &= |A| I \\ adjA &= |A| A^{-1} \end{aligned} \text{ ב.}$$

A א"ג אזי ההופכי שלו א"ג ולכן ה adj א"ג

שאלה שהופיעה כבונוס באותו מבחן:

ל.א. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

עבודת הגשה לחנוכה: סכומים ישרים של כל דבר

22 בנובמבר 2010

קרא את החומר הבא, וענה על השאלות המובאות בו. את העבודה יש להגיש עד יום ג' שאחרי חנוכה. עבודה זו היא בנוסף לתרגילי הבית הרגילים.

1 סכום ישר של מטריצות

הגדרה: יהיו A, B מטריצות ריבועיות מעל אותו שדה (לאו דווקא מאותו סדר). $A \oplus B$ היא המטריצה הריבועית שניתן לכתוב בכתיב הבלוקים כך: $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. עבור מטריצות ריבועיות $A_1, A_2, \dots, A_k$ מעל אותו שדה (לאו דווקא מאותו סדר), נקבל

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k := \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & A_k \end{pmatrix}$$

כדי להתרגל להגדרה, שכנע את עצמך בעובדות הבאות (בהנתן שהמטריצות המחוברות/נכפולות זו לזו הן מאותו סדר):

$$1. (A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k) + (B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k) = (A_1 + B_1) \oplus (A_2 + B_2) \oplus \dots \oplus (A_k + B_k)$$

$$2. \alpha (A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k) = \alpha A_1 \oplus \alpha A_2 \oplus \dots \oplus \alpha A_k$$

$$3. (A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k) (B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k) = A_1 B_1 \oplus A_2 B_2 \oplus \dots \oplus A_k B_k$$

$$4. (A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k)^m = A_1^m \oplus A_2^m \oplus \dots \oplus A_k^m$$

$$5. f(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k) = f(A_1) \oplus f(A_2) \oplus \dots \oplus f(A_k), f(x) \in \mathbb{F}[x], \text{ לכל } f$$

$$6. \text{אם כל } A_i \text{ הפיכה, אז } (A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k)^{-1} = A_1^{-1} \oplus A_2^{-1} \oplus \dots \oplus A_k^{-1}$$

תרגיל 1. הוכח (באינדוקציה על k או ישירות):

$$|A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

ב. תהי $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$. הפולינום האופייני והמינימלי של A הם:

$$p_A(x) = p_{A_1}(x) \cdot p_{A_2}(x) \cdot \dots \cdot p_{A_k}(x)$$

$$m_A(x) = \text{lcm}(m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \dots, m_{A_k}(x))$$

2 סכום ישר של תת-מרחבים

הגדרה: יהיו V מרחב וקטורי, $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ תת-מרחבים. הסכום $W = U_1 + U_2 + \dots + U_k$ הוא ישר אם כל אחד מהסכומים המופיעים בו הוא ישר. פורמלית, $W = ((U_1 + U_2) + U_3) + \dots + U_k$, ואנו דורשים שלכל $i = 1, \dots, k-1$, $W = ((U_1 + U_2) + U_3) + \dots + U_k$ הסכום

$$(U_1 + \dots + U_i) + U_{i+1}$$

הוא ישר, או באופן שקול:

$$(U_1 + \dots + U_i) \cap U_{i+1} = \{\vec{0}\}$$

במקרה כזה, כותבים $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ ואומרים שזה פירוק של W לסכום ישר.

דוגמא: הסכום $\mathbb{R}^3 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} + \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} + \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ הוא ישר. באופן כללי, אם $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ בסיס של V , כך שהקבוצות $B_1, B_2, \dots, B_k$ זרות בזוגות (כלומר לכל i, j שונים, $B_i \cap B_j = \emptyset$), אז $V = \text{span } B_1 \oplus \text{span } B_2 \oplus \dots \oplus \text{span } B_k$ סכום ישר.

נשים לב שסכום ישר של שני תת-מרחבים, כמו שהגדרנו בסמסטר א', הוא מקרה פרטי של ההגדרה הנ"ל.

תרגיל 2. מצא מרחב וקטורי V ותת-מרחבים $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ כך שכל אחד מהסכומים $U_1 + U_2, U_2 + U_3, U_1 + U_3$ הוא ישר, אבל הסכום $U_1 + U_2 + U_3$ אינו ישר. (רמז: $V = \mathbb{R}^2$.)

תרגיל 3. יהי $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$. הוכח:

א. לכל $i = 1, \dots, k$ מתקיים $(U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) \cap U_i = \{\vec{0}\}$.

ב. לכל $\sigma \in S_k$, $W = U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$.

ג. לכל $w \in W$ יש הצגה יחידה כסכום $w = u_1 + \dots + u_k$ כך ש $u_i \in U_i$ לכל $i = 1, \dots, k$.

הערה: קל לראות שגם ההיפך נכון, כלומר כל אחת מהתכונות המובאות בסעיפי תרגיל 3 גוררת שהסכום הוא ישר.

תרגיל 4. יהיו $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$, ולכל $i = 1, \dots, k$ יהי B_i בסיס של U_i . נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. הוכח ש B בסיס של V .

3 קשרים ביניהם

הגדרה: יהיו $T : V \rightarrow V$ אופרטור, $U \subseteq V$ תת-מרחב. נזכור את ההגדרה ממתמטיקה בדידה:

$$T[U] := \{T(u) : u \in U\}$$

במילים אחרות, $T[U] = \text{im}(T|_U)$.

נאמר ש U אינויריאנטי תחת T אם $T[U] \subseteq U$. כלומר, לכל $u \in U$ מתקיים $T(u) \in U$.

אם U אינויריאנטי תחת T , אז הצמצום של T ל U הוא אופרטור, כלומר $T|_U : U \rightarrow U$.

תרגיל 5. יהיו $T : V \rightarrow V$ אופרטור, ו $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינויריאנטיים תחת T . הוכח (באינדוקציה על k או באופן ישיר):

א. $\ker(T) = \ker(T|_{U_1}) \oplus \ker(T|_{U_2}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$.

ב. $\text{im}(T) = \text{im}(T|_{U_1}) \oplus \text{im}(T|_{U_2}) \oplus \dots \oplus \text{im}(T|_{U_k})$.

תרגיל 6. יהיו $T : V \rightarrow V$ אופרטור, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינויריאנטיים תחת T , ולכל $i = 1, \dots, k$ יהי B_i בסיס של U_i . נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. הוכח (באינדוקציה על k או באופן ישיר):

$$[T]_B = [T|_{U_1}]_{B_1} \oplus [T|_{U_2}]_{B_2} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k} = \begin{pmatrix} [T|_{U_1}]_{B_1} & O & \dots & O \\ O & [T|_{U_2}]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & [T|_{U_k}]_{B_k} \end{pmatrix}$$

4 סעיף רשות: סכום ישר של אופרטורים

הגדרה: יהי $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$, ולכל $i = 1, \dots, k$ יהי $T_i : U_i \rightarrow U_i$ אופרטור. נגדיר $T : V \rightarrow V$ בצורה הבאה: לכל $v \in V$, יש הצגה יחידה $v = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ כך ש $u_i \in U_i$ לכל $i = 1, \dots, k$. נגדיר

$$T(v) := T_1(u_1) + T_2(u_2) + \dots + T_k(u_k)$$

הפונקציה הזו T תסומן $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k$.

תרגיל 7. בסימונים הנ"ל, ובעזרת כל מה שהוכח לעיל, הוכח:

א. $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k$ אופרטור.

ב. $\text{im}(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k) = \text{im}(T_1) \oplus \text{im}(T_2) \oplus \dots \oplus \text{im}(T_k)$.

ג. $\text{ker}(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k) = \text{ker}(T_1) \oplus \text{ker}(T_2) \oplus \dots \oplus \text{ker}(T_k)$.

תרגיל 8. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינוריאנטים תחת T .

נסמן $T_i = T|_{U_i}$.

א. הוכח: $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k$.

ב. לכל $i = 1, \dots, k$, יהי B_i בסיס של U_i . נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. הוכח:

$$[T]_B = [T_1]_{B_1} \oplus [T_2]_{B_2} \oplus \dots \oplus [T_k]_{B_k} = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & O & \dots & O \\ O & [T_2]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & [T_k]_{B_k} \end{pmatrix}$$

"אלגברה ליניארית 2"

עבודת הגשה לחנוכה:

סכומים ישרים של כל דבר

שם מגיש: אלדבח לידור

ת.ז: 311324362

שם מתרגל: דורון פרלמן

שם מרצה: ד"ר בועז צבאן

1. יהיו $A_1, \dots, A_n$ מטריצות ריבועיות מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. (נסמן את סדרן $l_1, \dots, l_n$ בהתאמה)

א. נוכיח את הטענה באינדוקציה:

עבור 1: $|A_1| = |A_1|$ מתקיים.

עבור 2: תהי $B = A_1 \oplus A_2$ נראה כי $|B| = |A_1| \cdot |A_2|$ (נשתמש בהגדרת הסכום הישר של מטריצות)

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_{l_1+l_2}} \text{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)} =$$

$$\text{ענה כיוון ש } B = A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ אזי}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l_1 : l_1 + 1 \leq \sigma(i) \leq n \Rightarrow [B]_{i\sigma(i)} = 0$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, l_1 + 1 \leq i \leq n : 1 \leq \sigma(i) \leq l_1 \Rightarrow [B]_{i\sigma(i)} = 0$$

$$\text{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)} \text{ לא מתאפס הן אילו המקיימות}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l_1 : 1 \leq \sigma(i) \leq l_1, \forall i \in \mathbb{N}, l_1 + 1 \leq i \leq n : l_1 + 1 \leq \sigma(i) \leq n$$

$$\text{ענה נשים לב כי } \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l_1, 1 \leq \sigma(i) \leq l_1 : [B]_{i\sigma(i)} = [A_1]_{i\sigma(i)}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, l_1 + 1 \leq i \leq n, l_1 + 1 \leq \sigma(i) \leq n : [B]_{i\sigma(i)} = [A_2]_{i\sigma(i)}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{l_1+l_2}} \text{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_{l_1}, \tau \in S_{l_2}} \text{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot [A_1]_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot [A_1]_{l_1\sigma(l_1)} \cdot [A_2]_{1\tau(1)} \cdot \dots \cdot [A_2]_{l_2\tau(l_2)}$$

$$\text{נשתמש ב } \text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$$

$$\sum_{\sigma \in S_{l_1}, \tau \in S_{l_2}} \text{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot [A_1]_{1\sigma(1)} \cdot [A_1]_{l_1\sigma(l_1)} \cdot \dots \cdot [A_2]_{1\tau(1)} \cdot \dots \cdot [A_2]_{l_2\tau(l_2)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_{l_1}, \tau \in S_{l_2}} \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) \cdot [A_1]_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot [A_1]_{l_1\sigma(l_1)} \cdot [A_2]_{1\tau(1)} \cdot \dots \cdot [A_2]_{l_2\tau(l_2)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_{l_1}, \tau \in S_{l_2}} \text{sgn}(\sigma) \cdot [A_1]_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot [A_1]_{l_1\sigma(l_1)} \cdot \text{sgn}(\tau) \cdot [A_2]_{1\tau(1)} \cdot \dots \cdot [A_2]_{l_2\tau(l_2)} =$$

$$\left(\sum_{\sigma \in S_{l_1}} \text{sgn}(\sigma) \cdot [A_1]_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot [A_1]_{l_1\sigma(l_1)} \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in S_{l_2}} \text{sgn}(\tau) \cdot [A_2]_{1\tau(1)} \cdot \dots \cdot [A_2]_{l_2\tau(l_2)} \right) =$$

וע"פ הגדרת הדטרמיננטה:

$$\left(\sum_{\sigma \in S_{l_1}} \text{sgn}(\sigma) \cdot [A_1]_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot [A_1]_{l_1\sigma(l_1)} \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in S_{l_2}} \text{sgn}(\tau) \cdot [A_2]_{1\tau(1)} \cdot \dots \cdot [A_2]_{l_2\tau(l_2)} \right) = |A_1| \cdot |A_2|$$

$$\text{ובסה"כ } |B| = |A_1| \cdot |A_2|$$

שלב המעבר: נניח נכונות הטענה עבור n טבעי כלשהו, כלומר

$$|A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

$$|A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$$

$$|A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus A_{n+1}| = |(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n) \oplus A_{n+1}| =$$

ע"פ מה שהוכחנו עבור $n=2$:

$$|(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n) \oplus A_{n+1}| = |A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n| \cdot |A_{n+1}|$$

וע"פ הנחת האינדוקציה:

$$|A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n| \cdot |A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$$

$$|A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$$

ובסה"כ הראינו נכונות הטענה עבור 1 ושארם היא נכונה עבור n טבעי כלשהו אזי היא נכונה עבור $n+1$ ולכן ע"ס אקסיומת האינדוקציה היא נכונה לכל n טבעי.

ב. טענת עזר

יהיו מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ופולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. $p(A) = 0$ אמ"מ $m_A(x) | p(x)$.

הוכחה: יהיו מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ופולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$.

$\Leftarrow$ נניח $p(A) = 0$. ניתן לכתוב $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ($a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$) ולכן

$$m_A(x) = b_0 + b_1x + \dots + x^k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{כמו כן נסמן} \quad p(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n = 0$$

(הפולינום המינימאלי הינו מתוקן), אזי על פי הגדרה $m_A(A) = b_0 + b_1A + \dots + b_kA^k = 0$ כמו

כן נשים לב כי על פי הגדרת הפולינום המינימאלי $q_n(x) = a_nx^{n-k}$, $k \leq n$, לכן פולינום,

$$\text{נביט ב } p_1(x) = p(x) - m_A(x)q_n(x)$$

$$p_1(x) = p(x) - m_A(x)q_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n - (b_0 + b_1x + \dots + x^k)(a_nx^{n-k}) =$$

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n - b_0a_nx^{n-k} - b_1a_nx^{n-k+1} - \dots - a_nx^n =$$

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} - b_0a_nx^{n-k} - b_1a_nx^{n-k+1} - \dots - b_{k-1}a_nx^{n-1} =$$

$$c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} \quad (\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : c_i \in \mathbb{F})$$

$$\text{כמו כן } c_0 + c_1A + \dots + c_{n-1}A^{n-1} = p_1(A) = p(A) - m_A(A) \cdot q_n(A) = 0 - 0 \cdot q_n(A) = 0$$

ומכך נובע על פי הגדרת הפולינום המינימאלי כי $\deg(p_1(x)) \geq k$ או $p_1(x) = 0$ אם

$$p_1(x) = 0 \quad \text{אזי} \quad p(x) = m_A(x) \cdot q_n(x) \Leftarrow 0 = p(x) - m_A(x) \cdot q_n(x) \quad \text{ולכן}$$

$m_A(x) | p(x)$ כדרש. אם $\deg(p_1(x)) \geq k$, כיוון ש $p_1(A) = 0$ נוכל להפעיל על $p_1(x)$

את אותו תהליך. נגיע או ל $p_1(x) = m_A(x) \cdot q_{n-1}(x) \Leftarrow 0 = p_1(x) - m_A(x) \cdot q_{n-1}(x)$ ואז נוכל

לכתוב $p(x) = m_A(x) \cdot (q_n(x) + q_{n-1}(x)) \Leftarrow m_A(x) \cdot q_{n-1}(x) = p(x) - m_A(x) \cdot q_n(x)$

ומכך יבצע $m_A(x) | p(x)$ כדרש. אחרת מקבל פולינום $p_2(x)$ עבורו $p_2(A) = 0$, וכמובן

מעלתו קטנה ממעלת $p_1(x)$ (מאופן בנייתו) וכן $\deg(p_2(x)) \geq k$, ונוכל לחזור על

התהליך, כאשר במידה ונגיע לפולינום האפס נקבל כי $m_A(x) | p(x)$.

במידה ולא נגיע לפולינום האפס נמשיך בתהליך עד שנגיע לפולינום $p_i(x)$ אשר מעלתו k

(נגיע בסופו של דבר למעלה k שכן התחלנו ממעלה $k \leq n$, ובכל שלב אנו מחסרים לפחות

1 מן המעלה, לא נרד ממעלת k כי $p_i(A) = 0$ ואם מעלתו קטנה מאז נקבל סתירה להגדרת

הפולינום המינימאלי), ואשר נבנה באופן

$$p_i(x) = p(x) - m_A(x)(q_n(x) + \dots + q_l(x)) \quad (l \in \mathbb{N}) \quad \text{ומקיים} \quad p_i(A) = 0, \quad \text{נתקנו לפולינום}$$

$$p_i^*(x) \quad \text{ויתקיים} \quad (0 \neq c \in \mathbb{R}) \quad c \cdot p_i^*(x) = p_i(x) = p(x) - m_A(x)(q_n(x) + \dots + q_l(x))$$

אך $p_i^*(x)$ פולינום מתוקן ממעלה k המקיים $p_i^*(A) = \frac{1}{c} p_i(A) = 0$. מכך נובע על פי

יחידות הפולינום המינימאלי כי $p_i^*(x) = m_A(x)$, נציב ב

$$c \cdot p_i^*(x) = p(x) - m_A(x)(q_n(x) + \dots + q_l(x))$$

$$c \cdot m_A(x) = p(x) - m_A(x)(q_n(x) + \dots + q_l(x))$$

$$c \cdot m_A(x) + m_A(x)(q_n(x) + \dots + q_l(x)) = p(x)$$

$$m_A(x)(c + q_n(x) + \dots + q_l(x)) = p(x)$$

ומכך נובע $m_A(x) | p(x)$.

$\Rightarrow$ נניח $m_A(x) \mid p(x)$, אזי קיים $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש $p(x) = m_A(x) \cdot q(x)$, לכן:
 $p(A) = m_A(A) \cdot q(A) = 0 \cdot q(A) = 0$

מ.ש.ל.

תהי $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$.

נראה כי $p_A(x) = p_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot p_{A_n}(x)$: (נשתמש בהגדרת הפולינום האופייני)

$$p_A(x) = |xI - A| = |xI - (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)| = \left| xI - \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} xI - A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & xI - A_n \end{pmatrix} \right| = |(xI - A_1) \oplus \dots \oplus (xI - A_n)| =$$

ע"פ סעיף א':

$$|(xI - A_1) \oplus \dots \oplus (xI - A_n)| = |xI - A_1| \cdot \dots \cdot |xI - A_n| = p_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot p_{A_n}(x)$$

ובסה"כ $p_A(x) = p_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot p_{A_n}(x)$

עתה נראה כי $m_A(x) = \text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))$, מתקיים:

$$\text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))(A) = \text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))(A_1 \oplus \dots \oplus A_n) =$$

$$\text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))(A_1) \oplus \dots \oplus \text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))(A_n) =$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : m_{A_i}(x) \mid \text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))$$

$$\therefore \forall i \in \{1, \dots, n\} : \text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))(A_i) = 0$$

$$\text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))(A_1) \oplus \dots \oplus \text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))(A_n) = 0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$$

עתה נראה כי זהו הפולינום המינימאלי המאפס את A: יהי פולינום $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה

קטנה יותר מ $\text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))$, אזי על פי הגדרת הכפולה המשותפת המינימאלית

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} : \neg(m_{A_i} \mid q(x)), \text{ עתה:}$$

$$q(A) = q(A_1 \oplus \dots \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_n) = q(A_1) \oplus \dots \oplus q(A_1) \oplus \dots \oplus q(A_n) =$$

$$\begin{pmatrix} q(A_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & q(A_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & q(A_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{עתה } q(A_1) \neq 0 \text{ לכן } \begin{pmatrix} q(A_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & q(A_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & q(A_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

, כלומר $q(A) \neq 0$, ובכך

הראינו כי כל פולינום ממעלה קטנה מ $\text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))$ אינו מאפס את A, וכן

$m_A(x) = \text{lcm}(m_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot m_{A_n}(x))$ מאפס את A, ולכן

נניח כי
 $m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \dots, m_{A_n}(x)$
 מתחלקים זה בזה
 כלומר $m_{A_i}(x) \mid m_{A_j}(x)$
 לכל i, j .
 אזי $m_A(x) = m_{A_1}(x)$
 כי $m_{A_1}(x)$ הוא הפולינום המינימאלי
 המאפס את A_1 , ולכן
 הוא מאפס את A .

(כל עוד לא מצוין אחרת, V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$)

2. ניקח $V = \mathbb{R}^2$, וכן ניקח את תתי-המרחבים שלו $U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

$U_2 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $U_3 = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. מתקיים:

$U_1 \cap U_2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0)\}$ סכומם ישר.

$U_2 \cap U_3 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0)\}$ סכומם ישר.

$U_1 \cap U_3 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0)\}$ סכומם ישר.

עתה נביט ב $(U_1 + U_2) \cap U_3$:

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = (\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} + \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}) \cap \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0)\}$$

ולכן על פי הגדרה הסכום $U_1 + U_2 + U_3$ אינו ישר.

3. יהי $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$:

א. נניח בשלילה כי קיים $i \in \{1, \dots, k\}$ עבורו קיים $v \neq 0$ כך ש

$$v \in (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) \cap U_i$$

וכן $\forall j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, k\} : u_j \in U_j$ כאשר $v = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_k$

$j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, k\}$ עתה יהי $v = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_k \in U_i$

האינדקס המקסימאלי עבורו $u_j \neq 0$ (קיים שכן $v \neq 0$), נפלג לשני מקרים:

• $j < i$: נכתוב $v = u_1 + \dots + u_j$ עתה

$$v \in U_i \text{ וכן } v \in U_1 + \dots + U_j \subseteq U_1 + \dots + U_j + \dots + U_{i-1}$$

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k \text{ שהסכום } v \in (U_1 + \dots + U_j + \dots + U_{i-1}) \cap U_i$$

ישר נובע $(U_1 + \dots + U_j + \dots + U_{i-1}) \cap U_i = \{0\}$ ולכן $v = 0$ בסתירה.

• $j > i$: נכתוב $v = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_j$ עתה כיוון ש $v \in U_i$ אזי ניתן

להציג $(u_i' \in U_i)$ $v = u_i'$ ומכך נובע:

$$u_i' = v = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_{j-1} + u_j$$

$$u_j = -u_1 + \dots - u_{i-1} + u_i' - u_{i+1} + \dots - u_{j-1}$$

מכך נובע $u_j \in U_1 + \dots + U_{j-1}$, כמו כן $u_j \in U_j$ ומכאן

$$u_j \in (U_1 + \dots + U_{j-1}) \cap U_j$$

ישר נובע $(U_1 + \dots + U_{j-1}) \cap U_j = \{0\}$ ולכן $u_j = 0$ בסתירה להיות j האינדקס המקסימאלי

עבורו $u_j \neq 0$.

מהסתירה נובע כי לכל $i \in \{1, \dots, k\}$ מתקיים

$$(U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) \cap U_i = \{0\}$$

(שני תת-המרחבים מכילים את 0, והסתירה מוכיחה כי חיתונם לא מכיל אף וקטור נוסף).

ב. תהא $\sigma \in S_k$, נראה כי הסכום ישר: יהי $i \in \{1, \dots, k\} \Leftarrow \sigma(i) = l \in \{1, \dots, k\}$ ע"פ סעיף

א' $(U_1 + \dots + U_{l-1} + U_{l+1} + \dots + U_k) \cap U_{\sigma(i)} = \{0\}$ כיוון ש σ חח"ע ועל אזי לכל

$j \in \{1, \dots, l-1, l+1, \dots, k\}$ קיים $j' \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, k\}$ יחיד כך ש $j = \sigma(j')$,

לכן $(U_{\sigma(1)} + \dots + U_{\sigma(i-1)} + U_{\sigma(i+1)} + \dots + U_{\sigma(k)}) \cap U_{\sigma(i)} = \{0\}$, וכיוון ש

$$U_{\sigma(1)} + \dots + U_{\sigma(i-1)} \subseteq (U_{\sigma(1)} + \dots + U_{\sigma(i-1)} + U_{\sigma(i+1)} + \dots + U_{\sigma(k)})$$

נקבל $(U_{\sigma(1)} + \dots + U_{\sigma(i-1)}) \cap U_{\sigma(i)} = \{0\}$, ולכן על פי ההגדרה הסכום ישר.

ע"ה נראה כי $W = U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$ ידוע: $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.
 $\subseteq$ יהי $w \in W$, אזי $w = u_1 + \dots + u_k$ כאשר $u_i \in U_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. עתה כיוון ש σ חח"ע ועל אזי לכל $j \in \{1, \dots, k\}$ קיים $j' \in \{1, \dots, k\}$ יחיד כך ש $\sigma(j') = j$, ולכן $w = u_{\sigma(1)} + \dots + u_{\sigma(k)}$ מקומוטטיביות ביחס לחיבור נקבל $w = u_{\sigma(1)} + \dots + u_{\sigma(k)}$.
 ומכאן $w \in U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$. הראינו $W \subseteq U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$.
 $\supseteq$ יהי $w \in U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$, אזי $w = u_{\sigma(1)} + \dots + u_{\sigma(k)}$, עתה כיוון ש σ חח"ע ועל אזי לכל $j \in \{1, \dots, k\}$ קיים $j' \in \{1, \dots, k\}$ יחיד כך ש $\sigma(j') = j$, ולכן $w = u_1 + \dots + u_k$ מקומוטטיביות ביחס לחיבור וכן מכך נובע $w \in U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k = W$.
 כלומר $W \supseteq U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$. בכך הוכחנו $W = U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$.
 בסה"כ הראינו כי $W = U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus U_{\sigma(k)}$.

ג. יהי $w \in W$, כיוון ש $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ קיימת הצגה $w = u_1 + \dots + u_k$ כאשר $u_i \in U_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. נניח בשלילה כי קיימת הצגה שונה $w = u_1' + \dots + u_k'$ כך ש $u_i, u_i' \in U_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. נחסר בין שתי ההצגות ונקבל:

$$0 = u_1' + \dots + u_k' - (u_1 + \dots + u_k)$$

$$0 = (u_1' - u_1) + \dots + (u_k' - u_k)$$

כיוון שההצגות שונות $u_i \neq u_i'$ $\exists i \in \{1, \dots, k\}$, כלומר $u_i - u_i' \neq 0$, נעביר מחובר זה אגף:

$$(u_i' - u_i) = (u_1' - u_1) + \dots + (u_{i-1}' - u_{i-1}) + (u_{i+1}' - u_{i+1}) + \dots + (u_k' - u_k)$$

ע"פ סגירות לחיבור $u_i - u_i' \in U_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ולכן מהשוויון נובע

$$(u_i' - u_i) \in U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$$

$$(u_i' - u_i) \in (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) \cap U_i$$

$$(u_i' - u_i) \in \{0\} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$(u_i' - u_i) = 0 \quad \text{בסתירה ל} u_i - u_i' \neq 0$$

$$w = u_1 + \dots + u_k \quad \text{כאשר } u_i \in U_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ הינה יחידה.}$$

$$4. \text{ יהיו } V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k, B_i \text{ בסיס של } U_i \text{ וכן } B = B_1 \cup \dots \cup B_k.$$

נוכיח כי B בסיס של V בכך שנראה כי B קבוצה פורשת ובת"ל. נסמן

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{i l_i}\}$$

פורשת: יהי $v \in V$, כיוון ש $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ ניתן להציג $v = u_1 + \dots + u_k$ כאשר

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : u_i \in U_i$$

$$u_i = \alpha_{i1} v_{i1} + \dots + \alpha_{i l_i} v_{i l_i} \quad \text{נציב ונקבל}$$

$$v = (\alpha_{11} v_{11} + \dots + \alpha_{1 l_1} v_{1 l_1}) + \dots + (\alpha_{k1} v_{k1} + \dots + \alpha_{k l_k} v_{k l_k})$$

איברי B, לכן B פורשת.

$$\text{בת"ל: יהי } 0 = \alpha_{11} v_{11} + \dots + \alpha_{1 l_1} v_{1 l_1} + \dots + \alpha_{k1} v_{k1} + \dots + \alpha_{k l_k} v_{k l_k} \text{ צירוף ליניארי מתאפס של}$$

איברי B. נניח בשלילה כי הצירוף איננו טריוויאלי, כלומר

$$\exists i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, l_i\} : \alpha_{ij} \neq 0$$

מתאפס הינו טריוויאלי נקבל $\alpha_{i1} v_{i1} + \dots + \alpha_{i l_i} v_{i l_i} \neq 0$, עתה נסמן

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} : \alpha_{j1} v_{j1} + \dots + \alpha_{j l_j} v_{j l_j} = u_j \quad \text{כיוון ש } B_j \text{ בסיס של } U_j$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : u_i \in U_i, \text{ וכפי שהראינו } u_i = \alpha_{i1} v_{i1} + \dots + \alpha_{i l_i} v_{i l_i} \neq 0 \quad \text{נקבל הצירוף}$$

$u_1 + \dots + u_k = 0$. נעביר את u_i אגף: $-u_i = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_k$. עתה $-u_i \in U_i$ וכן $-u_i \in U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$ וכן $-u_i = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_k \in U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$. ע"פ שאלה 3 סעיף א' כיוון ש $-u_i \in (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) \cap U_i = \{0\}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$: $(U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) \cap U_i = \{0\}$, סכום ישיר $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$. לכן במקרה זה $-u_i = 0$, כלומר $u_i = 0$ בסתירה לכך שהראינו כי $u_i \neq 0$. מהסתירה נובע כי הצירוף טריוויאלי ולכן B בת"ל.

הראינו כי B קבוצה בת"ל ופורשת ב V ולכן על פי הגדרה B בסיס של V .
5. יהיו $T: V \rightarrow V$ אופרטור, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישיר של מרחבים

אינווריאנטים תחת T .

א. נראה כי $\forall i \in \{1, \dots, k\} : (\ker(T|_{U_1}) + \dots + \ker(T|_{U_{i-1}})) \cap \ker(T|_{U_i}) = \{0\}$: יהי

$i \in \{1, \dots, k\}$ וכן יהי $v \in (\ker(T|_{U_1}) + \dots + \ker(T|_{U_{i-1}})) \cap \ker(T|_{U_i})$. נשים לב כי

$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \ker(T|_{U_i}) \subseteq U_i$. לכן

$v \in \ker(T|_{U_i}) \subseteq U_i$, וכן $v \in (\ker(T|_{U_1}) + \dots + \ker(T|_{U_{i-1}})) \subseteq U_1 + \dots + U_{i-1}$ ומכך

נובע $v \in (U_1 + \dots + U_{i-1}) \cap U_i$. עתה כיוון ש $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ סכום ישיר אזי על פי

הגדרה $\forall i \in \{1, \dots, k\} : (U_1 + \dots + U_{i-1}) \cap U_i = \{0\}$ ולכן $v = 0$, ובכך הראינו כי

$\forall i \in \{1, \dots, k\} : (\ker(T|_{U_1}) + \dots + \ker(T|_{U_{i-1}})) \cap \ker(T|_{U_i}) = \{0\}$, ולכן על פי

הגדרה הסכום $\ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$ הינו סכום ישיר .

עתה נראה כי $\ker(T) = \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$:

$\subseteq$: יהי $v \in \ker(T)$, אזי $v \in V$ וע"פ $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ ניתן להציג

$v = u_1 + \dots + u_k$ כאשר $u_i \in U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. עתה על פי $v \in \ker(T)$:

$$0 = T(v) = T(u_1 + \dots + u_k) = T(u_1) + \dots + T(u_k)$$

כיוון ש $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישיר של מרחבים אינווריאנטים תחת T

$\forall i \in \{1, \dots, k\} : T(u_i) \in U_i$. עתה ניתן לקחת $\forall i \in \{1, \dots, k\} : T(u_i) = 0 \in U_i$,

והשוויון יתקיים. אילו הם הערכים היחידים עבורם יתקיים השוויון על פי תרגיל 3 סעיף ג' הקובע כי ההצגה הנ"ל של וקטור היא יחידה (וכן נציין $0 \in V$) . לכן

$\forall i \in \{1, \dots, k\} : T(u_i) = 0 \in U_i$ ומכך נובע $u_i \in \ker(T|_{U_i})$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, לכן

$v \in \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$ ובכך הראינו

$\ker(T) \subseteq \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$.

$\supseteq$: יהי $v \in \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$. ניתן להציג $v = u_1 + \dots + u_k$ כאשר

$u_i \in \ker(T|_{U_i})$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. עתה:

$$T(v) = T(u_1 + \dots + u_k) = T(u_1) + \dots + T(u_k) = 0 + \dots + 0 = 0$$

לכן $v \in \ker(T)$. בכך הראינו $\ker(T) \supseteq \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$.

בסה"כ הראינו כי $\ker(T) = \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$.

ב. נראה כי $\forall i \in \{1, \dots, k\} : (\text{Im}(T|_{U_1}) + \dots + \text{Im}(T|_{U_{i-1}})) \cap \text{Im}(T|_{U_i}) = \{0\}$: יהי

$i \in \{1, \dots, k\}$ וכן יהי $v \in (\text{Im}(T|_{U_1}) + \dots + \text{Im}(T|_{U_{i-1}})) \cap \text{Im}(T|_{U_i})$. נשים לב כי

$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \text{Im}(T|_{U_i}) \subseteq U_i$, שכן $\forall i \in \{1, \dots, k\} : U_i$ אינווריאנטים תחת T . לכן

$v \in \text{Im}(T|_{U_i}) \subseteq U_i$, וכן $v \in (\text{Im}(T|_{U_1}) + \dots + \text{Im}(T|_{U_{i-1}})) \subseteq U_1 + \dots + U_{i-1}$ ומכך

נובע $v \in (U_1 + \dots + U_{i-1}) \cap U_i$. עתה כיוון ש $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ סכום ישיר אזי על פי

הגדרה $\forall i \in \{1, \dots, k\} : (U_1 + \dots + U_{i-1}) \cap U_i = \{0\}$ ולכן $v = 0$, ובכך הראינו כי
 $\forall i \in \{1, \dots, k\} : (\text{Im}(T|_{U_1}) + \dots + \text{Im}(T|_{U_{i-1}})) \cap \text{Im}(T|_{U_i}) = \{0\}$ ולכן על פי הגדרה
הסכום $\text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$ הינו סכום ישיר.

עתה נראה כי $\text{Im}(T) = \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$
 $\subseteq$. יהי $v \in \text{Im}(T)$, אזי $\exists u \in V : T(u) = v$ וע"פ $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ ניתן להציג
 $u = u_1 + \dots + u_k$ כאשר $u_i \in U_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. עתה:
 $v = T(u) = T(u_1 + \dots + u_k) = T(u_1) + \dots + T(u_k) \in \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$
ובכך הראינו כי $\text{Im}(T) \subseteq \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$
 $\supseteq$. יהי $v \in \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$ ניתן להציג $v = u_1 + \dots + u_k$ כאשר
 $\forall i \in \{1, \dots, k\} : u_i \in \text{Im}(T|_{U_i})$, כלומר $\exists v_i \in U_i : T(v_i) = u_i$. עתה:
 $v = u_1 + \dots + u_k = T(v_1) + \dots + T(v_k) = T(v_1 + \dots + v_k)$
 $\forall i \in \{1, \dots, k\} : v_i \in U_i \subseteq V$ ולכן $v_1 + \dots + v_k \in V$. כלומר $v \in \text{Im}(T)$. בכך הראינו
 $\text{Im}(T) \supseteq \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$.

בסה"כ הראינו כי $\text{Im}(T) = \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$.

6. יהיו $T: V \rightarrow V$ אופרטור, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישיר של מרחבים

אינווריאנטים תחת T . כמו כן לכל $i = 1, \dots, k$ יהי B_i בסיס של U_i , ונסמן

$$[T]_B = [T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k} \quad \text{נראה כי } B = \{v_1, \dots, v_{|B|}\} \quad B = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

ע"י כך שנראה שכל העמודות שוות בין שני האגפים, כלומר

$$(\forall i \in \{1, \dots, |B|\} : C_i([T]_B) = C_i([T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k}))$$

יהי $i \in \{1, \dots, |B|\}$. נסתכל על $C_i([T]_B)$, ע"פ הגדרת $[T]_B : [T]_B = [T(v_i)]_B$, נשים

לב כי $\exists j \in \{1, \dots, k\} : v_i \in B_j$ וכן $B_j \subseteq U_j$, ומכיוון ש U_j אינווריאנטי תחת T נקבל

$$T|_{U_j}(v_i) \in U_j \quad \text{עתה כיוון ש } B_j \text{ בסיס של } U_j \text{ נוכל להציג}$$

$$[T|_{U_j}(v_i)]_{B_j} = (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_m)$$

$$[T(v_i)]_B = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \alpha_i \quad \dots \quad \alpha_m \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

$$C_i([T]_B) = [T(v_i)]_B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & [T|_{U_j}(v_i)]_{B_j} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

עתה נסתכל על $([T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k})$. בתאים שאינם בתחום של $[T|_{U_i}]_{B_i}$

יהיו אפסים (מהגדרת הסכום הישר של מטריצות), בתחום של $[T|_{U_i}]_{B_i}$ העמודה ה i על פי

הגדרת המטריצה המייצגת היא: $[T|_{U_i}(v_i)]_{B_i}$ בסה"כ

$$C_i([T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & [T|_{U_j}(v_i)]_{B_j} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

לכן בסה"כ קיבלנו כי $(C_i([T]_B) = C_i([T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k})$ עבור $i \in \{1, \dots, |B|\}$ כללי. כלומר $(C_i([T]_B) = C_i([T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k})$, ומכך נובע כי

$$[T]_B = [T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k}$$

7. יהי $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, ולכל $i = 1, \dots, k$ יהי $T_i: U_i \rightarrow U_i$ אופרטור. נגדיר $T: V \rightarrow V$ בצורה הבאה: לכל $v \in V$ יש הצגה יחידה $v = u_1 + \dots + u_k$ כך ש $u_i \in U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. נגדיר: $T(v) := T_1(u_1) + \dots + T_k(u_k)$. הפונקציה T תסומן $T_1 \oplus \dots \oplus T_k$. א. כפי שראינו בהגדרה $T: V \rightarrow V$, נוכיח כי זו העתקה ליניארית:

• חיבור: יהיו $v_1, v_2 \in V$, והצגותיהם $v_i = u_{i1} + \dots + u_{ik}$, $\forall i \in \{1, 2\}$: כך ש $v_1 + v_2 = (u_{11} + u_{21}) + \dots + (u_{1k} + u_{2k})$. אזי $\forall i \in \{1, 2\}, j \in \{1, \dots, k\} : u_{ij} \in U_j$ (שימוש בקומוטטיביות בחיבור) כאשר $(u_{1j} + u_{2j}) \in U_j$, $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ (סגירות לחיבור). עתה על פי הגדרה:

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T_1(u_{11} + u_{21}) + \dots + T_k(u_{1k} + u_{2k}) = \\ &\text{כיוון ש } T_i: U_i \rightarrow U_i \text{ אופרטור, אזי הוא מקיים שימור חיבור, כלומר} \\ &\quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall w_1, w_2 \in U_i : T_i(w_1 + w_2) = T_i(w_1) + T_i(w_2) \\ T_1(u_{11} + u_{21}) + \dots + T_k(u_{1k} + u_{2k}) &= T_1(u_{11}) + T_1(u_{21}) + \dots + T_k(u_{1k}) + T_k(u_{2k}) = \\ T_1(u_{11}) + \dots + T_k(u_{1k}) + T_1(u_{21}) + \dots + T_k(u_{2k}) &= \\ &\text{על פי הגדרת } T: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1(u_{11}) + \dots + T_k(u_{1k}) + T_1(u_{21}) + \dots + T_k(u_{2k}) &= T(v_1) + T(v_2) \\ \text{ובסה"כ } T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \end{aligned}$$

• כפל בסקלר: יהיו $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$, וההצגה $v = u_1 + \dots + u_k$ כך ש $u_i \in U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. אזי $\alpha v = \alpha(u_1 + \dots + u_k) = \alpha u_1 + \dots + \alpha u_k$, כאשר $\alpha u_i \in U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ (סגירות לכפל בסקלר). עתה על פי הגדרה:

$$\begin{aligned} T(\alpha v) &= T_1(\alpha u_1) + \dots + T_k(\alpha u_k) = \\ &\text{כיוון ש } T_i: U_i \rightarrow U_i \text{ אופרטור, אזי הוא מקיים שימור כפל בסקלר, כלומר} \\ &\quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall w \in U_i, \alpha \in \mathbb{F} : T_i(\alpha w) = \alpha T_i(w) \\ T_1(\alpha u_1) + \dots + T_k(\alpha u_k) &= \alpha T_1(u_1) + \dots + \alpha T_k(u_k) = \alpha(T_1(u_1) + \dots + T_k(u_k)) = \\ &\text{על פי הגדרת } T: \end{aligned}$$

$$\alpha(T_1(u_1) + \dots + T_k(u_k)) = \alpha T(v)$$

ובסה"כ $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

הראינו כי $T: V \rightarrow V$ משמרת חיבור וכפל בסקלר ולכן על פי הגדרה היא אופרטור.

טענת עזר

בסימונים הנ"ל, מתקיים:

$$\text{א. } \forall i \in \{1, \dots, k\} : T|_{U_i} = T_i$$

ב. לכל $i = 1, \dots, k$, U_i אינווריאנטי תחת T .

הוכחה: א. (נשים לב כי להעתקות אותו תחום) יהי $i \in \{1, \dots, k\}$, ויהי $u \in U_i$, אזי

$$u \in V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \text{ והצגתו } u = 0 + \dots + 0 + u + 0 + \dots + 0 \in U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

$$T(u) = T_1(0) + \dots + T_{i-1}(0) + T_i(u) + T_{i+1}(0) + \dots + T_k(0) =$$

לכל $T_i: U_i \rightarrow U_i, i=1, \dots, k$ אופרטור, ולכן $T_i(0)=0$:

$T_1(0) + \dots + T_{i-1}(0) + T_i(u) + T_{i+1}(0) + \dots + T_k(0) = 0 + \dots + 0 + T_i(u) + 0 + \dots + 0 = T_i(u)$
ובסה"כ $\forall u \in U_i: T(u) = T_i(u)$, ותחומם אותו (ומכאן על פי השוויון טווחם אותו
טווח) ובסה"כ $T|_{U_i} = T_i$. כלומר $\forall i \in \{1, \dots, k\}: T|_{U_i} = T_i$.

ב. הראינו $\forall i \in \{1, \dots, k\}: T|_{U_i} = T_i$, לכן $\forall i \in \{1, \dots, k\}: \text{Im}(T|_{U_i}) = \text{Im}(T_i) \subseteq U_i$ שכן
 $T_i: U_i \rightarrow U_i$ אופרטור ולכן על פי הגדרה לכל $U_i, i=1, \dots, k$ אינווריאנטי תחת T .

מ.ש.ל.

ב. על פי טענת העזר וכן היות הפונקציה T מסומנת $T_1 \oplus \dots \oplus T_k$ נקבל כי עלינו להוכיח
 $\text{Im}(T) = \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$ $T: V \rightarrow V$ אך כיוון שעל פי סעיף א' $T: V \rightarrow V$
אופרטור, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ וכן על פי טענת העזר לכל $U_i, i=1, \dots, k$ אינווריאנטי
תחת T , אזי על פי תרגיל 5 סעיף ב' נקבל $\text{Im}(T) = \text{Im}(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T|_{U_k})$
כנדרש.

ג. על פי טענת העזר וכן היות הפונקציה T מסומנת $T_1 \oplus \dots \oplus T_k$ נקבל כי עלינו להוכיח
 $\ker(T) = \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$ $T: V \rightarrow V$ אך כיוון שעל פי סעיף א' $T: V \rightarrow V$
אופרטור, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ וכן על פי טענת העזר לכל $U_i, i=1, \dots, k$ אינווריאנטי
תחת T , אזי על פי תרגיל 5 סעיף א' נקבל $\ker(T) = \ker(T|_{U_1}) \oplus \dots \oplus \ker(T|_{U_k})$
כנדרש.

8. יהיו $T: V \rightarrow V$ אופרטור, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים
אינווריאנטים תחת T . נסמן $T_i = T|_{U_i}$.

א. נבחין כי על פי אינווריאנטיות $T(u_i) = T|_{U_i}(u_i)$, $\forall u_i \in U_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$, ועל פי
הסימון $T|_{U_i} = T_i$. עתה יהי $v \in V$, כיוון ש $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ קיימת הצגה יחידה
 $v = u_1 + \dots + u_k$ ש $u_i \in U_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$. עתה:

$$T(v) = T(u_1 + \dots + u_k) =$$

T אופרטור ולכן משמר חיבור:

$$T(u_1 + \dots + u_k) = T(u_1) + \dots + T(u_k) =$$

עתה נשתמש ב $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall u_i \in U_i: T(u_i) = T_i(u_i)$:

$$T(u_1) + \dots + T(u_k) = T_1(u_1) + \dots + T_k(u_k)$$

כלומר $T(v) = T_1(u_1) + \dots + T_k(u_k)$. ולכן על פי הגדרת הסכום הישר של אופרטורים
 $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$.

ב. לכל $B_i, i=1, \dots, k$ בסיס של U_i . וכן $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$. על פי הסימון $T|_{U_i} = T_i$

עלינו להוכיח $[T]_B = [T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k}$. $T: V \rightarrow V$ אופרטור,

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T ולכן

על פי תרגיל 6 נקבל $[T]_B = [T|_{U_1}]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k}$ כנדרש.