

מספרים מרוכבים

$\mathbb{Z}$ =קבוצת השלמים, $\mathbb{Q}$ =רציונליים, $\mathbb{R}$ =ממשיים

הגדרה

$$z=a+bi \in \mathbb{C}$$

$$a,b \in \mathbb{R}, i^2=-1$$

$\mathbb{C}$ נקראת קבוצת המרוכבים

צמוד - $a-bi$

ערך מוחלט: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ =מרחק הנקודה מהאפס

חלק ממשי ומדומה: $\text{Re}(z)=a, \text{Im}(z)=b$

תרגיל 3.4 (עמוד 6)

לכל אחד מהביטויים הבאים

(א) חשבו את ערך הביטוי,

(ב) ציינו את הערך המוחלט, את הצמוד, את החלק ממשי ואת החלק המדומה

$$z=(5+2i)(2-3i)$$

$$z=(5+2i)(2-3i)=10-15i+4i+6=16-11i$$

$$i, |z|=\sqrt{16+11}=5, \text{צמוד}=\text{Re}(z)=16, \text{Im}(z)=11$$

$$z=(5+2i)/(2-3i)=(5+2i)(2+3i)/((2-3i)(2+3i))=(10-15i+4i+6)/(4+9)=(4-11i)/13=4/13-11/13i$$

$$\dots, \text{Re}=4/13$$

תרגיל 3.5

(א) לכל $z \in \mathbb{C}$: $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

הוכחה:

יהי $z = a + bi$:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 = \operatorname{Re}(z)^2 \Rightarrow |z| \geq |\operatorname{Re}(z)|$$

לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $(z_1 + z_2)z = z_2z + z_1z$

הוכחה:

לכל $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$

$$(a_1 + b_1i + a_2 + b_2i)z = a_1z + a_2z + (b_1 + b_2)i z = (z_1 + z_2)z$$

$$a_2z + b_2iz = a_1z - b_1iz + a_2z - b_2iz = a_1z + a_2z - (b_1 + b_2)i z + (a_1 + b_1i)z = z_2z + z_1z$$

טענה:

$$(z_1 * z_2) = z_2z_1^*$$

$$\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$$

הוכחה

$$\begin{aligned} \overline{(z_1 * z_2)} &= \overline{(a_1 * a_2 + a_1 * b_2i + b_2 * a_1i - b_1 * b_2)} \\ &= (a_1 * a_2 - b_1 * b_2) - (a_1 * b_2 + a_2 * b_1i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 * z_2} &= (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = a_1 * a_2 - a_1 * b_2i - b_2 * a_1i - b_1 * b_2 \\ &= (a_1 * a_2 - b_1 * b_2) - (a_1 * b_2 + a_2 * b_1i) \end{aligned}$$

טענה:

$$z * \bar{z} = |z|^2$$

הוכחה:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi + b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

טענה: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

$$|z_2| = |z_1|^2 * |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 * z_2 * \overline{z_1} * \overline{z_2} = z_1 * \overline{z_1} * z_2 * \overline{z_2} = |z_1|^2 * |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

מותר להוציא שורש כי ערך מוחלט תמיד חיובי

טענה

$$\forall z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{(z - \bar{z})}{2i}$$

הוכחה:

$$(a+bi+a-bi)/2=2a/2=a$$

$$(a+bi-a+bi)/2i=2b/2i=b$$

תרגיל 3.6 ב'

פתרו מעל C:

$$z^2 - 8z = 10 - 20i + 12zi$$

פתרון

$$z^2 - 8z - 12zi - 10 + 20i = 0 \Rightarrow 2z^2 + (-8z - 12zi) - 10 + 20i = 0$$

$$* \quad (z_{1,2} = (8 + 12i \pm \sqrt{(32i)})/4 = (8 + 12i \pm 4\sqrt{2i})/4 = 2 + 3i \pm \sqrt{2i})$$

נחשב את השורש

$$i) = a + bi \Rightarrow (a + bi)^2 = 2i = a^2 + 2abi - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0, 2ab = 2i, b = 1/a, a^2 - 1/a^2 = 0, a^2 = 1/a^2, a^4 = 1, a = \pm 1 \quad \sqrt{2i} = \pm(1+i)$$

נמשיך את *

$$i \pm (1+i), z_1 = 3 + 4i, z_2 = 1 + 2i$$

הצגה פולרית (קטבית)

ניתן לאפיין כל מספר מרוכב $z \neq 0$ ע"י זווית ומרחק מראשית הצירים. המרחק מסומן r והזווית מסומנת θ

$$(z=a+bi=re^{i\theta})=rcis\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

כאשר

$$r=|z|, \theta=\text{atan}(b/a)+\pi n$$

הערות: (1) המשוואה הזאת תוכח רק בשנה הבאה

(2) כאשר מחפשים את הזווית יש לבדוק אם צריך להוסיף 180° (או π רדיאנים) לפי הרביע

(3) הזווית של מדומה טהור היא $\pi/2$ או $-\pi/2$

מעבר לצורה קרטזית $(a+bi)$:

$$a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$$

דוגמאות

$$\theta=1.5\pi, z=1-i, r=\sqrt{(1^2+(-1)^2)}=\sqrt{2}, \theta=\text{atan}(-1/1)=-\pi/2+\pi n \quad (1)$$

$$z=2e^{i\pi/3}, a=2\cos(\pi/3)=1, b=2\sin(\pi/3)=\sqrt{3} \quad (2)$$

משפט DeMoivre:

$$(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

תרגיל 3.8: חשבו את

$$2010^{(3\sqrt{+1})}$$

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2, \theta = \operatorname{atan} \sqrt{3} = \pi/3$$

$$\operatorname{cis}(\pi/3)^{2010} = 2^{2010} \operatorname{cis}(670\pi) = 2^{2010} \operatorname{cis}0 = 2^{2010} 2$$

תרגיל 3.6 א

$$z^4 = -16i$$

$$r^4 e^{4i\theta} = 16e^{-i\pi/2} \Rightarrow r=2, \theta = -\pi/8 + k/4, k=0,1,2,3$$

$$(Z_k = 2e^{i(-\pi/8+k\pi/2)}$$

נוסחה כללית

$$(Z_k = \sqrt[n]{r} * e^{i(\theta+2\pi k)/n}$$

תרגיל: הוכיחו את הנוסחה

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha * \cos\beta - \sin\alpha * \sin\beta$$

פתרון:

$$(e^{i(\alpha+\beta)}) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \quad (1)$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha * \cos\beta + \cos\alpha i\sin\beta + \cos\beta i\sin\alpha - \sin\alpha * \sin\beta \quad (2)$$

הטריגו

שדות

הגדרה

שדה $\langle \mathbb{F}, +, *, 0, 1 \rangle$ הוא קבוצה $\mathbb{F}$ עם פעולות חיבור וכפל (לאו דווקא החיבור והכפל הרגילים) המקיימות את התכונות הבאות:

1. סגירות: $\forall a, b \in \mathbb{F}: a + b \in \mathbb{F}, a * b \in \mathbb{F}$
2. חילוף: $\forall a, b \in \mathbb{F}: a + b = b + a, a * b = b * a$
3. קיבוץ: $\forall a, b, c \in \mathbb{F}: a + (b + c) = (a + b) + c, a * (b * c) = (a * b) * c$
4. איברים ניטרליים: קיימים $0 \neq 1 \in \mathbb{F}$ כך ש $a + 0 = a, a * 1 = a$
5. איבר הופכי ונגדי: לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים $(-a)$ כך ש $a + (-a) = 0$, קיים a^{-1} כך ש $a * a^{-1} = 1$
6. פילוג: $\forall a, b, c \in \mathbb{F}: a(b + c) = ab + ac$

1.3 תרגיל

יהי $\langle \mathbb{F}, +, *, 0, 1 \rangle$ שדה, הוכיחו את התכונות הבאות:

- א. $\forall a, b \in \mathbb{F}, c \neq 0: ac = bc \Rightarrow a = b$ (פעולה זו נקראת צמצום)
הוכחה: נתון $ac = bc$ נכפיל ב c^{-1} ונקבל $a(cc^{-1}) = b(cc^{-1}) \Rightarrow a = b$
- ג. $\forall a \in \mathbb{F}: a * 0 = 0 * a = 0$
הוכחה: $a * 0 = a * (0 + 0) = a * 0 + a * 0$ (קיים לפי התכונות):
 $0 = a * 0 + (-a * 0) = (a * 0 + a * 0) + (-a * 0) = a * 0 + (a * 0 + (-a * 0)) = a * 0$
- ו. $\forall a \in \mathbb{F}: -(-a) = a$
הוכחה: יהי $a \in \mathbb{F}$ אזי קיים $-a \in \mathbb{F}$ כך ש $a + (-a) = 0$. נוסף לאגפים $-(-a)$. נקבל
 $(a + (-a)) + (-(-a)) = 0 + (-(-a)) = a + ((-a) + (-(-a))) = a + 0 = a$
- ז. $\forall a \in \mathbb{F}: (-1) * a = -a$
הוכחה: הטענה שקולה ל $(-1)a + a = 0$
 $(-1)a + a = (-1)a + 1a = ((-1) + 1)a = 0a \stackrel{\text{לפי 1}}{=} 0$
- ח. $\forall a, b \in \mathbb{F}: (-a)(-b) = ab$
הוכחה: נראה ש $(-1)(-1) = 1$. לפי סעיף ז $(-1)(-1) = 1 * 1 = 1$.
נחזור להוכחת הטענה: $ab(-a)(-b) \stackrel{\text{נובע מקיבוץ וחילוף}}{=} ((-1)a)((-1)b) \stackrel{\text{סעיף ז}}{=} ab(-a)(-b)$

תרגיל

הוכיחו כי האיבר הניטרלי ביחס לחיבור הינו יחיד

הוכחה

נניח בשלילה שקיימים $0_{1,0_2} \in \mathbb{F}$ שונים. מתקיים $0_1 + 0_2 = 0_2 = 0_1$ סתירה

תרגיל 2.3

(א) הוכיחו אי $\mathbb{N}$ אינו שדה (ביחס לפעולה המושרית מ $\mathbb{R}$)
פתרון: יהי $a \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ לכן $a \in \mathbb{R}$. קיים לא נגדי יחיד שהוא $-a$, אבל $-a \notin \mathbb{N}$ (ע"פ הגדרת $\mathbb{N}$)

הגדרה

נסמן ב- $\mathbb{Z}_n$ את קבוצת האיברים $\{0, 1, \dots, n-1\}$ כאשר מוגדרת עליהם פעולת מודולו (modulo):

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_n: a \oplus b = (a + b) \bmod n, a \odot b = (a * b) \bmod n$$

למשל $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{aligned} 1 \oplus 4 &= 5 \\ 3 \oplus 4 &= 7 \bmod 6 = 1, \\ 2 \odot 3 &= 6 \bmod 6 = 0 \end{aligned}$$

הגדרה

איבר $a \in F$ (F אינו בהכרח שדה) נקרא "מחלק אפס" אם $\exists 0 \neq b \in F$ כך ש- $ab = 0$ או $ba = 0$

למשל בדוגמה הקודמת 2 הוא "מחלק אפס"

תרגיל

הוכיחו שבשדה אין מחלקי אפס

הוכחה

נניח בשדה $\mathbb{F}$ קיים מחלק אפס. אזי $\exists a, b \in \mathbb{F}$ שונים מ-0 כך ש- $ab = 0$. נכפול את המשוואה ב- b^{-1} (b הוא לא 0 לכן יש b^{-1}). נקבל $a = 0$ וזה בסתירה להנחה.

תרגיל 2.3 סעיף ג'

הוכיחו ש- $\mathbb{Z}_n$ אינו שדה עבור n פריק.

הוכחה:

n פריק ולכן קיימים $1 < m, k < n$ כך ש- $mk = n$ ואז נקבל $m \odot k = n \bmod n = 0$ ולכן עבור $\mathbb{Z}_n$ יש מחלקי אפס והוא לא שדה.

תת שדה

קריטריון מקוצר לתת שדה

נאמר ש $\mathbb{H}$ הוא תת שדה של $\mathbb{F}$ אם $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$ וגם שדה בעצמו ביחס לפעולות מ $\mathbb{F}$.

מספיק להוכיח את התכונות הבאות:

$$1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{H} \in \mathbb{F} \quad (1)$$

$$a -_{\mathbb{F}} b \in \mathbb{H}, a *_{\mathbb{F}} b^{-1} \in \mathbb{H} \quad \forall a, b \in \mathbb{H}, b \neq 0_{\mathbb{F}} \quad (2)$$

תרגיל 2.6

הסביר מדוע $\mathbb{Z}_p$ (ראשוני) אינו תת שדה של $\mathbb{R}$

הסבר

למשל עבור $p = 7$ נקבל $3, 5 \in \mathbb{Z}_7$, אבל $3 +_{\mathbb{R}} 5 = 8 \notin \mathbb{Z}_7$, לכן לא מתקיימת סגירות

מורכבים

הגדרה

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$0_{\mathbb{C}} = (0, 0), 1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\overbrace{(a, b) *_{\mathbb{C}} (c, d)}^{\text{הסבר}} = ((a + bi)(c + di)) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac + bd, ad + bc)$$

תרגיל

נשנה את פעולת הכפל ב- $\mathbb{C}$ ל- $(a, b) *_{\mathbb{C}} (c, d) = (ac, bd)$. האם $\mathbb{C}$ נשאר שדה?

תשובה: ממש לא! $(0, 1)(1, 0) = (0, 0) = 0_{\mathbb{C}}$ אבל $(0, 1), (1, 0) \neq 0_{\mathbb{C}}$ כלומר ל- $\mathbb{C}$ יש מחלקי אפס ולכן הוא כבר לא שדה

הגדרה

המאפיין של שדה $\mathbb{F}$ מסומן ב- $char(\mathbb{F})$ והוא מספר $n \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש- $n * 1 = \overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{n \text{ פעמים}} = 0$

אם אין מספר כזה אז נאמר שהמאפיין הוא 0.

המאפיין הוא או 0 או ראשוני

תרגיל

בנו שדה בגודל 4 וחשבו את המאפיין שלו

פתרון

נבנה טבלאות חיבור וכפל.

*	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

פרט למכפלות 0 לא יתכן שמספר יחזור על עצמו. הסבר: אם למשל $a * a = a$ וגם $a * 1 = a$ נקבל ע"פ צמצום $1 = a$

המודגשים הם לפי ההגדרות $a * a \neq 1$ שכן אז $b * a = b$ אבל $b * 1 = b$, לכן $a * a = b$ ואת שאר טבלת הכפל משלימים לפי האפשרויות שנשארו.

נראה ש $1 + 1 = 0$: נניח בשלילה ש $1 + 1 = a$:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	a	b	0
a	a	b	0	1
b	b	0	1	a

אבל אז $a * a = (1 + 1) * (1 + 1) \stackrel{\text{פילוג}}{=} (1 + 1) + (1 + 1) = a + a = 0$ אותו דבר לגבי $1 + 1 = b$:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	b	0	a
a	a	0	b	1
b	b	a	1	0

מערכת משוואות לינאריות

הגדרה

משוואה לינארית בח משתנים היא משוואה מהצורה $x_1x_1 + a_2 + x_2 + \dots + a_nx_n = b$

x_i – משנים. a_i – מקדמים. b – מקדם החופשי

כל משתנה במשוואה הנ"ל הוא ממעלה 1

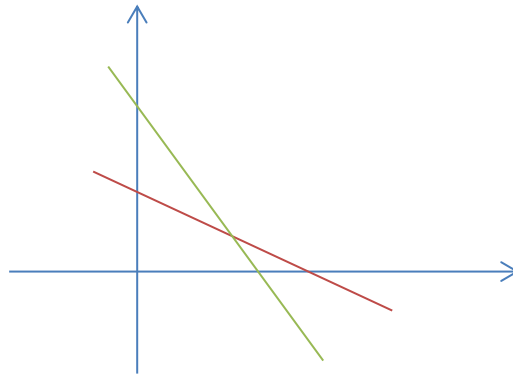
אנו מכירים 3 דרכים לפתרון מערכת משוואות:

(1) גרפית. (2) הצבה. (3) השוואת מקדמים

דוגמה

פתרו את המערכת הבאה ב3 הדרכים הנ"ל: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

(1) גרפית:



(2) הצבה:

$$x = 4 - 2y, 3(4 - 2y) + 4y = 10, \dots$$

(3) השוואת מקדמים

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow 2y + 2 = 4 \Rightarrow (2, 1)$$

שיטת החילוף (האלימינציה) של גאוס

בהינתן מערכת משוואות לינארית, האלגוריתם שואף להביא את המערכת לצורה משולשית עליונה (או מדורגת עליונה). בעזרת השיטה הזו ניתן לחלץ את המשתנים מהמשוואה האחרונה ובעזרת הצבה לאחור ניתן למצוא את שאר המשתנים.

כלומר צריך להמיר את המערכת:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{(m-1)1}x_1 + \dots + a_{(m-1)n}x_n = b_{m-1} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0 + \dots + a_{(m-1)(n-1)}x_{(n-1)} + a_{(m-1)n}x_n = b_{m-1} \\ 0 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

תרגיל 1.3 (עמ' 12):

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 9x + 15y = 0 \end{cases} \text{ (פתרו מעל } \mathbb{R} \text{ א) } :$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 9x + 15y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 15y = 21 \\ 9x + 15y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 15y = 21 \\ 0x + 0y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 6x + 12y = 0 \end{cases} \text{ (ב)}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 6x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 12y = 0 \\ 6x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 12y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

קיבלנו אינסוף פתרונות. אוסף הפתרונות הכללי הוא $\{(-2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

תרגיל 1.6

$$\begin{cases} 16x + 18y = 34 \\ 18x + 39y = 57 \end{cases} \text{ פתרו מעל } \mathbb{Z} \text{ את המערכת}$$

$$\begin{cases} 16x + 18y = 34 \\ 18x + 39y = 57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 17 \\ 6x + 13y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -24x - 27y = -51 \\ 24x + 52y = 76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -24x - 27y = -51 \\ 0x + 25y = 25 \end{cases}$$

מכאן ש $y = 1, x = 1$ ולכן הפתרון הוא $(1,1)$

תרגיל

פתרו מעל $\mathbb{Z}_5$ את המערכת:
$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$$
 הערה: $5 = 0, 4 = -1$ וכו'.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 0y + z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + 0y + z = 0 \\ 3x + \overset{=6y}{\tilde{y}} + \overset{=-9z}{\tilde{z}} = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ 0x + y + 0z = 0 \Rightarrow y = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + z = 0 \\ -x - 2z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ -3x - \overset{=-6z}{\tilde{z}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ 0x + 0z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

פתרון כללי הוא $t \in \mathbb{Z}_5(t, 0, -3t)$

זה לא אינסוף פתרונות! מקבלים 5 פתרונות שכן $t \in \mathbb{Z}_5$

תרגיל

עבור אילו ערכי k יש $1, \infty, 0$ פתרונות למערכת מעל $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x + 2y + kz = -1 \\ x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + kz = -1 \\ x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \end{cases} &\xrightarrow{R_3: R_3 - 2R_2} \begin{cases} x + 2y + kz = -1 \\ x - 3z = -3 \\ ky + 5z = 4 \end{cases} \xrightarrow{R_2: R_2 - R_1} \begin{cases} x + 2y + kz = -1 \\ -2y - (3+k)z = -2 \\ ky + 5z = 4 \end{cases} \xrightarrow{R_3: 2R_3 + kR_2} \\ \begin{cases} x + 2y + kz = -1 \\ -2y - (3+k)z = -2 \\ (-k^2 - 3k + 10)z = 8 - 2k \end{cases} \end{aligned}$$

$$z = \frac{8 - 2k}{-k^2 - 3k + 10} = \frac{2k - 8}{(k + 5)(k - 2)}, y = \frac{2 + 4k}{(k + 5)(k - 2)}, x = -\frac{3(k + 2)(k - 1)}{(k + 5)(k - 2)}$$

אין פתרון ב-2,5 כי אז $0 \neq c = z$

פתרון יחיד נקבל עבור $k \neq -5, 2$

אינסוף פתרונות אין בתרגיל הזה. נקבל אינסוף פתרונות כאשר נקבל ביטוי מהצורה $\frac{0}{0}$

תרגיל 1.8 $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + a^2y + z = 2 + a \\ ax + 3ay + z = 2 - t \end{cases}$$

פתרו מעל $\mathbb{R}$: לאלו ערכי a, t יש $0, \infty, 1$ פתרונות:

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + a^2y + z = 2 + a \\ ax + 3ay + z = 2 - t \end{cases} \xrightarrow{R_3: R_3 - R_2} \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + a^2y + z = 2 + a \\ (3a - a^2)y = -t - a \end{cases}$$

$$y = \frac{-t - a}{3a - a^2} = \frac{a + t}{a(a - 3)}, z = \frac{2}{1 - a}, x = \frac{-a^2(5 + t) + a(9 + t)}{a(1 - a)(3 - a)}$$

$a = 1$: אין פתרון (מקבלים $0z = c$)

$a = 0$: אם $t = 0$ מקבלים $0z = 0$ כלומר אינסוף פתרונות, אחרת אין פתרון

$a = 3$: אם $t = -3$ אז יש אינסוף פתרונות, אם $t \neq -3$ אז אין פתרון

$a \neq 0, 1, 3$: פתרון יחיד

תרגיל 2.1

$$\begin{cases} xy^2z^3 = 2 \\ x^4y^5z^6 = \frac{1}{4} \\ x^6y^8z^9 = 8 \end{cases}$$

פתור עבור $x, y, z > 0$ את המערכת:

פתרון

נסמן $\log_2 x = \alpha, \log_2 y = \beta, \log_2 z = \gamma$. נוציא לוג:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 4\alpha + 5\beta + 6\gamma = -2 \\ 6\alpha + 8\beta + 9\gamma = 3 \end{cases}$$

מטריצות

ניתן לרשום את מערכת המשוואות הלינאריות באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

או בצורה $Ax = b$ כאשר $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ i \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ i \\ b_n \end{pmatrix}$

הגדרה

מערכת "הומוגנית" היא מערכת משוואות שעבורן $\forall 1 \leq i \leq n: b_i = 0$.

הערה

כאשר מדובר במערכת הומוגנית נהוג להשמיט את עמודת המקדמים החופשיים

הגדרה

שתי מערכות משוואות נקראות שקולות אם יש להן אותה קבוצת פתרונות.

הגדרה

נאמר ששתי מטריצות שקולות שורה אם ניתן להגיע מאחת לשניה ע"י דירוג שורות

הגדרה

(א) מטריצה A נקראת מדורגת אם:

- כל שורות האפסים (אם ישנן) נמצאות בתחתית המטריצה
- האיבר המוביל בכל שורה (האיבר הראשון שאינו אפס) נמצא מימין לאיבר המוביל בשורה שמעליו

(ב) מטריצה נקראת מדורגת קנונית (או קנונית) אם היא מדורגת ו:

- האיברים המובילים $= 1$
- האיברים בעמודות של האיבר המוביל (פרט לאיבר המוביל) כולם שווים ל-0

צורה מדורגת של מטריצה אינה יחידה, בעוד שהצורה הקנונית יחידה.

תרגיל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 & 13 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 10 & 4 & -1 \end{pmatrix} : \text{דרגו את המטריצה הבאה לצורתה הקנונית:}$$

פתרון

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 & 13 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 10 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4: R_4 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 & 13 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3: 3R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 & 13 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \quad \quad \quad \begin{matrix} R_1: \frac{1}{2}R_1 \\ R_2: \frac{1}{3}R_2 \end{matrix} \\ & \xrightarrow{R_1: 2R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 24 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3: \frac{1}{6}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 24 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4: -R_4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 24 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1: R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 18 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \quad \quad \quad \begin{matrix} R_1: \frac{1}{2}R_1 \\ R_2: \frac{1}{3}R_2 \end{matrix} \\ & \xrightarrow{R_1: 2R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 18 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2: \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 18 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1: R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 20 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אלגברת מטריצות

הגדרות

$$(\mathbb{F}^{m \times n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} : \begin{matrix} \forall 1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n: \\ a_{ij} \in \mathbb{F} \end{matrix} \right\}$$

- סדר מטריצה: $m \times n$
- וקטור שורה – מטריצה מהסדר $1 \times n$
- וקטור עמודה – מטריצה מהסדר $m \times 1$

נאמר ששתי מטריצות $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{k \times l}$ שוות אם:

- $k = m, l = n$ (כלומר אותו מספר שורות ואותו מספר עמודות)
- $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n: a_{ij} = b_{ij}$

(1) ניתן לחבר 2 מטריצות אם ורק אם הן מאותו סדר. החיבור מתבצע באופן הבא: $C = A + B$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

(2) כפל בסקלר מתבצע ע"י הכפלת כל איברי המטריצה בסקלר הנתון: $c_{ij} = \alpha a_{ij} : \alpha A = C$

(3) מטריצת האפס: שכל איבריה שווים ל-0: $\forall i, j: a_{ij} = 0$

(4) מטריצה נגדית: לכל $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ קיימת מטריצה נגדית $B = -A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ כך ש

$$b_{ij} = -a_{ij} \quad A + (-A) = 0$$

באופן כללי, כל התכונות של השדה שמתייחסות לחיבור מתקיימות ב- $\mathbb{F}^{m \times n}$ ביחס לחיבור מטריצות

כפל מטריצות

יהיו $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k}$, נסמן $C = AB$ אזי $C \in \mathbb{F}^{m \times k}$ ומוגדר $c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$
שימו לב – הכפל מוגדר רק כאשר מס' העמודות של A = מספר השורות של B

תכונות הכפל (או לפחות חלקן)

$$A(BC) = (AB)C \quad (1)$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad (2)$$

$$(\alpha \in \mathbb{F}), \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad (3)$$

$$0 * A = A * 0 = 0 \quad (4)$$

תרגיל

חשבו את המכפלות הבאות (במידה ומוגדרות)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

פתרון

(א) הכפל מוגדר והמטריצה המתקבלת היא מסדר 2×3

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 * 1 + 2 * (-1) = -1$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 * (-1) + 2 * 1 = 1$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 3 * 2 + 4 * 0 = 6$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}^A \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(ב) מספר העמודות של השמאלי לא שווה למספר השורות של הימני, לכן הכפל לא מוגדר.

(ג) C מוגדר והסדר שלו 3×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ניקח את שורה 1 מהמטריצה השמאלית ואת עמודה 1 מהימנית ונכפול בהתאמה ונסכום:

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} = 1 * 3 + 0 * 1 = 3$$

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{וכן הלאה עד שנקבל}$$

סימונים

השורה ה- i של A מסומנת ב- $R_i(A)$

העמודה ה- j של A מסומנת ב- $C_j(A)$

דוגמה

נראה דרך אלטרנטיבית לכפול מטריצה בוקטור עמודה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3.6 (עמוד 17)

יהיו $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k}$ ותהא $C = AB \in \mathbb{F}^{m \times k}$. הוכח:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i C_i(A). \quad \text{א.}$$

הוכחה

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{סכום מטריצות}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= x_1 C_1(A) + \cdots + x_n C_n(A) = \sum_{i=1}^n x_i C_i(A) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1(i \text{ במיקום}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{אם ניקח}$$

$$Ae_i = 0 * C_1(A) + \cdots + 1 * C_i(A) + \cdots + 0 * C_n(A) = C_i(A) \quad \text{אזי}$$

ד. כפל עמודה בעמודה $C_i(C) = A * C_i(B)$

$$\begin{aligned} A * C_i(B) &= A * \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \stackrel{\text{'לפי סעיף א'}}{=} b_{1i}C_1(A) + \cdots + b_{ni}C_n(A) = \sum_{j=1}^n b_{ji}C_j(A) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{ji} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \stackrel{\text{כפל בסקלר וחילוף בתוך השדה}}{=} \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} a_{1j}b_{ji} \\ \vdots \\ a_{mj}b_{ji} \\ \vdots \\ a_{nj}b_{ji} \end{pmatrix} \stackrel{\text{סכום מטריצות}}{=} \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}b_{ji} \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj}b_{ji} \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}b_{ji} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{כפל מטריצות}}{=} \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{mi} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} = C_i(C) \end{aligned}$$

הערה

אמרנו בשיעור שעבר שאחת הצורות לרשום מערכת משוואות לינארית היא $Ax = b$ כאשר $x =$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

הוכחה

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{שוויון} \\ \text{של} \\ \text{מ.ל.ל.} \end{matrix}$$

תרגיל 3.3 (עמ' 16)

א) הוכיחו שאם המכפלה באחד האגפים מוגדרת אזי גם המכפלה באגף השני מוגדרת, ותוצאתן שווה: $A(BC) = (AB)C$

הוכחה

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{k \times h}, C \in \mathbb{F}^{r \times q}$ (כדי ש AB יהיה מוגדר) $n = k$ וגם BC מוגדר: $h = r$. במקרה זה אגף שמאל גם מוגדר: $BC \leq h = r$ ו $n = k$. באופן דומה ניתן להוכיח שאם אגף שמאל מוגדר אז גם ימין.

נניח מעכשיו ש $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times h}, C \in \mathbb{F}^{h \times q}$. ניתן כמו כן לראות שסדר המטריצות בשני האגפים הוא $m \times q$. נשוואה בין האיברים בשורה i עמודה j בשני האגפים.

$P = AB$ נסמן $(AB)C$

$$(PC)_{ij} = \sum_{t=1}^h P_{it} C_{tj} = \sum_{t=1}^h \left(\sum_{l=1}^n A_{il} B_{lt} \right) C_{tj} \stackrel{\text{פילוג}}{=} \sum_{t=1}^h \sum_{l=1}^n (A_{il} B_{lt}) C_{tj} (*)$$

$BC = D$ נסמן $A(BC)$

$$(AD)_{ij} = \sum_{t=1}^n A_{it} D_{tj} = \sum_{t=1}^n A_{it} \left(\sum_{l=1}^h B_{tl} C_{lj} \right) \stackrel{\text{פילוג}}{=} \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^h A_{it} (B_{tl} C_{lj}) = \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^h (A_{it} B_{tl}) C_{lj}$$

נחליף בין l ו t ונקבל $\sum_{l=1}^h \sum_{t=1}^n (A_{il} B_{lt}) C_{tj}$. נחליף את סדר הסכימה (מותר בגלל הקומוטטיביות

ואסוציאטיביות של החיבור ונקבל $\sum_{t=1}^h \sum_{l=1}^n (A_{il} B_{lt}) C_{tj}$ שזה שווה ל $(*)$

"הסבר" להחלפת סדר

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^2 x_{im} &= \sum_{i=1}^2 x_{i1} + \sum_{i=1}^2 x_{i2} + \sum_{i=1}^2 x_{i3} \\ &= x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} + x_{13} + x_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 \sum_{m=1}^3 x_{im} &= \sum_{m=1}^3 x_{1m} + \sum_{m=1}^3 x_{2m} \\ &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \end{aligned}$$

קיבלנו אותם איברים בשינוי סדר, ובגלל קומוטטיביות ואסוציאטיביות בשדה מקבלים

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^2 x_{im} = \sum_{i=1}^1 \sum_{m=1}^3 x_{im}$$

הגדרה

תהי $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}$, המטריצה המשוחלפת $A^t = (b_{ji}) \in \mathbb{F}^{n \times m}$ מוגדרת ע"י $b_{ji} = a_{ij}$ לכל i, j

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4.1 (עמוד 18)

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{F}$. הוכיחו:

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t \quad (\text{א})$$

$$(A^t)^t = A \quad (\text{ב})$$

$$(\alpha A^t)^t = \alpha A \quad (\text{ג})$$

פתרון

$$(\alpha A)^t = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{1n} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \alpha A^t \quad (\text{א})$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n} \Rightarrow A^t \in \mathbb{F}^{n \times m} \Rightarrow (A^t)^t \in \mathbb{F}^{m \times n} \Rightarrow \quad (\text{ב})$$

נסמן $B = A^t, C = B^t = (A^t)^t$. הוכחנו שהסדרים של A ו C שווים, נבדוק איברים $a_{ij} = b_{ji} = c_{ij}$

$$A = (A^t)^t \quad \text{כלומר } A = C \quad \text{ולכן } a_{ij} = c_{ij}$$

$$(\alpha A^t)^t = \alpha ((A^t)^t) = \alpha A \quad (\text{ג})$$

תכונות של שחלוף

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (1)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (2)$$

הערה/תרגיל:

הוכחנו בתרגיל ובשיעורים את שתי התכונות הבאות:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i C_i(A) \quad (\text{א})$$

$$(x_1, \dots, x_m)A = \sum_{i=1}^m x_i R_i(A) \quad (\text{ב})$$

ניתן להוכיח (א) <=> (ב) באמצעות תכונות השחלוף. (אבל לא בשיעורי הבית)

הוכחה

$$\left((x_1, \dots, x_m)A \right)^t \underset{\text{תכונת שחלוף 2}}{=} A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m x_i C_i(A^t)$$

$$: \left(\sum_{i=1}^m x_i C_i(A^t) \right)^t = \sum_{i=1}^m x_i R_i(A^t) \text{ נראה ש}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i C_i(A^t) \right)^t \underset{\text{תכונה 1 של שחלוף}}{=} \sum_{i=1}^m \left(x_i C_i(A^t) \right)^t \underset{(\alpha A)^t = \alpha A^t}{=} \sum_{i=1}^m x_i (C_i(A^t))^t = \sum_{i=1}^m x_i R_i(A) \quad (*)$$

הערה לגבי (*)

$$(C_i(A^t))^t = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}^t = (b_{1i}, \dots, b_{ni}) = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = R_i(A)$$

המשך

$$\left((x_1, \dots, x_m)A \right)^t = \sum_{i=1}^m x_i R_i(A) \text{ , לכן } \left((x_1, \dots, x_m)A \right)^t = \sum_{i=1}^m x_i (C_i(A^t))^t \text{ קיבלנו,}$$

הגדרה

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n} \text{ תיקרא } \underline{\text{מטריצה סימטרית}} \text{ אם } A^t = A \text{ ו} \underline{\text{אנטיסימטרית}} \text{ אם } A^t = -A$$

דוגמאות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ סימטרית}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ אנטיסימטרית}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ לא סימטרית ולא אנטיסימטרית}$$

תרגיל 4.4 (עמוד 19)

- (א) הוכיחו שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ המטריצה $AA^t \in \mathbb{F}^{m \times m}$ היא סימטרית.
 (ב) הוכיחו שלכל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתקיים $A + A^t$ סימטרית, $A - A^t$ אנטי סימטרית.

הוכחה

(א) בדקו $AA^t \in \mathbb{F}^{m \times m}$

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

תכונות שחלוף

(ב) נוכיח ש $A + A^t$ סימטרית: $(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$. נוכיח ש $A - A^t$ אנטיסימטרית:

$$\begin{aligned} (A - A^t)^t &= (A + (-A^t))^t = A^t + (-A^t)^t = A^t + ((-1)A^t)^t \\ &= A^t + (-1)(A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) \end{aligned}$$

תכונות שחלוף

תרגיל 4.5

- (א) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אנטי סימטרית. הוכיחו שלכל אברי האלכסון של A מתקיים $a_{ii} = 0$
 (ב) האם הטענה נכונה גם עבור $A \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$?

פתרון

(א) מטריצה אנטיסימטרית A מקיימת $A^t = -A$ כל $a_{ij} = -a_{ji}$ לכל i, j בפרט $a_{ii} = -a_{ii}$
 $2a_{ii} = 0$ לכן $a_{ii} = 0$

(ב) ב $\mathbb{Z}_2$ מתקיים $1 = -1$ ולכן $1 + 1 = 0$ ולא נוכל להסיק מה שהסקנו קודם. נניח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ לכן } A = A^t \text{ אבל } A^t = -A = a \text{ שכן } 1 = -1$$

סעיף א' מתקיים בכל שדה עם מאפיין $2 \neq$

הגדרה

נאמר שהמטריצה A היא הפיכה אם קיימת מטריצה B כך ש $AB = BA = I$. במקרה זה נאמר ש B ההופכי של A ונסמן $B = A^{-1}$

תרגיל 6.1 (עמוד 24)

תהי A מטריצה הפיכה

- (א) הוכיחו ש A ריבועית
 (ב) הוכיחו שיש רק מטריצה אחת B שהיא הופכית ל A
 (ג) הוכיחו שגם A^{-1} הפיכה ומתקיים $(A^{-1})^{-1} = A$

פתרון

(א) הפיכה ולכן קיימת B כך ש $AB = BA = I$. נניח $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{k \times l}$. מוגדרת לכן $n = k$. BA מוגדרת לכן $l = m$. AB מסדר $m \times l$, BA מסדר $k \times n$. לכן בסך הכל $m = k = n = l$ ומכאן A ריבועית.

(ב) נניח קיימות $B \neq C$ כך ש $AB = BA = I, AC = CA = I$
 $BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$
 תכונה אסוציאטיביות

(ג) A הפיכה ולכן קיימת A^{-1} כך ש $A^{-1}A = I = AA^{-1}$. כלומר A^{-1} הפיכה ו A הופכית שלה,
 אבל בסעיף ב' הוכחנו שההופכית יחידה ולכן $(A^{-1})^{-1} = A$

תרגיל 6.1 $\frac{1}{2}$

הוכיחו שאם $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה, אזי גם A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. הסיקו: אם A סימטרית והפיכה אזי גם A^{-1} סימטרית

פתרון

A הפיכה ולכן A^{-1} כך ש $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. נבצע שחלוף ונקבל $(AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t (= I)$. $(A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I$ לכן $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$. אם A סימטרית והפיכה נקבל $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$

תרגיל 6.2 (עמוד 23)

יהיו A, B מטריצות הפיכות מאותו סדר. הוכיחו שגם AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

הוכחה

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

פתרונות פונדמנטליים

נמצא את הפתרונות הפונדמנטליים של המערכת הבאה (מעל $\mathbb{R}$): $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & -6 & 2 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$

x_1, x_3 משתנים מובילים לכן x_2, x_4, x_5 חופשיים

- (א) פתרון פונדמנטלי ראשון $x_2 = 1, x_4 = x_5 = 0$. נקבל את הפתרון $(1, 1, 0, 0, 0)$
(ב) פתרון פונדמנטלי שני $x_4 = 1, x_2 = x_5 = 0$. נקבל את הפתרון $(0, 0, -1, 1, 0)$
(ג) פתרון פונדמנטלי שלישי $x_5 = 1, x_2 = x_4 = 0$. נקבל את הפתרון $(\frac{1}{3}, 0, 2, 0, 1)$

נציין (נדע להוכיח בהמשך) שהפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\left\{x_2(1, 1, 0, 0, 0) + x_4(0, 0, -1, 1, 0) + x_5\left(\frac{1}{3}, 0, 2, 0, 1\right) : x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\right\}$$

הקשר בין מערכת משוואות הומוגנית למערכת לא הומוגנית

נתונה מערכת של m משוואות בה נעלמים מהצורה $(A \in \mathbb{F}^{m \times n})Ax = b$

נתון $H = \{c \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$ הפתרון של המערכת ההומוגנית.

$L = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = b\}$ הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית.

הוכחתם בכיתה את המשפט הבא:

$$\text{אם } L \neq 0 \text{ אזי } L = v_0 + H : \forall v_0 \in L$$

דוגמה

$$(L)x + y = 5$$

$$(H)x + y = 0$$

פתרון מסויים ל L הוא $(2, 3)$ אוסף הפתרונות הכללי של L הוא $\{(2, 3) + (-t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

עוד דוגמה

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & -6 & 2 & 2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$$
 נתבונן במערכת

אפשר לראות ש $v_0 = (\frac{1}{3}, 0, 2, 0, 0)$ פתרון של המערכת. נראה ש $L = v_0 + H$

נפתור את המערכת הלא הומוגנית

x_2, x_4, x_5 משתנים חופשיים. נסמם $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = k$. נציב במשוואות ונקבל:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + s + \frac{1}{3}k \\ s \\ 2t + 2k \\ t \\ k \end{pmatrix} : s, t, k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + s + \frac{1}{3}k \\ s \\ 2 - t + 2k \\ t \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו

$$L = v_0 + H$$

הערה

הטענה נכונה לכל $v_0 \in L$ במקרה שלנו ההוכחה היתה קלה אך באופן כללי יש להראות הכלה דו כיוונית.

תרגיל 3.4 (עמ' 17)

ג) הוכיחו $L \neq \emptyset \Rightarrow L = \#H = \#L$ - מספר האיברים בקבוצה

הוכחה

$L \neq \emptyset$ ולכן קיים $v_0 \in L$ ומתקיים $L = v_0 + H$ כלומר $L = v_0 + \{w : w \in H\} = \{v : v \in L\} = v_0 + \{w : w \in H\}$
 v_0 ווקטור קבוע ונתון ולכן $\#H = \#L$

סעיף ד'

מצאו מקרה בו $\#H = 1, \#L = 0$

תשובה

למשל $\begin{cases} 0x = 1 \\ 2x = 5 \end{cases}$ - אין פתרון. $\begin{cases} 0x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$ - פתרון אחד.
 בכתוב מטריות $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} x = 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

סעיף ה'

מצאו מקרה בו $\#H = \infty, \#L = 0$

תשובה

$$\#L = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + y = 2 \\ 0x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + y = 0 \\ 0x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

סעיף ו'

מצאו מקרה בו $\#H = 7, \#L = 0$

תשובה

אותה מערכת כמו קודם רק מעל $\mathbb{Z}_7 : \{(t, 0) : t \in \mathbb{Z}_7\} = 7$

פעולות אלמנטריות ופעולות שורה

הגדרה

פעולה ρ על מטריצה נקראת "פעולת שורה אלמנטרית" אם היא מבצעת אחת משלוש הפעולות הבאות:

$$(1) R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j \text{ (חיבור שורה עם כפולה של שורה אחרת)}$$

$$(2) R_i \leftarrow \alpha R_i \text{ (הכפלת שורה בסקלר } \alpha \neq 0 \text{)}$$

$$(3) R_i \leftrightarrow R_j \text{ (החלפת שורות)}$$

במקרה כזה המטריצה $\rho(I)$ נקראת מטריצת שורה אלמנטרית (או מטריצה אלמנטרית)

דוגמאות

(1) נניח שיש לנו מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ נניח שאנחנו רוצים לבצע $(\rho)R_1 \leftrightarrow R_2$. נסתכל על

$$\rho(I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ מסדר } 2 \times 2$$

$$\text{הטענה: } \rho(I)A = \rho(A)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) נניח שיש לנו מטריצה שאנו רוצים לדרג $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_1]{R_2:2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_2]{R_2:R_2-R_1} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = B$$

$$\rho_1(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \rho_2(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ פעולות השורה האלמנטריות הן}$$

$$\text{מתקיים: } B\rho_2(\rho_1(A)) = \rho_2(I)\rho_1(I)A$$

$$\text{כלומר } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

הערה

כל הדיון הנ"ל תקף גם לפעולות עמודה, רק שהכפל ב $\rho(I)$ מתבצע מימין.

תרגיל 6.7 (עמ' 25)

תהא ρ פעולת שורה אלמנטרית.

(א) הוכיחו: לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מתקיים $\rho(A) = \rho(I)A$ כאשר $I \in \mathbb{F}^{m \times m}$. הסיקו שלכל זוג מטריצות (כך שהכפל מוגדר) A, B מתקיים $\rho(AB) = \rho(A)B$

פתרון

ישנן 3 פעולות שורה. נוכיח רק לגבי אחת מהן $(\alpha R_i \rightarrow R_i)$

(תזכורת – תרגיל 3.6 ב'): $e_i A = R_i(A)$

$$\rho(I)A = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \alpha e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} * A \stackrel{\substack{\text{תרגיל 3.6} \\ \text{סעיף ד}}}{=} \begin{pmatrix} e_1 A \\ \vdots \\ \alpha e_i A \\ \vdots \\ e_m A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ \alpha R_i(A) \\ \vdots \\ R_m(A) \end{pmatrix} = \rho(A)$$

לכן

$$\rho(AB) = \rho(I)(AB) = (\rho(I)A)B = \rho(A)B$$

סעיף ב'

המטריצה $\rho(I)$ הפיכה ומתקיים $\rho(I)^{-1} = \rho^{-1}(I)$ כאשר ρ^{-1} היא הפעולה ההפוכה ל ρ

הוכחה

$$\rho(I)\rho^{-1}(I) \stackrel{\text{לפי סעיף א}}{=} \rho(\rho^{-1}(I)) = I$$

באופן דומה אם ρ פעולת שורה אלמנטרית אז גם ρ^{-1} פעולת שורה אלמנטרית לכן:

$$\rho^{-1}(I)\rho(I) = \rho^{-1}(\rho(I)) = I$$

הגדרה

העקבה (trace) של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ היא סכום איברי האלכסון:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

תכונות

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t) \quad (1)$$

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (2)$$

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A) \quad (3)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (4)$$

הוכחה

נסמן $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ נניח $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $C = AB$, $D = BA$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(BA) &= \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n d_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} \underset{\substack{\text{חילוף} \\ \text{כפל} \\ \text{בשדה}}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ik} \underset{\substack{\text{החלפת} \\ \text{אינדקסים}}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki} \underset{\substack{\text{החלפת סדר} \\ \text{הסכימה}}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \end{aligned}$$

תרגיל 5.10 (עמ' 21)

הוכיחו שאין מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^2$ עבורן $I = AB - BA$. האם הטענה נכונה לכל שדה?

הוכחה

נניח בשלילה שקיימות $A, B \in \mathbb{R}^2$, $I = AB - BA$.

$$n = \text{tr}(I) = \text{tr}(AB - BA) \underset{\text{תכונות tr}}{=} \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) \underset{\text{תכונה 4 שהוכחנו}}{=} 0$$

קיבלנו $n = 0$ וזו סתירה ($n \geq 1$)

הטענה אינה נכונה לכל שדה. למשל עבור $\mathbb{Z}_2$: ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

מרחב ווקטורי

הגדרה

מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא קבוצה שעליה מוגדרת פעולת חיבור $+$ וכן פעולת כפל המקשרת בינו לבין $\mathbb{F}$ $*$. הפעולות הנ"ל מקיימות אקסיומות שראיתם בשיעור. איברי V נקראים ווקטורים ואיברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלרים.

דוגמאות

- $\mathbb{F}^n$ מרחב ווקטורי (מ"ו בקיצור) מעל $\mathbb{F}$ עם חיבור רכיב ורכיב כפל בסקלר.
- $\mathbb{F}^{m \times n}$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$ עם חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר.
- מקרה פרטי של 1: כל שדה $\mathbb{F}$ הוא מרחב ווקטורי מעל עצמו.

תרגיל 1.2 (עמ' 34)

יהא $\mathbb{R}^2$ עם חיבור ווקטורי רגיל. האם פעולת הכפל הבאה (מעל $\mathbb{R}$) משרה מבנה של מרחב ווקטורי על $\mathbb{R}^2$?

$$\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$$

פתרון

פעולות הכפל בסדלק במ"ו אמורות לקיים מס' תכונות:

לכל $u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

יהי $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)^2 x, (\alpha + \beta)^2 y) = (\alpha^2 x + 2\alpha\beta x + \beta^2 x, \alpha^2 y + 2\alpha\beta y + \beta^2 y)$$

מצד שני

$$\alpha(x, y) + \beta(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y) + (\beta^2 x, \beta^2 y) = (\alpha^2 x + \beta^2 x, \alpha^2 y + \beta^2 y)$$

הביטויים הנ"ל אינם שווים לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ למשל $\alpha = \beta = x = y = 1$

הגדרה (של תת מרחב)

יהי V מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש W הוא תת מרחב (בקיצור ת"מ) של V אם:

(א) $W \neq \emptyset$

(ב) הקבוצה W היא מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לחיבור $+$ ולכפל $*$.

דוגמאות

(א) אם V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, אז V הוא ת"מ של V .

(ב) אם מ"ו מעל $\mathbb{F}$, אז $\{0_V\}$ ת"מ של V .

ת"מ טריוויאליים

(ג) $w = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\}$ הוא ת"מ של $\mathbb{R}^2$ (מעל $\mathbb{R}$). מדובר בישר $y = x$. כל ישר שיעבור דרך הראשית יהיה ת"מ ווקטורי. מצד שני הישר $w = \{(2, a) : a \in \mathbb{R}\}$ (כי $x = 2$)

$$\underbrace{(2, 3)}_{\in w} + \underbrace{(2, 4)}_{\in w} = \underbrace{(4, 7)}_{\notin w}$$

(ד) $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ הוא ת"מ של $\mathbb{R}^3$, אבל $\{(a, b, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ שהוא המישור $z = 1$ אינו ת"מ.

הערה

אם $W \subseteq V$ ת"מ אזי $0_W = 0_V$ (תוכיחו בש"ב) ולכן כל ת"מ חייב להכיל את וקטור ה-0 של המרחב.

קריטריון מקוצר לת"מ

- (א) $0_V \in W \subseteq V$ (או לחילופין $\emptyset \neq W \subseteq V$)
 (ב) לכל $u, w \in W$ מתקיים $u +_V w \in W$
 (ג) לכל $\alpha \in \mathbb{F}, w \in W$ מתקיים $\alpha *_V w \in W$

תרגיל 2.8 (עמ' 35)

יהא V מ"ו ויהיו $u, w \subseteq V$ תתי מרחבים שלו כך ש $w \subseteq u$. הוכיחו ש w ת"מ של u

הוכחה

נעזר בקריטריון המקוצר.

- (1) נתון $w \subseteq u$. W ת"מ של V ולכן $0_V \in w$. מצד שני u ת"מ של V ולכן $0_V \in u$.
 לכן $0_u = 0_V$
 (2) יהי $w_1, w_2 \in w$. נתון $w \subseteq u$ ו- u ת"מ של V ולכן

$$w_1 +_u w_2 =_{V \text{ ת"מ של } u} w_1 +_V w_2 \in w$$

 (3) יהי $w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$:

$$\alpha *_u w =_{V \text{ ת"מ של } u} \alpha *_V w \in w$$

תרגיל 2.10 (עמ' 35)

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נגדיר $V_A = \{B \in \mathbb{F}^{n \times n} : AB = BA\}$

- (א) הוכיחו ש V_A ת"מ של $\mathbb{F}^{n \times n}$
 (ב) הוכיחו ש V_A סגור לכפל מטריצות.

הוכחה (סעיף א')

- (א) $V_A \subseteq \mathbb{F}^{n \times n}$ נתון. מתקיים $0 \in V_A$ $\Leftarrow A * 0 = 0 = 0 * A$
 (ב) יהיו $B, C \in V_A$. נראה ש $B + C \in V_A$. מתקיים

$$(B + C)A =_{\text{פילוג}} BA + CA =_{B, C \in V_A} AB + AC = A(B + C) \Rightarrow B + C \in V_A$$

 (ג) נניח $B \in V_A, \alpha \in \mathbb{F}$ ונראה $\alpha B \in V_A$

$$(\alpha B)A =_{\text{תכונות של מטריצות}} \alpha(BA) =_{B \in V_A} \alpha(AB) = (\alpha A)B = (A\alpha)B = A(\alpha B) \Rightarrow \alpha B \in V_A$$

הוכחה לסעיף ב' לא קשור לתתי מרחבים!

נניח $B, C \in V_A$ צ"ל $BC \in V_A$

$$A(BC) =_{\text{אסוציאטיביות}} (AB)C =_{B \in V_A} (BA)C =_{\text{אסוצ}} B(AC) =_{C \in V_A} B(CA) =_{\text{אסוצ}} (BC)A$$

חיבור ואיחוד של תתי מרחבים $(W, U \subseteq V)$

$$W \cup U = \{v \in V : v \in W \wedge v \in U\}$$

החיתוך הוא ת"מ והוא תת המרחב הגדול ביותר המוכל ב W ו U . כלומר:

$$U \cap W \subseteq U \quad (1)$$

$$X \subseteq U \cap W \text{ אזי } X \subseteq U, \subseteq W \text{ ש } \forall X \text{ ת"מ של } W \subseteq U, \subseteq W \quad (2)$$

$$U \subseteq W \text{ או } W \subseteq U \text{ אם ורק אם } W \cup U = \begin{cases} v \in U \\ \text{או} \\ v \in W \end{cases}$$

תרגיל 3.4 (עמ' 35)

יהא $u, w \subseteq V, V = \mathbb{R}^{n \times n}$ תתי מרחב

- תארו את $u \cap w$
- הוכיחו ש $u \subseteq w$ או $w \subseteq u$ ואם לא אזי הוכיחו ש $u \cup w$ אינו ת"מ

(א) u המטריצות הסימטריות, w האלכסוניות

$u \in w$ ולכן $w \cup u = w$ (כל אלכסונית היא סימטרית)

(ב) u מטריצות סימטריות, w משולשיות עליונות

נקבל $\{u \cap w = \text{אלכסוניות}\}$

$a_{ij} = a_{ji} = 0$ נקבל $i < j$ אם A סימטרית ולכן $a_{ij} = 0 \forall i > j$ ולכן $A \in w \Leftrightarrow A \in u \cap w$. מכאן $\forall i \neq j: a_{ij} = 0$ ולכן A אלכסונית.

$u \cap w$ אינו תת מרחב. נראה שאין סגירות לחיבור:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in u \cup w} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in u \cup w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin u \cup w$$

(ג) u מטריצות אנטיסימטריות, w מטריצות עם $tr = 0$

הוכחנו בעבר שלכל $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אנטיסימטרית מתקיים $tr(A) = 0$ לכן $u \subseteq w$ ולכן $u \cap w = u$
 $u \cup w = w$

סכום של תתי מרחב

יהי V מ"ו ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ שלו. הסכום $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ הוא תמיד ת"מ והוא המ"ו הקטן ביותר המכיל את U ו- W .

תרגיל

בתרגיל הנ"ל מצאו בכל סעיף את סכום תתי המרחבים הנתונים.

(א) u מטריצות סימטריות, w האלכסוניות

$$u + w = u \text{ אזי } w \subseteq u$$

(ב) u מטריצות סימטריות, w משולשיות עליונות

$u + w = \mathbb{F}^{n \times n}$ נראה עבור $n = 2$ (ניתן להוכיח באופן כללי):

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix}}_{\text{סימטרית}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x & y - z \\ 0 & w \end{pmatrix}}_{\text{משולשית עליונה}}$$

סכום ישר

יהיו U, W תתי מרחבים של V . נאמר $U+W$ הוא סכום יש של V אם $U+W=V$ ו $U \cap W = \{0_V\}$ ובמקרה זה נרשום $U \oplus W = V$

הערה

ראיתם בהרצאה שבמקרה זה כל וקטור $v \in V$ ניתן להצגה יחידה $v = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W}$

דוגמה

נתבונן בשני תתי מרחב של $\mathbb{R}^2$: $u = \{(x, y): x = y\}$ ו $w = \{(x, y): x + y = 0\}$. נראה ש $\mathbb{R}^2 = u \oplus w$

הוכחה

א) צ"ל $U \cap W = \{(0,0)\}$. אם $(x, y) \in u \cap w$ אזי $\begin{matrix} y = x \\ y = -x \end{matrix} \Rightarrow x = y = 0$

ב) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \stackrel{?}{=} (a, a) + (b, -b)$. אם נפתור נקבל $\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$ כלומר:

$$x + y = 2a \Rightarrow a = \frac{x + y}{2}, x - y = 2b \Rightarrow b = \frac{x - y}{2}$$

הגדרה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1, \dots, v_n \in V$. צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_n$ הוא ביטוי מהצורה $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ כאשר $\forall 1 \leq i \leq n: \alpha_i \in \mathbb{F}$

אם $\alpha_i = 0$ לכל i נאמר שהצירוף הלינארי הוא טריוויאלי (צל"ט בקיצור)

נאמר שוקטורים $v_1, \dots, v_n$ הם ת"ל (תלויים לינארית) אם יש צ"ל לא טריוויאלי כך ש $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ אחרת נאמר ש $v_1, \dots, v_n$ בת"ל (בלתי תלויים לינארית)

דוגמאות

יהי $V = \mathbb{R}^{23}$, $(2,3), (1,8) \in \mathbb{R}^2$ אזי $3(2,3) + 5(1,8)$ הוא צ"ל של $(2,3), (1,8)$. צל"ט שלהם הוא $0(2,3) + 0(1,8) = (0,0)$. שני הוקטורים הם בת"ל כי למשוואה $\alpha(2,3) + \beta(1,8) = (0,0)$ קיים רק פתרון טריוויאלי.

מצד שני אם נבחר $(1,0), (1,8), (2,4)$ נראה שהם ת"ל כי למשל $3(1,0) + 1(1,8) - 2(2,4) = (0,0)$

תרגיל

נתבונן במ"ו הבא: $\mathbb{R}_2[x] := \{ax^2 + bx + c: a, b, c \in \mathbb{R}\}$. בדקו האם ארבעת הווקטורים הבאים הם ת"ל או בת"ל:

$$f_1(x) = 1 + 3x + x^2, f_2(x) = 1 + 4x + 4x^2, f_3(x) = 2 + 3x, f_4(x) = 8x + x^2$$

פתרון

$$\alpha(1 + 3x + x^2) + \beta(1 + 4x + 4x^2) + \gamma(2 + 3x) + \delta(8x + x^2) \equiv 0$$

$$\text{צ"ל אם קיים צ"ל לא טריוויאלי: } \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 3\gamma + 8\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + \delta = 0 \end{cases} \quad (*) \text{ מדובר במערכת הומוגנית - נפתור:}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ (בגלל שזו מערכת הומוגנית לא רושמים את טור הקבועים) } ((0=).$$

$$\text{הפתרון: } \left\{ \left(\begin{array}{c} -10\frac{3}{4}\delta \\ 3\frac{1}{4}\delta \\ \frac{15}{4}\delta \\ \delta \end{array} \right) : \delta \in \mathbb{R} \right\} \text{ ולכן יש אינסוף פתרונות ולכן הוקטורים תלויים.}$$

הערה בקשר לתרגיל הקודם: שימו לב שעל מנת לבחור את מערכת המשוואות $(*)$ שמנו אותה במטריצה כך שהעמודות של המטריצה הן בדיוק המקדמים של הפולינומים.

תרגיל 5.3 (עמ' 38)

מצאו לאלו ערכי a יהיו הוקטורים הבאים (מעל $\mathbb{R}$) בת"ל: $v_1 = (1, 2, a)$, $v_2 = (2a + 1, 2, 3)$, $v_3 = (2, 4, a - 1)$

פתרון

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ a & 3 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 0 & -4a & 0 \\ 0 & -2a^2-a+3 & -a-1 \end{pmatrix}$$

אם $a = 0$ נקבל שיש משתנה חופשי ואז הוקטורים ת"ל. נניח $a \neq 0$ ונחלק את השורה השנייה ב $-4a$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2a^2-a+3 & -a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix}$$

אם $a = -1$ נקבל שהוקטורים ת"ל.

מסקנה: $a = 0, -1$ ת"ל, $a \neq 0, -1$ בת"ל

הגדרה

נאמר שהקבוצה $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ היא ת"ל אם קיים צ"ל לא טריוויאלי $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, אחרת נאמר ש A בת"ל

תרגיל 5.8 (עמ' 39)

יהי V מ"ו: הוכיחו או הפריכו:

(ה) אם $A \subseteq V$ ת"ל אזי כל איבר של A הוא צ"ל של האחרים.

פתרון

הפרכה: תהי $A = \{(1,2), (2,4), (1,0)\} \in \mathbb{R}^2$. זו קבוצה תלויה לינארית שכן $2(1,2) - 1(2,4) + 0(1,0) = 0$. אבל $(1,0)$ אינו צ"ל של $(2,4), (1,2)$.

הגדרה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $\emptyset = S \subseteq V$ קבוצה כלשהי. הנפרש של S הוא אוסף כל הצירופים הלינאריים הסופיים של אברי S והוא יסומן ב $Span(S)$

$$Span(\emptyset) = 0$$

אם $Span(S) = V$ נאמר ש S פורשת את

הערות על $Span$

1. לכל $S \subseteq V$ תת קבוצה, $Span(S)$ תת מרחב של V
2. $Span(S)$ הוא ת"מ הקטן ביותר המכיל את S . כלומר:

$$S \subseteq \underbrace{Span(S)}_{\text{תת מרחב}}$$

ב. אם $S \subseteq W$ ו t מ"מ אזי $Span(S) \subseteq W$

דוגמה

נבחר $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0), (2,0)\}$ אזי:

$$Span(S) = \{\alpha(1,0) + \beta(2,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + 2\beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\gamma, 0) : \gamma \in \mathbb{R}\} = x\text{-ציר}$$

נבחר $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} : S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\text{Span}(S) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{משולשיות} \\ \text{עליוניות} \end{matrix} \right\}$$

נאמר ש- S פורשת את תת המרחב של המטריצות המשולשיות העליונות.

תרגיל 6.3 (עמ' 40)

יהי V מ"מ מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $A, B \subseteq V$ קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו:

$$\text{Span}(A + B) = \text{Span}(A) \cup \text{Span}(B) \quad (\text{א})$$

$$\text{Span}(A \cup B) = \text{Span}(A) \cup \text{Span}(B) \quad (\text{ב})$$

$$\text{Span}(A + B) = \text{Span}(A) + \text{Span}(B) \quad (\text{ג})$$

$$\text{Span}(A \cap B) = \text{Span}(A) \cap \text{Span}(B) \quad (\text{ד})$$

פתרון

א+ב

אינם נכונים היות ו- Span תמיד ת"מ והאיחוד הוא ת"מ אם ורק אם תת מרחב אחד מוכל בשני. ניקח

$A = \{(1, 0)\}, B = \{(0, 1)\} \in \mathbb{R}^2$. לכן $\text{Span}(A) = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}, \text{Span}(B) = \{(0, s) : s \in \mathbb{R}\}$.

$$\text{Span}(A + B) = \text{span}\{(1, 1)\} = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

$\text{Span}(A) \cap \text{Span}(B) = \{0\}$ וכן $\text{Span}(A) \not\subseteq \text{Span}(B)$ ו- $\text{Span}(B) \not\subseteq \text{Span}(A)$ אינו ת"מ

ג

נמשיך עם אותה דוגמה:

$$\text{Span } A + \text{Span } B = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} + \{(0, s) : s \in \mathbb{R}\} = \{(t, s) : t, s \in \mathbb{R}\} \neq \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(A + B)$$

ד

דוגמה נגדית: $A = \{(0, 1)\}, B = \{(0, 2)\}$ אזי $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{Span}(A \cap B) = \{0\}$ לעומת זאת

$$\text{Span } A = \text{Span } B = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \text{Span } A \cap \text{Span } B = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$$

הערה

מה שכן נכון הוא $\text{Span}(A \cup B) = \text{Span } A + \text{Span } B$

תרגיל 6.5

ג) בדקו האם הנפרש שווה לקבוצה המשווית אליו. אם כן בטאו איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים. אן לא מצאו איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש.

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון

הסבר כללי

כאשר מבקשים להוכיח שעבור ת"מ ומ"ו כלשהו W מתקיים $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ יש להראות הכלה דו כיוונית:

$$(\supseteq) \text{ לכל } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in W$$

$$(\subseteq) \text{ עבור ווקטור כללי } w \in W \text{ קיימים } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \text{ כך ש-} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in W$$

אצלנו ההכלה $\supseteq$ ברורה. נבדוק את ההכלה $(\subseteq)$:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

מקבלים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & x \\ 2 & -1 & 1 & 3 & y \\ 2 & -1 & 1 & 3 & z \\ 1 & 1 & 0 & 5 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & x \\ 2 & -1 & 1 & 3 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x \end{pmatrix}$$

ז"א יש פתרון אם ורק אם $t = x, z = y$. זה נכון למטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ ז"א רק מטריצות

$$\text{סימטריות שייכות למרחב הנספר. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

דוגמה

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ו- $H = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$ אוסף הפתרונות של מע' הומוגנית, $v_1, \dots, v_k$ הם הפתרונות הפונדמנטליים של $Ax = 0$, אזי H הוא ת"מ של $\mathbb{F}^n$ ומתקיים $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = H$

משפט

דרגת השורות של מטריצה שווה לדרגת העמודות שלה ומסומנת ב- $rank(A)$:
 $rank(A) = \dim R(A) = \dim C(A)$

תרגיל 6.11 (עמ' 25)

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נתון $AB = I$. הוכיחו:

(א) אין ב- A שורת אפסים.

(ב) A אינה שקולה למטריצה עם שורת אפסים.

(ג) קיימת $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש- $CA = I$

(ד) A הפיכה

(ה) B הפיכה

פתרון

(א) נניח בשלילה שקיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $R_i(A) = (0, 0, \dots, 0)$. אזי $R_i(AB) = R_i(A)B = (0, \dots, 0) = R_i(I)$. זאת סתירה כי I אין שורת אפסים.

(ב) נניח בשלילה ש- A כן שקולה למטריצה עם שורת אפסים M (וב- M יש שורת אפסים במקום ה- i): $A \rightarrow \dots \rightarrow M$. קיימת P הפיכה (מט' אלמנטרית) כך ש- $PA = M$. M יש שורת אפסים ולכן PA יש שורת אפסים:

$$R_i(PA) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$R_i(PA) = R_i(P)A = (0, 0, \dots, 0)$$

שימו לב ש- P הפיכה ולכן קיימת B כך ש- $PB = I$, אבל אז לפי א' מקבלים שאין ב- P שורת אפסים לכן קיבלנו סתירה.

(ג) A אינה שקולה למטריצה עם שורת אפסים ולכן בצורה המדורגת קנונית שלה אין שורת אפסים $\Rightarrow$ זאת מטריצת היחידה: $I: A \xrightarrow{P_1} A_1 \xrightarrow{P_2} A_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{P_k} I$. נבחר $C = P_1 \dots P_k$ (המטריצה שמדרגת את A לצורתה הקנונית) ואז $CA = I$.

(ד) (צ"ל A הפיכה, כלומר קיימת B כך ש- $AB = BA = I$).

$AB = I, CA = I$, יש להראות ש $C = B$ ואז נקבל הפיכות.

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

לכן $AB = BA = I$ ולכן A הפיכה.

(ה) B הפיכה שכן כפי שהוכחנו קודם $AB = BA = I$.

הערה

$A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ והיה נתון $AB = I$, והסקנו ש- A הפיכה.

מסקנה

עבור מטריצה ריבועית, מספיק למצוא הופכית מצד אחד בכדי שהי תהיה הפיכה).

תרגיל 11.6

יהיו $A \in \mathbb{F}^{k \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$

(א) הוכיחו שתמיד מתקיים $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A), \text{rank}(B)$

(ב) תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו: A הפיכה $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$

פתרון

(א) נוכיח אחד מהם: $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$

הדרך הטבעית לגשת לדרגת המטריצה היא באמצעות מרחב השורה/העמודה.

$$\begin{aligned} AB &= A(C_1(B), \dots, C_m(B)) = (AC_1(B), \dots, AC_m(B)) = \left(A \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} b_{1m} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n b_{i1} R_i(A), \dots, \sum_{i=1}^n b_{im} R_i(A) \right) \end{aligned}$$

$$= \text{span}\{C_i(AB)\} = \text{span}\{C_i(A)\}$$

כלומר כל עמודה ב- AB היא צירוף לינארי של עמודות A ולכן

ולכן $\dim C(AB) \leq \dim C(A)$ ולכן $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$.

(ב) צ"ל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$

A הפיכה לכן קיימת B כך ש- $AB = I$. מצד אחד $n = \text{rank}(I) = \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$

אבל לא יכול להיות ש- $\text{rank}(A) > n$ ולכן $\text{rank}(A) = n$

כיוון שני

$$\text{rank}(A) = n \Rightarrow \dim C(A) = n \Rightarrow C(A) = \mathbb{F}^n$$

כלומר כל $b \in \mathbb{F}^n$ הוא צ"ל של עמודות A כלומר לכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$b = \alpha_1 C_1(A) + \dots + \alpha_n C_n(A)$$

סקלרים $x_{i1}, \dots, x_{in} \in \mathbb{F}$ כך ש- $e_i = x_{i1} C_1(A) + \dots + x_{in} C_n(A)$. נבנה מטריצה B :

$$B = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$BA = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{נסו לכתוב יותר משכנע}} (C_1(A), \dots, C_n(A)) = I$$

נסו לכתוב יותר משכנע

וכך בנינו את המטריצה ההופכית של A

תרגיל 11.11

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו $A = 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) = 0 \Leftrightarrow \dim \mathcal{C}(A) = 0 \Leftrightarrow \dim \mathcal{R}(A) = 0$ (ז"א התנאים הבאים שקולים)

(א) הפיכה A

(ב) לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

(ג) קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

(ד) למערכת $Ax = 0$ יש רק את הפתרון הטריבויאלי.

(ה) עמודות A בת"ל

(ו) $\text{rank}(A) = n$

(ז) שורות A בת"ל

פתרון

א $\Rightarrow$ ב

$Ax = b$, A הפיכה ולכן $A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$ כלומר $A^{-1}b - x = 0$ זהו הפתרון (אם נציב אותו במע' נקבל פסוק אמת) והוא גם יחיד: $Ay = b \Leftrightarrow A^{-1}Ay = A^{-1}b \Leftrightarrow y = x$.

ב $\Rightarrow$ ג – טריבויאלי

ג $\Rightarrow$ ד

ניזכר בקשר שבין מע' הומוגנית ללא הומוגנית: $H = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$, $L = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = b\}$. הראנו שאם $L \neq \emptyset$ אזי $\#H = \#L$. אצלנו: לפי ג', L באמת לא ריקה $\#H = 1 \Leftrightarrow \#L = 1$ והפתרון היחיד למע' הומוגנית הוא הטריבויאלי

ד $\Rightarrow$ ה

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(A) = \alpha_1 C_1(A) + \dots + \alpha_n C_n(A) = 0$$

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

אבל לפי ד' $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$ ולכן עמודות A בת"ל.

ה $\Rightarrow$ ו

עמודות A בת"ל. ל A יש n עמודות $\dim \mathcal{C}(A) = n \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$

ו $\Rightarrow$ ז – טריבויאלי: $\text{rank}(A) = \underbrace{\dim \mathcal{R}(A)}_{\text{מספר שורות בת"ל}}$

א $\Rightarrow$ ז

(1) שורות A בת"ל $\Leftrightarrow \dim \mathcal{R}(A) = n \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$ וכבר הראנו בתרגיל 11.6 ש הפיכה.

(2) שורות A בת"ל $\Leftrightarrow \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n \Leftrightarrow$ כל וקטור $b \in \mathbb{F}^n$ הוא צ"ל של שורות A. בפרט e_i הוא צ"ל

של שורות A: $e_i = x_{i1}R_1(A) + \dots + x_{in}R_n(A)$ ולכן:

$$B = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, BA = I$$

ולכן A הפיכה.

אלגוריתם למציאת מטריצה הופכית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ מצאו } A^{-1} \text{ עבור}$$

השיטה היא:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{לדרג את שני האגפים}} (I|B)$$

ואז יוצא $A^{-1} = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3: R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3: R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2: R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{להמשיך}}$$

משפט המימדים

יהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ אזי:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

תרגיל 8.3 (עמ' 46)

יהיו V מ"ו ממיד 5, יהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים ממימדים 3,4 בהתאמה. מהן האפשרויות עבור $\dim(U \cap W)$?

פתרון

ממשפט המימדים: $\dim(U + V) = 7 - \dim(U \cap W)$
 $5 = \dim V$

מצד שני $U, W \subseteq U + W$ תתי מרחבים.

$$\begin{aligned} \dim U &= 3 \\ \dim W &= 4 \\ 5 = \dim V &\geq \dim(U + W) \geq \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

לכן $5 \geq \dim(U + W) \geq 4$
לכן $\dim(U \cap W) = 2$ או $\dim(U \cap W) = 3$

נשים לב $U \cap W \subseteq U$

משפט

אם $A \subseteq B$ ת"מ, $\dim A = \dim B$ אזי $A = B$

כלומר: באופציה ב' נקבל $\dim(U \cap W) = \dim U = 3$
 $U \cap W = U \subseteq W$ ולכן בסיטואציה זו $U \subseteq W$

$$\dim(U \cap W) = \begin{cases} 3 & U \subseteq W \\ 2 & U \not\subseteq W \end{cases} \text{ שורה תחתונה:}$$

תרגיל 8.5

יהי V מ"ו ממיד n ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים כך ש- $\dim U = n - 1$, $W \not\subseteq U$. הוכיחו: $U + W = V$

פתרון

ע"פ משפט המימדים:

$$\begin{aligned} n = \dim V &\geq \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ U \cap W &\subseteq W \Rightarrow \dim W \geq \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim W - \dim(U \cap W) \geq 0 \end{aligned}$$

נקבל

$$\dim(U + W) \geq n - 1$$

אם $u + w = v \leq \dim(U + W) = n$ וסיימו.

נניח בשלילה $\dim(U + W) = n - 1$

$$\begin{aligned} n - 1 = \dim(U + W) &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim W - \dim(U \cap W) = 0 \\ &\Rightarrow \dim W = \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

מכיוון ש- $U \cap W \subseteq W$ והמימדים שלהם שווים נקבל $U \cap W = W$, כמו כן תמיד $U \cap W \subseteq U$ ולכן $W \subseteq U$ בסתירה להנחה.

תרגיל – ממבחן 2009

יהיו $U, W \subseteq V$ שני ת"מ במרחב נוצר סופית V

- (א) הוכיחו שאם $\dim V < \dim U + \dim W$ אזי $U \cap W \neq \{0\}$
(ב) נניח שמתקיים $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1$. הוכיחו שאז $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$

פתרון

- (א) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ (*)
נניח בשלילה ש $U \cap W = \{0\}$
נקבל מ(*) $\dim V \geq \dim U + \dim W$ בסתירה לכך ש $\dim V < \dim U + \dim W$
- (ב) מתקיים $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1$
מצד שני $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$
אם נשווה נקבל $\dim(U \cap W) + 1 = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ ואז
 $(*) \dim U + \dim W = 2 \dim(U \cap W) + 1$
נרצה להוכיח ש $\dim U = \dim(U \cap W)$ או $\dim W = \dim(U \cap W)$
מתקיים $\dim U \geq \dim(U \cap W)$ וגם $\dim W \geq \dim(U \cap W)$
מ"ל (מספיק להוכיח) $\dim U \leq \dim(U \cap W)$ או $\dim W \leq \dim(U \cap W)$
נניח בשלילה ש $\dim U > \dim(U \cap W)$ וגם $\dim W > \dim(U \cap W)$
זה גורר $\dim U \geq \dim(U \cap W) + 1$ וגם $\dim W \geq \dim(U \cap W) + 1$
זה גורר: $\dim U + \dim W \geq 2 \dim(U \cap W) + 2$ בסתירה ל(*)
לכן $\dim U = \dim(U \cap W)$ ואז $U = U \cap W \subseteq W$ או $\dim W = \dim(U \cap W)$ ואז $W = U \cap W \subseteq U$

ווקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר

הגדרה

יהי V מ"ו, $v \in V$ וקטור כלשהו. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס (סדור) ל- V . אזי אם $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ נכתוב $[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ונקרא ל- $[v]_B$ וקטור קואורדינטות של v בבסיס B .

דוגמה

יהי $V = \mathbb{R}^2$, נבחר שני בסיסים:

$$B = \{(0,1), (1,0)\}, C = \{(1,1), (2,3)\}$$

יהי $v = (0, -1)$ אזי:

$$[v]_B = ?$$

$$(0, -1) = -1(0,1) + 0(1,0) \Rightarrow [v]_B = [(0,1)]_B = (-1, 0)$$

$$[v]_C = ?$$

$$(0, -1) = 2(1,1) - 1(2,3) \Rightarrow [v]_C = (2, -1)$$

הגדרה

יהי V מ"ו ויהיו B, C שני בסיסים. נסמן: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

אז המטריצה $P_C^B = [I]_C^B = \begin{pmatrix} | & | \\ [v_1]_C & \dots & [v_n]_C \\ | & | \end{pmatrix}$ נקראת "מטריצת מעבר בין בסיס C לבסיס B " והיא

מקיימת $\forall v \in V: P_C^B [v]_B = [v]_C$ וזאת המטריצה היחידה שמקיימת זאת לכל $v \in V$

דוגמה

יהי $V = \mathbb{R}^2$. נבחר שני בסיסים: $B = \{(1,2), (3,5)\}, C = \{(0,1), (1,0)\}$

$$P_C^B = ?$$

$$(1,2) = 2(0,1) + 1(1,0)$$

$$(3,5) = 5(0,1) + 3(1,0)$$

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_B^C = ?$$

$$(0,1) = 3(1,2) - 1(3,5)$$

$$(1,0) = -5(1,2) + 2(3,5)$$

$$P_B^C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

שימו לב שמתקיים $P_C^B P_B^C = I$ וזה מתקיים באופן כללי.

תרגיל 10.5 (עמ' 48)

יהי V מ"ו ונניח שיש לו בסיס סטנדרטי S . יהי $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס אחר של V

- (א) הוכיחו שהמטריצה P_S^B מקיימת $P_S^B[v]_B = [v]_S$ לכל $v \in V$ (בהרצאה)
 (ב) יהיו $V = \mathbb{R}_2[x]$, $S = \{1, x, x^2\}$, $B = \{1, 2 - x, 3x^3\}$. מצא מטריצה המקיימת $P[v]_B = [v]_S$
 (ג) עבור המקרה של הסעיף הקודם מצאו מטריצה המקיימת $P[v]_S = [v]_B$
 (ד) יהי $C = \{1 + x^2, x + x^2, x^2\}$ בסיס נוסף ל- $\mathbb{R}_2[x]$. מצאו מטריצות המקיימות
 $A[v]_C = [v]_B, Q[v]_C = [v]_S$

פתרון(ב)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 * 1 + 0x + 0x^2 \\ 2 - x &= 2 * 1 + (-1)x + 0x^2 \\ 3x^3 &= 0 * 1 + 0x + 3x^3 \\ P &= P_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון(ג)

P המבוקשת בתרגיל היא P_B^S . מתקיים $P_B^S P_S^B = I$. נמצא את ההופכית של המטריצה בסעיף הקודם, ע"פ $(A|I) \rightarrow (I|A^{-1})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1: R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2: -R_2 \\ R_3: \frac{R_3}{3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ לכן}$$

פתרון(ד)

$$\begin{aligned} Q &= P_S^C \\ [1 + x^2]_S &= (1, 0, 1) \\ [x + x^2]_S &= (0, 1, 1) \\ [x^2]_S &= (0, 0, 1) \\ P_S^C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ראיתם בהרצאה שמתקיים $P_B^S P_S^C = P_B^C$. לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שיטת גיל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

תרגיל 7.17

יהי V מ"ו ותהי $B \subseteq V$ קבוצה. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

(א) B בסיס עבור V

(ב) $\vec{0} \notin B$ ולכל קבוצה $A \subseteq B$ מתקיים $V = \text{span } A \oplus \text{span}(B \setminus A)$

פתרון

ניקח $A = \emptyset$ ואז $V = \text{span}(\emptyset) + \text{span } B = \text{span } B$ ונניח בשלילה ש B ת"ל אזי קיימים

$v \in B, v \neq \vec{0}$ שונים כך $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ $v \in B$ (*)

ניקח $A = \{v\}$. מתקיים $\text{span } A \cap \text{span}(B \setminus A) = \{0\}$ לכן $\text{span } A \cap \text{span}(B \setminus \{v\}) = \{0\}$

$\Rightarrow \text{span}\{v\} \cap \text{span}(B \setminus \{v\}) = \{0\} \Rightarrow \text{span}\{v\} \not\subseteq \text{span}(B \setminus \{v\})$ בסתירה ל(*)

הגדרה

יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. פונקציה $T: V \rightarrow W$ תיקרא העתקה לינארית אם:

$$\forall v_1, v_2 \in V: T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad (\text{א})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V: T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad (\text{ב})$$

הערה

אם $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית (הע"ל) אז $T(0_V) = 0_W$

תרגיל

האם $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא הע"ל?

$$T(x) = 2x \quad (\text{א})$$

כן:

$$T(v_1 + v_2) = 2(v_1 + v_2) = 2v_1 + 2v_2 = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha 2x = \alpha T(x)$$

$$T(x) = 2x + 1 \quad (\text{ב})$$

לא. דרך ראשונה: $T(0) = 1 \neq 0$

$$T(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) + 1 \neq 2x_1 + 2x_2 + 2 = T(x_1) + T(x_2) \quad \text{דרך שניה:}$$

הגדרה

יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר שהעתקה לינארית $T: V \rightarrow W$ היא הפיכה אם קיימת הע"ל $S: W \rightarrow V$ כך ש $T \circ S = Id_W, S \circ T = Id_V$ (לעיתים נסמן $T \circ S = TS$) ובמקרה זה גם אומרים ש T איזומורפיזם.

כלומר הע"ל T היא איזומורפיזם $\Leftrightarrow T$ חח"ע ועל.

תרגיל

תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ הע"ל המוגדרת ע"י $T(x, y) = (2x, x + y)$. האם T איזומורפיזם?

פתרון

T הע"ל – (בדקו!)

$$2x_1 = 2x_2, x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Leftrightarrow (2x_1, x_1 + y_1) = (2x_2, x_2 + y_2) \Leftrightarrow T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) \quad \text{חח"ע?}$$
$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \Leftrightarrow T(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad \text{ע.חח"ע.}$$

על? ניקח $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ונרצה לבדוק האם קיים (a, b) כך ש $T(a, b) = (x, y)$:

$$T(a, b) = (2a, a + b) = (x, y) \Rightarrow a = \frac{x}{2}, b = y - \frac{x}{2}$$

לכן לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ אם ניקח $(a, b) = \left(\frac{x}{2}, y - \frac{x}{2}\right)$ נקבל $T(a, b) = (x, y)$.

לכן T איזומורפיזם.

משפט ההגדרה

יהיו V, W מ"ו. יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V ותהי $\{w_1, \dots, w_n\}$ קבוצה כלשהי ב- W . אזי קיימת הע"ל יחידה $T: V \rightarrow W$ כך ש- $T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$

הערות למשפט

- אם הקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא רק בת"ל ולא בסיס אזי קיימת הע"ל T אבל לא יחידה.
- אם הקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ ת"ל אז אי אפשר לדעת באופן כללי אם קיימת T כזו. בוחנים כל מקרה לגופו.

תרגיל

בדקו בכל סעיף האם קיימת הע"ל T :

$$\text{(א) } T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ המוגדרת ע"י } \begin{cases} T(1, 0) = (5, 2) \\ T(0, 1) = (10, 4) \end{cases}$$

כן, T קיימת ויחידה ע"ם משפט ההגדרה כי $\{(1,0), (0,1)\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^2$

$$\text{(ב) } T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ המוגדרת ע"י } \begin{cases} T(1, 0, 0) = (1, 1, 1) \\ T(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

כן, אבל לא יחידה. כי אם נשלים את הקבוצה $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ לבסיס למשל ע"י הוספת $(0,0,1)$ הרי ניתן לשלוח את $(0,0,1)$ לכל איבר ב- $\mathbb{R}^3$.

$$\text{(ג) } T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ המוגדרת ע"י } \begin{cases} T(2, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ T(0, 3, 2) = (8, 0, 2) \\ T(2, 3, 2) = (-5, 0, 0) \end{cases}$$

נניח בשלילה שקיימת הע"ל שכזו. נקבל:

$$(-5, 0, 0) = T(2, 3, 2) = T(2, 0, 0) + T(0, 3, 2) = (1, 0, 0) + (8, 0, 2) = (9, 0, 2)$$

והגענו לסתירה.

תרגיל

$$\text{תהא } T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ המוגדרת ע"פ משפט ההגדרה. } \begin{cases} T(2, 0, 0) = (1, 3, 6) \\ T(0, 1, 0) = (0, 0, 2) \\ T(0, 1, -1) = (9, 0, -1) \end{cases}$$

פתרון

$$(x, y, z) = \alpha(2, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 1, -1)$$

$$x = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{x}{2}; y = \beta + \alpha \Rightarrow \beta = y + z; z = -\gamma \Rightarrow \gamma = -z$$

$$(x, y, z) = \frac{x}{2}(2, 0, 0) + (y + z)(0, 1, 0) - z(0, 1, -1)$$

$$T(x, y, z) = \frac{x}{2}T(2, 0, 0) + (y + z)T(0, 1, 0) - zT(0, 1, -1)$$

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3}{2}x, 3x\right) + (0, 0, 2y + 2z) + (-9z, 0, z) = \left(\frac{x}{2} - 9z, \frac{3}{2}x + 2y + 3z\right)$$

הגדרה

יהיו V, W מ"ו ויהיו $E = \{v_1, \dots, v_n\}, F = \{w_1, \dots, w_m\}$ שני בסיסים של V, W בהתאמה. תהי $T: V \rightarrow W$ הע"ל. המטריצה המייצגת של T בבסיסים E, F :

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_F & \dots & [T(v_n)]_F \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ומתקיים $\forall v \in V: [T]_F^E [v]_E = [T(v)]_F$

הערה

אם ניקח $V = W$, $T = I: V \rightarrow V$, V בסיס B של V , V בסיס C של V , נקבל: $[I]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \dots & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$ ומתקיים $\forall v \in V: [I]_C^B [v]_B = [v]_C$

הערה

אם $T: V \rightarrow W$ איזומורפיזם אזי: $[T]_F^E = [T^{-1}]_E^F$ V בסיס E של V , W בסיס F של W

אם שוב ניקח $W=V$, T העתקת זהות נקבל $P_B^C = (P_C^B)^{-1}$

תרגיל 6.2

יהיו $V = \mathbb{R}^2[x], W = \mathbb{R}_2[x]$ עם הבסיסים $E = \{(1,2), (3,4)\}, F = \{1+x^2, x^2-1, x+5\}$. תהי $T: V \rightarrow W$ הע"ל המוגדרת ע"י $T(a,b) = 3ax - 2bx^2$. מצאו את $[T]_F^E$.

פתרון

בעיקרון ההגדרה של $[T]_F^E = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_F & \dots & [T(v_n)]_F \\ | & & | \end{pmatrix}$

E, F אינם בסיסים סטנדרטיים ואנחנו נעדיף לעבוד עם הסטנדרטיים. נעזר במטריצות מעבר:

$$[T]_F^E = [I]_F^{S_2} [T]_{S_2}^{S_1} [I]_{S_1}^E$$

$$[I]_{S_1}^E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, [I]_F^{S_2} = ([I]_{S_2}^F)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{S_2}^{S_1} = ? \quad T(1,0) = 3x, T(0,1) = -2x^2 \Rightarrow [T]_{S_2}^{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} & -\frac{53}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{37}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

הגדרה

תהי $T: V \rightarrow W$ הע"ל. נגדיר:

$$\begin{aligned} \text{א) } \ker(T) &= \{v \in V: T(v) = 0_W\} - \text{הגרעין של } T \\ \text{ב) } \text{Im}(T) &= \{w \in W: \exists v \in V \ T(v) = w\} - \text{התמונה של } T \end{aligned}$$

הערה

$\ker(T) \subseteq V$ ת"מ, $\text{Im}(T) \subseteq W$ ת"מ.

דוגמה

נמצא את הגרעין והתמונה של הע"ל $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שמוגדרת: $T(x, y, z) = (x, x)$

פתרון

$$\begin{aligned} \text{גרעין: } (x, y, z) \in \ker T &\Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, x) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0 \\ \ker T &= \{(0, y, z): y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1): y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span} \underbrace{\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}}_{\text{בסיס ל } \ker T} \end{aligned}$$

כי $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ בת"ל

$$\dim \ker T = 2$$

התמונה של T : יהי $(a, b) \in \text{Im } T$ אזי קיים $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ כך ש $T(x, y, z) = (a, b)$, כלומר קיים $a = b \Leftrightarrow (x, x) = (a, b)$ כך ש $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Im } T = \{(a, a): a \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1)\}, \dim \text{Im } T = 1$$

$$\text{מתקיים } \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_3 = \underbrace{\dim \text{Im } T}_1 + \underbrace{\dim \ker T}_2 \text{ . זה לא מקרי}$$

הערה

תהי $T: V \rightarrow W$ הע"ל. נניח $\dim V = n, \dim W = m$ ותהי A המטריצה המייצגת של T בבסיסים כלשהם. אזי:

$$\begin{aligned} \text{א) } V &\cong \mathbb{F}^n, W \cong \mathbb{F}^m \\ \text{ב) } \ker T &\cong \{x \in \mathbb{F}^n: Ax = 0\} \\ \text{ג) } \text{Im } T &\cong C(A) \subseteq \mathbb{F}^m \end{aligned}$$

דוגמה (לא קשורה להערה האחרונה)

תהא $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ הע"ל נתונה ע"י המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (כלומר $T(c) = Av$). מצאו את

הגרעין והתמונה של T .

פתרון

$\ker T$? נדרג את A ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא $\dim \ker T = 1$, $\ker T = \{(-3t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-3, 0, 1)\}$

$\text{Im } T = C(A)$ עמודות הציר הן עמודות 1 ו-2 (העמודות של המשתנים המובילים לאחר דירוג

המטריצה) במטריצה המקורית, כלומר $\dim \text{Im } T = 2$, $\text{Im } T = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

תרגיל (כן קשור להערה)

מצאו את הגרעין והתמונה של הע"ל $T_A: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ הנתונה ע"י $T_A(x) = Ax - xA$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון

נמצא את המטריצה המייצגת של T_A בבסיסים הסטנדרטיים ונסמנה $[T_A]$:

$$\begin{aligned} T_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ T_A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, T_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ [T_A] &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{\text{במהלך}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{\text{לאחר}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\ker T_A \cong \left\{ \left(\frac{s+3t}{3}, 0, s, t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{3}, 0, 1, 0 \right), (1, 0, 0, 1) \right\}$$

$\Downarrow$

$$\ker T_A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \dim \ker T = 2$$

$$\text{Im } T_A \cong \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Im } T_A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \dim \text{Im } T_A = 2$$

תרגיל (2.3 עמ' 56)

תהא $T: V \rightarrow V$ הע"ל. הוכיחו:

$$\ker T \subseteq \ker(T^2) \quad (\text{א})$$

$$\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T) \quad (\text{ב})$$

פתרון

(א) יהי $v \in \ker T$ אזי $T(v) = 0 \Rightarrow T^2(v) = T(T(v)) = T(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker(T^2)$
 (ב) יהי $v \in \operatorname{Im}(T^2)$ אזי $v = T^2(w) = T(T(w))$ לכן קיים $z = T(w)$ כך ש- $v = T(z) \Rightarrow v \in \operatorname{Im} T$

תרגיל 2.5

הוכיחו/הפריכו: יהיו $S, T: V \rightarrow V$ הע"ל כך ש- $\ker S = \ker T$, $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} T$, אזי $T = S$.

הפרכה

ניקח $T, S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרות ע"י $T(x) = x$, $S(x) = 2x$. ברור כי $T \neq S$ אבל

$$\ker T = 0 = \ker S$$

$$\operatorname{Im} T = \mathbb{R} = \operatorname{Im} S$$

תרגיל 2.9 (עמ' 56)

תהא $T: V \rightarrow V$ הע"ל המקיימת $T^2 = I$. יהיו $U = \ker(T - I)$, $W = \ker(T + I)$. הוכיחו $V = U \oplus W$ ($\forall$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$)

הוכחה

$$(1) U \cap W = \{0\}$$

יהי $v \in U \cap W = \ker(T - I) \cap \ker(T + I)$ ולכן

$$(T - I)(v) = 0 \Rightarrow T(v) - v = 0 \Rightarrow T(v) = v$$

כמו כן $v \in W = \ker(T + I)$ ומכאן

$$(T + I)(v) = 0 \Rightarrow T(v) + v = 0 \Rightarrow T(v) = -v$$

$$\text{מכאן } v = 0 \Rightarrow (1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}})v = 2v = 0 \Rightarrow v = -v$$

(2) נניח שלכל $v \in V$ קיימים $u \in U$, $w \in W$ כך ש- $v = u + w$, אזי:

$$T(v) = T(u) + T(w) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} u \in \ker(T - I) \\ (T - I)u = 0 \\ \Downarrow \\ T(u) - u = 0 \\ T(u) = u \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} w \in W \\ \Downarrow \\ T(w) = -w \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2^{-1}(v+T(v))=u \Leftarrow v+T(v)=2u \\ 2^{-1}(v-T(v))=w \Leftarrow v-T(v)=2w \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u + w \\ T(v) = u - w \end{cases} \text{ "קייבלנו"}$$

נותר לבדוק ש- $2^{-1}(v+T(v)) \in U = \ker(T - I)$ (*)
 $2^{-1}(v-T(v)) \in W = \ker(T + I)$ (**)

נבדוק רק את (*):

$$(T - I)(2^{-1}(v + T(v))) = 2^{-1}(T(v) + T^2(v) - I(v) - I(T(v))) = w^{-1}0_V = 0_V$$

לכן (*) מתקיים

משפט הדרגה

תאה $T: V \rightarrow W$ הע"ל. אזי $\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$

הערה

נניח $\dim V = n, \dim W = m$ ונסמן $[T] = A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ (מטריצה מייצגת)

נסמן $\operatorname{Null}(A) = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$ מרחב האפס של המטריצה.

כעת ניתן לכתוב את משפט הדרגה באופן הבא:

$$n = \underbrace{\dim(\operatorname{Null}(A))}_{\text{מספר משתנים חופשיים}} + \underbrace{\operatorname{rank}(A)}_{\text{מספר משתנים מובילים}}$$

תרגיל 2.10 (עמ' 56)

תאה $T: V \rightarrow W$ הע"ל. הוכיחו שהתכונות הבאות שקולות:

- (א) $\ker T = \{0_V\}$
- (ב) T חח"ע

פתרון

בא: נניח בשלילה ש $\ker T \neq \{0_V\}$ אזי קיים $v \neq 0_V$ כך ש $T(v) = 0_W = T(0_V)$ בסתירה לכך ש T חח"ע.

בב: נניח שקיימים v, w כך ש $T(v) = T(w)$ אזי $T(v) - T(w) = 0_W$ $T(v - w) = 0_W$ מצד שני $\ker T = \{0_V\}$ לכן $v - w = 0_V$ $v = w$.

מסקנה מהתרגיל

תאה $T: V \rightarrow W$ הע"ל אזי $\operatorname{Im}(T) = w$ וגם $\ker(T) = \{0_V\}$ בנוסף, אם $\dim V = \dim W$ אזי T על $\Leftrightarrow T$ חח"ע.

הוכחה

$$\Leftrightarrow \dim \ker T = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim \ker T + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{=\dim W = \dim V}$$

$\ker T = \{0_V\} \Leftrightarrow T$ חח"ע.ג

בפרט אם $V = W$ אזי T אופרטור הפיך $\Leftrightarrow T$ חח"ע.

תרגיל 2.13

- א. האם קיימת הע"ל $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ המקיימת $\operatorname{Im} T = \ker T$?
- ב. האם קיימת הע"ל $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ המקיימת $\operatorname{Im} T = \ker T$?

פתרון

א. הפרכה: נניח בשלילה כי קיימת הע"ל כזו אזי

$$5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 2 \dim \ker T \Rightarrow \dim \ker T = 2 \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

ב. כן! נגדיר את ההעתקה ע"י משפט ההגדרה:

$$T(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$T(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$T(0,0,1,0) = (1,0,0,0)$$

$$T(0,0,0,1) = (0,1,0,0)$$

$$\ker T = \operatorname{Im} T = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$$

תרגיל 2.18

תהא $T: V \rightarrow V$ הע"ל. הוכיחו שהתכונות הבאות שקולות:

$$\ker(T^2) = \ker(T) \quad (\text{א})$$

$$\operatorname{Im}(T^2) = \operatorname{Im}(T) \quad (\text{ב})$$

$$V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T \quad (\text{ג})$$

פתרון

נוכיח ב $\Leftarrow$ א $\Leftarrow$ ג $\Leftarrow$ ב

ב $\Leftarrow$ א: ראינו בתרגיל 2.3 שמתקיים $\ker(T) \subseteq \ker(T^2)$. כדי להראות שוויון נראה שוויון מימדים: מתקיים:

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$$

$$\dim V = \dim \ker T^2 + \dim \operatorname{Im}(T^2)$$

$\Downarrow$

$$\dim \ker T = \dim \ker(T^2)$$

א $\Leftarrow$ ג: 1) יהי $v \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$ אזי $T(v) = 0$ וכן קיים $w \in V$ כך ש $v = T(w)$. נפעיל T ע"ך שני האגפים ונקבל $T^2(w) = T(v) = 0 \Leftrightarrow T^2(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \ker(T^2) \Leftrightarrow \ker T = \ker(T^2) \Leftrightarrow w \in \ker(T) \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow T(w) = 0$

$$\ker T + \operatorname{Im} T \subseteq V \quad ? V = \operatorname{Im} T + \ker T \quad (2)$$

לפי משפט המימדים: $\dim(\ker T + \operatorname{Im} T) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T - \dim(\ker T \cap \operatorname{Im} T)$

לכן $\dim(\ker T + \operatorname{Im} T) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ ממשפט הדרגה נקבל:

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim V = \dim(\ker T + \operatorname{Im} T) \Rightarrow V = \ker T + \operatorname{Im} T$$

ג $\Leftarrow$ ב: ראינו כבר $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$. נראה את ההכלה השנייה.

יהי $v \in \operatorname{Im}(T)$ אזי קיים $u \in V$ כך ש $v = T(u)$. $u \in V$ ע"פ ג' ניתן לכתוב $u = \underbrace{u_1}_{\in \ker T} + \underbrace{u_2}_{\in \operatorname{Im} T}$

$\Leftarrow$

$$T(u) = T(u_1) + T(u_2) \Rightarrow T(u) = T(u_2)$$

$$T^2(w) = v \text{ נקבל } (*) \text{ מ} T(u) = T(u_2) = T^2(w) \text{ ולכן } T(w) = u_2 \text{ כך ש} \exists w \in V \Leftarrow u_2 \in \operatorname{Im} T \Leftarrow v \in \operatorname{Im} T^2 \Leftarrow$$

תרגיל 2.19

בתרגיל זה נוכיח את משפט הדרגה הפוך:

יהי V מ"ו ממימד n .

(א) יהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ כך שמתקיים $\dim U + \dim W = n$. הוכיחו שקיימת הע"ל $T: V \rightarrow V$

$$\begin{aligned} \ker T &= W \\ \operatorname{Im} T &= U \end{aligned}$$

(ב) הסיקו שלכל שני מספרים k, m כך ש $k + m = n$ קיימת הע"ל $T: V \rightarrow V$ כך

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} T &= \dim \operatorname{Im} T = m \\ \nu(T) &= \dim \ker T = k \end{aligned}$$

פתרון

(א) מקרה ראשון: $\dim U = 0$ או $\dim U = n$. אם $\dim U = 0$ אז ניקח $T = 0$ נקבל $\operatorname{Im} T = \{0\} = U$, אם $\dim U = n$ ניקח $T = I$ נקבל $\ker T = \{0\} = W$.

מקרה שני: $\dim U \geq 1, m = \dim U \geq 1, k = \dim W \geq 1$. ניקח בסיס B ל W $B = \{w_1, \dots, w_k\}$ ובסיס C ל U $C = \{u_1, \dots, u_m\}$.

נשלם את B לבסיס D עבור V : $D = \left\{ w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_{k+m} \right\}$ נגדיר הע"ל $T: V \rightarrow V$

באופן הבא: $T(w_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq k$ $T(w_{k+i}) = u_i, \forall 1 \leq i \leq m$. קיימת הע"ל שכזו והיא יחידה ע"פ משפט

ההגדרה. נראה שמתקיים $\operatorname{Im} T = U, \ker T = W$

$W \subseteq \ker T$ כי לכל $w \in B$ מתקיים $T(w) = 0$. נוכיח את ההכלה ההפוכה. יהי $v \in \ker T$.

מתקיים $T(v) = 0$, מצד שני $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ כי D בסיס ל V .

$$0 = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(w_i) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i T(w_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^k \alpha_i T(w_i)}_{=0} = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i T(w_i)$$

$$= \sum_{i=k+1}^n \alpha_i u_i = \alpha_{k+1} u_1 + \dots + \alpha_n u_m = 0$$

אבל ידוע ש $\{u_1, \dots, u_m\}$ בסיס ולכן בת"ל, לכן $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ לכן:

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i \xrightarrow{\text{בסיס } \{w_1, \dots, w_k\} \text{ ל } W} v \in W$$

לכן $W \subseteq \ker T$

מצד שני מתקיים $U \subseteq \operatorname{Im} T$ (כי כל $u_i = T(w_{k+i})$). ממשפט הדרגה מתקיים

$$n = \dim V = \underbrace{\dim \ker T}_k + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{n-k=m=\dim U}$$

לכן $\operatorname{Im} T = U$

(ב) מיידי מא'.

הערה

$$2.20 \quad n = \dim V \geq \dim(\ker T + \operatorname{Im} T) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T - \dim(\ker T \cap \operatorname{Im} T)$$

תרגיל 2.20

יהי V מ"ו מממד n מעל שדה $\mathbb{F}$. תהא $0 \neq T: V \rightarrow \mathbb{F}$. הוכיחו:

- (א) $\dim \operatorname{Im} T = 1$
 (ב) $\dim \ker T = n - 1$
 (ג) יהא $v_0 \in V$ כך ש- $T(v_0) \neq 0$. נסמן $\langle v_0 \rangle = \operatorname{span}\{v_0\}$. הוכיחו: $\ker T = \langle v_0 \rangle^\perp$
 (ד) אם $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ בסיס עבור $\ker T$ אזי $B = \{v_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ בסיס עבור V .

פתרון

$\dim \operatorname{Im} T = 0$ אזי $\dim \operatorname{Im} T < 1$ נניח בשלילה ש- $\dim \operatorname{Im} T \leq 1$ לכן $\dim \mathbb{F} = 1$, $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{F}$ אזי $\dim \operatorname{Im} T = 1$ סתירה, לכן $\dim \operatorname{Im} T = 1$

(ב) מידי ממשפט הדרגה, כי $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V = n$ אזי $\dim \ker T = n - 1$

$$\dim(\ker T + \langle v_0 \rangle) = \underbrace{\dim \ker T}_{=n-1} + \underbrace{\dim \langle v_0 \rangle}_{=1} - \dim(\ker T \cap \langle v_0 \rangle)$$

$\uparrow$
 $\dim \langle v_0 \rangle = \dim \operatorname{span}\{v_0\} = 1$
 $\uparrow$
 $v \neq 0_V$
 $\uparrow$
 $T(v) \neq 0_{\mathbb{F}}$

קיבלנו $\dim(\ker T + \langle v_0 \rangle) = n - \dim(\ker T \cap \langle v_0 \rangle)$. נראה ש- $\ker T \cap \langle v_0 \rangle = \{0\}$, אחרת קיים $v \neq 0$ כך ש- $v \in \ker T \cap \operatorname{span}\{v_0\}$. מתקיים $v = \alpha v_0$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$. (אחרת $v = 0$). כמו כן $v \in \ker T$ לכן $T(v) = T(\alpha v_0) = 0$ ונקבל סתירה. מכאן $\ker T \cap \operatorname{span}\{v_0\} = \{0\}$. לכן $\dim(\ker T + \operatorname{span}\{v_0\}) = n + \dim \ker T - \dim(\ker T \cap \operatorname{span}\{v_0\}) = n + (n-1) - 0 = 2n-1$. מכאן $\ker T + \operatorname{span}\{v_0\} = V$.

(ד) נניח $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ בסיס עבור $\ker T$. צ"ל $B = \{v_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ בסיס עבור V . הוכחה: נראה תחילה ש- B בת"ל. אחרת נקבל ש- $v_0 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{n-1} w_{n-1}$ (נתון ש- $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ בת"ל). מצב זה לא יתכן כי אז $T(v_0) = \alpha_1 T(w_1) + \dots + \alpha_{n-1} T(w_{n-1}) = 0$ בסתירה לבחירת v_0 . מתקיים $\dim V = n$, $B = \{v_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ בת"ל מגודל n ולכן היא גם פורשת (בסה"כ בסיס).

תרגיל 2.24

הוכיחו או הפריכו: תהא $T: V \rightarrow W$ הע"ל. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס עבור V כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $T(v_i) \neq 0$ אזי $\ker T = \{0\}$

תשובה

הפרכה: יהי $V = \mathbb{R}^2$ עם הבסיס הסטנדרטי. נגדיר $T(1,0) = (1,1)$, $T(0,1) = (1,1)$. המטריצה המייצגת של T היא

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ לכן } T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y, x+y)$$

$$\ker T = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1, -1)\} \neq \{0\}$$

שאלה ממבחן

תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

- א. הוכיחו שלמטריצת $A \in \mathbb{F}^{n \times k}$ מתקיים $AB = 0 \Leftrightarrow C(B) \subseteq \text{Null } A$
- ב. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ כך ש $\text{rank } A = \text{rank } B = 2$. הוכיחו ש $AB \neq 0$
- ג. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימת $A^2 = 0$. הוכיחו ש $\text{rank } A \geq \frac{n}{2}$

פתרון

א. $AB = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k: C_i(AB) = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k: A * C_i(B) = 0 \Leftrightarrow C(B) \subseteq \text{Null } A$

ב. נניח בשלילה ש $AB = 0$, אזי נקבל מא' ש $C(B) \subseteq \text{Null } A$. ממשפט הדרגה נקבל

$$\begin{aligned} 3 &= \overbrace{\text{rank } A}^{=2} + \dim \text{Null } A \Rightarrow \dim \text{Null } A = 1 \\ \dim C(B) &= \text{rank } B = 2 \\ C(B) \subseteq \text{Null } A &\Rightarrow \dim C(B) \leq \dim \text{Null } A \\ &2 \leq 1 \quad \text{סתירה} \end{aligned}$$

ג. נתון $A^2 = 0$ ולכן ע"פ א' ($B = A$) נקבל $C(A) \subseteq \text{Null } A$. ממשפט הדרגה $n = \text{rank } A + \dim \text{Null } A$. מתקיים $C(A) \subseteq \text{Null } A \Leftrightarrow \dim C(A) \leq \dim \text{Null } A$. מ(*) $n = \text{rank } A + \dim \text{Null } A$ נקבל $\text{rank } A \geq \frac{n}{2}$

עוד שאלה ממבחן

יהיו $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k}$

- א. הוכיחו שאם עמודות AB בת"ל אזי גם עמודות B בת"ל.
- ב. נניח שעמודות B בת"ל. הראו שתנאי הכרחי לכך שעמודות AB בת"ל הוא $\text{rank } A \geq k$

פתרון

א. נתון שעמודות AB בת"ל. לכן $\text{rank } AB = \underbrace{k}_{\text{מספר העמודות של } k}$. כמו כן $\text{rank } B \geq \text{rank } AB$. לכן $\text{rank } B \geq k$

ב. יש להוכיח שאם עמודות AB בת"ל אזי $\text{rank } A = k$. הוכחה: $\text{rank } AB = k$, כמו כן $\text{rank } A \geq \text{rank } AB$, לכן $\text{rank } A \geq k$

הגדרה

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. העתקה לינארית $T: V \rightarrow \mathbb{F}$ נקראת פונקציונל לינארי.

דוגמה

$tr: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$ כאשר לכל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתקיים $tr A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ כי מתקיים

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$$

$$tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$$

הגדרה

אוסף הפונקציונלים $T: V \rightarrow \mathbb{F}$ נקרא המרחב הדואלי של V ומסומן V^* .

הערה

V^* הוא מ"ו ביחס לחיבור פונקציונלים וכפל בסקלר של פונקציונל.

1.5 תרגיל

הוכח שלכל $\varphi \in \mathbb{F}^*$ יש $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש $\varphi(x) = \alpha x$.

פתרון

[בהנחה שהטענה נכונה $\varphi(1) = \alpha$]

יהי $\varphi \in \mathbb{F}^*$. נגדיר $\alpha = \varphi(1)$. נראה שמתקיים הדרוש: $\varphi(x) = \varphi(x * 1) = x\varphi(1) = x\alpha$

הערה

שימו $\heartsuit$ שאיברי $\mathbb{F}$ הם גם סקלרים וגם וקטורים (של $\mathbb{F}$ מעל עצמו)

1.6 תרגיל

יהי V מ"ו ויהיו $u, v \in V$ כך שלכל $u \in V^*$ המקיים $\varphi(u) = 0$ מתקיים $\varphi(v) = 0$. הוכח שיש $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש $\alpha v = u$.

הוכחה

מקרה ראשון - $u = 0$ נראה שבהכרח $v = 0$ ואז נבחר למשל $\alpha = 0$. אחרת, $u = 0, v \neq 0$ נקבל $\{v\}$ בת"ל, נשלימה לבסיס B .

יהי $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \neq v \\ 1 & x = v \end{cases}, \forall x \in B$, אזי φ מוגדר ויחיד ע"פ משפט ההגדרה. מתקיים $\varphi(u) = \varphi(0) = 0$ אבל $\varphi(v) = 1$. סתירה.

מקרה שני - $u \neq 0$ נוכיח ש u, v ת"ל. נניח בשלילה שהם בת"ל אזי ניתן להשלימם לבסיס B' ולהגדיר $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \neq v \\ 1 & x = v \end{cases}, \forall x \in B'$. φ מוגדר ויחיד ע"פ משפט ההגדרה. $\varphi(u) = 0, \varphi(v) = 1$. סתירה.

לכן u, v תלויים לינארית ולכן קיים צירוף לינארי לא טריויאלי $\lambda y + \mu v = 0$. נראה ש $\mu \neq 0$. אחרת, $\mu = 0$ ואז $\lambda \underset{\neq 0}{u} = 0$ לכן $\lambda = \mu = 0$ וזה צירוף טריויאלי בסתירה לכך שהצירוף אינו טריויאלי. לכן

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\mu} \text{ נגדיר } v = -\frac{\lambda}{\mu} u$$

הערה לגבי מבנה פונקציונלים

ראינו בעבר שאם $W = \mathbb{F}^m, V = \mathbb{F}^n$ אז כל העתקה לינארית $T: V \rightarrow W$ ניתנת לזיהוי עם $T(v) = Av, A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

במקרה שבו $W \cong \mathbb{F}^m, V \cong \mathbb{F}^n$ הטענה נכונה עד כדי איזומורפיזם.

כעת, במקרה של פונקציונל לינארי $T: V \rightarrow \mathbb{F}$ ניתן לחשוב על כל פונקציונל שכזה כ $\varphi: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ כדי איזומורפיזם.

$$\varphi(v) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n : A \in \mathbb{F}^{1 \times n} \text{ עם } \varphi \text{ את } \mathbb{F}^{1 \times n}$$

הגדרה+משפט

יהי V מ"ו עם בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. אזי קיים בסיס דואלי B^* ל V^* $B^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ כאשר $\forall 1 \leq i, j \leq n: \varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

הערות

- שימו ♥ שלפי משפט ההגדרה ברגע שכבאנו את כרכי φ_i על אברי הבסיס B קבענו את φ_i בצורה יחידה.
- אם $\dim V = n$ אזי $\dim V^* = n$

3.3 תרגיל

יהי $V = \mathbb{C}^3$. יהי $B = \{(i, i, i), (i, i, 0), (i, 0, 0)\}$ בסיס.

(א) מצאו בסיס דואלי $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ עבור V^*

פתרון

לפי הגדרת הבסיס הדואלי נקבל $\varphi_1(i, i, i) = \varphi_2(i, i, 0) = \varphi_3(i, 0, 0)$. בנוסף:

$$\varphi_1(i, i, 0) = \varphi_1(i, 0, 0) = \varphi_2(i, i, i) = \varphi_2(i, 0, 0) = \varphi_3(i, i, i) = \varphi_3(i, i, 0) = 0$$

ע"פ הערה לעיל ניתן לזהות את φ_1 עם מטריצה $A = (a_1, a_2, a_3)$ כך ש:

$$\begin{cases} \varphi_1(i, i, i) = a_1 i + a_2 i + a_3 i = 1 \\ \varphi_1(i, i, 0) = a_1 i + a_2 i = 0 \\ \varphi_1(i, 0, 0) = a_1 i = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_2(i, i, i) = b_1 i + b_2 i + b_3 i = 0$$

באופן דומה ניתן לזהות את φ_2 עם $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\varphi_2(i, i, 0) = b_1 i + b_2 i = 1$

$$\varphi_2(i, 0, 0) = b_1 i = 0$$

באופן דומה ניתן לזהות את φ_3 ונקבל עוד מערכת משוואות. נפתור את כולן בבת אחת:

$$\begin{array}{c} \text{אחרי} \\ \text{כמה} \\ \text{שלבים} \end{array} \begin{pmatrix} i & i & i & 1 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

מקבלים $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = -i$ לכן

$$\varphi_1(a + bi, c + di, e + fi) = a_1(a + bi) + a_2(c + di) + a_3(e + fi) = f - ie$$

תרגיל 3.5

יהי V מ"ו עם בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ הבסיס המתאים ו $v \in V$. אזי $[v]_B = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$

הוכחה

יהי $v \in V$ ונניח $[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, כלומר $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. צ"ל $\alpha_j = \varphi_j(v)$ $\forall 1 \leq j \leq n$.

$$\varphi_j(v) = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \underset{\text{לינאריות של } \varphi_j}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_j(v_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_i \underbrace{\varphi_j(v_i)}_{=0} + \alpha_j \underbrace{\varphi_j(v_j)}_{=1} = \alpha_j$$

תרגיל 3.10

יהא $B = \{(1,0,3), (0,2,2), (0,2,1)\}$ בסיס עבור $\mathbb{R}^3$.

א. מצאו את הבסיס הדואלי B^* בצורה ישירה.

הערה לפתרון של א'

ניתן לפתור בדיוק כמו תרגיל 3.3 ולקבל

$$\varphi_1(x, y, z) = x, \varphi_2(x, y, z) = -3x - \frac{1}{2}y + z, \varphi_3(x, y, z) = 3x + y - z$$

ב. מצאו את הבסיס הדואלי B^* בעזרת מטריצת מעבר מתאימה.

פתרון(לב')

$$P_{S^*}^{B^*} = (P_B^S)^t$$

$$P_S^B [v_B] = [v]_S \text{ מטריצת מעבר מ } B \text{ למקיימת } P_S^B$$

$$P_S^{B^*} = ((P_S^B)^{-1})^t, \text{ לכן בסה"כ } (P_S^B)^{-1} = (P_B^S) \text{ מתקיים } P_S^B = ([b_1]_S, [b_2]_S, [b_3]_S)$$

$$P_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(P_B^S)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{P_{S^*}^{B^*}}$$

$$s_3^*(x, y, z) = z, s_2^*(x, y, z) = y, s_1^*(x, y, z) = x \begin{cases} s_1^*(1,0,0) = 1 \\ s_2^*(0,1,0) = 1 \\ s_3^*(0,0,1) = 1 \end{cases} S^* = \{s_1^*, s_2^*, s_3^*\}$$

$$\Leftrightarrow P_{S^*}^{B^*} = \left(\begin{bmatrix} | \\ \varphi_1 \\ | \end{bmatrix}_{S^*}, \begin{bmatrix} | \\ \varphi_2 \\ | \end{bmatrix}_{S^*}, \begin{bmatrix} | \\ \varphi_3 \\ | \end{bmatrix}_{S^*} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ מתקיים}$$

$$\varphi_1 = s_1^* * 1 + 0s_2^* + 0\varphi_3^*$$

$$\varphi(x, y, z) = s_1^*(x, y, z) = x$$

$$\varphi_2(x, y, z) = 3s_1^*(x, y, z) - \frac{1}{2}s_2^*(x, y, z) + 1 * s_3^*(x, y, z) = 3x - \frac{1}{2}y + z$$

$$\varphi_3(x, y, z) = 3x + y - z \text{ באופן דומה}$$

ג. יהי $v = (0,1,1)$ חשבו את $[v]_B$

פתרון(לג')

שימו לב $b_2 = (0,2,2)$ ולכן $[v]_B = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

דראנו 3.5 ש

$$\begin{aligned}[v]_B &= (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)) \Rightarrow [(0,1,1)]_B = (\varphi_1(0,1,1), \varphi_2(0,1,1), \varphi_3(0,1,1)) \\ &= \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)\end{aligned}$$

מבחן 2008

- א) יהי $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ תת מרחב. הוכיחו שקיים ת"מ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש $\mathbb{R}^n = U \oplus V$
 ב) יהיו $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ תתי מרחב המוגדרים ע"י $U = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = 0\}$, $V = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$ הוכיחו ש $\mathbb{R}^n = U \oplus V$

פתרון

- א) אם $V = \mathbb{R}^n$ ניקח $U = \{0\}$, אם $U = \mathbb{R}^n$ ניקח $V = \{0\}$. נניח $V \subsetneq \mathbb{R}^n$ ו $\{0\} \subsetneq V$. אזי קיים ל V בסיס $B = \{v_1, \dots, v_k\}$. נשלים את B לבסיס עבור $\mathbb{R}^n$ נסמנו $C = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k}\}$. נגדיר $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-k}\}$. מתקיים $U + V = \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-k}\} + \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-k}, v_1, \dots, v_k\} = \mathbb{R}^n$
 $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim(U + V) = \underbrace{\dim U}_{n-k} + \underbrace{\dim V}_k - \dim(U \cap V) \Rightarrow \dim(U \cap V) = 0 \Rightarrow U \cap V = \{0\}$

- ב) $U \cap V = \{0\}$ - קל לראות כי מתקיים $x_1 = \dots = x_n$ ו $x_1 + \dots + x_n = 0 \Leftrightarrow nx_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$
 $V = \text{span}\{(1, 1, \dots, 1)\} \Rightarrow \dim V = 1$
 $\dim U = n - 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{משוואה הומוגנית} \\ \text{עם } n - 1 \text{ משתנים חופשיים} \end{array} \right)$
 $n = \dim(U + V) = \underbrace{\dim U}_{n-1} + \underbrace{\dim V}_1 - \underbrace{\dim(U \cap V)}_0$
 $\dim(U + V) = \dim \mathbb{R}^n \Rightarrow U \oplus V = \mathbb{R}^n$
 $U + V \subseteq \mathbb{R}^n$

שאלה(מבחן 2008)

- א) האם לכל שלושה תתי מרחבים $U, V, W \subseteq \mathbb{F}^n$ מתקיים $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

פתרון

- $U = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$
 לא! דוגמה נגדית: ניקח את $\mathbb{R}^2$. $V = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. נקבל $V + W = \mathbb{R}^2$.
 $W = \{(0, s) : s \in \mathbb{R}\}$
 $U \cap (V + W) = U$
 $U \cap V = \{(0, 0)\}, U \cap W = \{(0, 0)\}$
 $(U \cap V) + (U \cap W) = \{(0, 0)\} \neq U$

- ב) הוכיחו שמתקיים $(U + W) \cap (W + V) \cap (U + V) = ((W + V) \cap U) + ((V + U) \cap W)$

פתרון

≤: יהי x שייך לאגף שמאל אזי

$$\begin{pmatrix} u_1, u_2 \in U \\ v_1, v_2 \in V \\ w_1, w_2 \in W \end{pmatrix} x = u_1 + w_1 = w_2 + v_1 = u_2 + v_2$$

$$u_1 \in U \cap (W + V) \text{ ולכן } u_1 \in U \text{ כמו כן } u_1 = \underbrace{\left(-w_1 + w_2 \right)}_{\in W} + \underbrace{v_1}_{\in V}$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow w_1 = \left(\underbrace{-u_1 + u_2}_{\in U} \right) + \underbrace{v_2}_{\in V} \Rightarrow w_1 \in U + V$$

בסה"כ $w_1 \in (U + V) \cap W$

□

$$W + V \subseteq W + V \Rightarrow U \cap (W + V) \subseteq (W + V) \cap (U + V) \cap (U + W)$$

כמו כן:

$$V + U \subseteq V + U \Rightarrow (V + U) \cap W \subseteq (U + W) \cap (W + V) \cap (U + V)$$

מתכונת החיבור נובע:

$$((W + V) \cap U) + ((V + U) \cap W) \subseteq (U + W) \cap (W + V) \cap (U + V)$$

שאלה (מבחן 2009)

יהי $B = \{v_1, v_2\}$ בסיס כלשהו של $\mathbb{R}^2$ ויהי $W = v_1 + v_2$. הוכיחו שלכל $v \in \mathbb{R}^2$ יש הצגה יחידה בצורה $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w$ כאשר המקדמים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ מקיימים $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

פתרון

יהי $v \in \mathbb{R}^2$ אזי קיימת לו הצגה יחידה $v = av_1 + bv_2$ (כי $B = \{v_1, v_2\}$ בסיס). נרצה שיתקיים $v =$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 = b \end{cases}$$

אפשר לדרג את המטריצה ולראות

שאלה (מבחן 2010)

תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש $\text{rank}(A) = m$. הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמה נגדית:

(1) לכל $b \in \mathbb{F}^m$ למערכת $Ax = b$ יש פתרון.

הוכחה

$\text{rank } A = \dim C(A) = m$, מצד שני $C(A) \subseteq \mathbb{F}^m$. משני אלה $C(A) = \mathbb{F}^m \Leftrightarrow$ לכן לכל $b \in \mathbb{F}^m$ יש פתרון למערכת $Ax = b$.

$$\text{Null}(A) = \{0\} \quad (2)$$

הפרכה

$$n = \dim \text{Null}(A) + \underbrace{\text{rank}(A)}_{=m} \\ \text{Null}(A) = \{0\} \text{ נצטרך לקבל } n = 0$$

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$R(A) = \mathbb{F}^n \quad (3) \quad (\text{Rspan}(A) = \mathbb{R}^n)$$

הפרכה

אותה דוגמה נגדית: $\text{rank}(1 \ 2) = 1 \neq 2$

(4) שורות A בת"ל.

הוכחה

$\text{rank}(A) = m$ וקיימות m שורות לכן שורות m בת"ל.

(5) אם $m \neq n$ אזי עמודות A ת"ל

הוכחה

$\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ עמודות A בת"ל. נתון $\text{rank}(A) = m$ ולכן עמודות A בת"ל $\Leftrightarrow n = m$, אבל $m \neq n \Leftrightarrow$ עמודות A בת"ל.

שאלה(מבחן 2010)

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$. הוכיחו ש A, B לא הפיכות.

פתרון

נניח בשלילה ש A הפיכה או B הפיכה. (בה"כ?) נניח A הפיכה. אזי:
 $\text{rank } B \geq \text{rank } AB$ (תמיד נכון!). $\text{rank}(B) = \text{rank}(A^{-1}(AB)) \leq \text{rank}(AB)$ מכל זה $\Leftrightarrow \text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$. באופן דומה, אם נרשום $B = (BA)A^{-1}$ ניתן להסיק באופן דומה $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$. לכן $\text{rank}(BA) = \text{rank}(AB) = \text{rank } B$ בסתירה להנחה. באופן דומה ניתן להוכיח שאם B הפיכה נקבל סתירה.

שאלה(מבחן 2010)

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{Z}_2$ ו $U \subseteq V$ ת"מ. נניח ש $\dim U = 1, \dim V = 2$. חשבו כמה תתי מרחב $W \subseteq V$ שונים כך ש $V = U \oplus W$. נמקו את התשובה.

פתרון

$$V \cong \mathbb{Z}_2^2 = \left\{ (0,0), \underbrace{(0,1)}_a, \underbrace{(1,0)}_b, \underbrace{(1,1)}_{a+b} \right\}$$

$$1) U = \text{span}\{a\}$$

u קיימים 3 מצבים אפשריים ל $U = \text{span}\{b\}$ 2) $U = \text{span}\{a+b\}$ 3) $U = \text{span}\{a+b\}$

הם בת"ל (אינם כפולה אחד של השני).

W קיימים 2 מרחבים U . כנ"ל עבור מצבים 2 ו 3, לכן לכל $W_1 = \text{span}\{b\}$ עבור מצב 1: $W_2 = \text{span}\{a+b\}$

אפשריים.

הערה

מספר האיברים ב $\mathbb{F}^n$ כאשר $\mathbb{F}$ סופי הוא $|\mathbb{F}^n|$, אבל המימד של $\mathbb{F}^n$ מעל השדה $\mathbb{F}$ הוא $\dim \mathbb{F}^n = n$

שאלה

נתון $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$ וכן $AB = BA \neq 0$. הוכיחו $\text{rank}(A + B) \leq 1$.

פתרון

ראינו בעבר שמתקיים $C(A + B) \subseteq C(A) + C(B)$. לכן $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) = 2$. נראה ש $\text{rank}(A + B) \neq 2$:

$$\dim(C(A) + C(B)) = \underbrace{\dim(C(A))}_1 + \underbrace{\dim(C(B))}_1 - \dim(C(A) \cap C(B))$$

נראה ש $\dim(C(A) \cap C(B)) \neq 0$ (ואז $\dim(C(A) + C(B)) < 2$) וכן $\text{rank}(A + B) \leq 1$.

אחרת, $C(A) \cap C(B) = \{0\}$. מתקיים תמיד: $C(AB) \subseteq C(A)$ וכן $C(BA) \subseteq C(B)$. אצלנו $AB = BA \neq 0$ ולכן

$$C(AB) \subseteq C(A) \cap C(B) \neq \{0\} \quad \text{כי } AB \neq 0 \quad \text{סתירה.}$$

שאלה

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימות $AB = 0$. נתון שהמטריצה $A + B$ הפיכה. הוכיחו $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = n$.

פתרון

נפתור את השאלה ב-3 סעיפים:

א) $C(B) \subseteq \text{Null}(A) \Leftrightarrow AB = 0, A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$

ב) $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

ג) השאלה המקורית.

פתרון

$C(B) \subseteq \text{Null}(A)$. לפי משפט הדרגה $\dim \text{Null}(A) = n - \text{rank}(A)$. לכן $n \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \quad \text{מש"ל. } n \quad \text{אי שוויון המשולש}$$

שאלה

הוכיחו שתנאי הכרחי ומספיק לכך ש $\text{rank}(A) \leq 1$ הוא ש A ניתנת להצגה הבאה: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n)$

פתרון

$$\text{rank } A \leq \text{rank} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \leq 1 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow$$

$\Leftrightarrow$ מקרה א' $\text{rank}(A) = 0$, הציבו $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) = 0$

מקרה ב' $\text{rank}(A) = 1$. קיימת שורה שאינה שורת אפסים $R_i(A)$. נבחר $(b_1, \dots, b_n) = R_i(A)$.

$a_i = 1$. כל שורה אחרת $R_j(A)$ היא מהצורה $\alpha_j R_i(A)$. נבחר $a_j = \alpha_j$.