

בחנים ישנים של שמחה הורביץ

בוחן א עמ 1-3

בוחן ב עמ 4-6

בוחן ג עמ 7-11

בוחן ד עמ 12-16

פתרון לבוחן מועד א' תשס"א ד"ר הורביץ

1. נניח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ ו $0 < \varepsilon$ נתון. אזי:

- כמעט כל $a_n \geq L$ - לא נכון, אם ניקח $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$, אבל אין סוף מאיברי הסדרה קטנים מ $L = 0$.
- כמעט כל $a_n \geq L + \varepsilon$ - לא נכון, כי הסדרה מתכנסת ולכן כמעט כל איבריה מקיימים: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.
- כמעט כל $a_n \geq L - \varepsilon$ - נכון, ראו את ההסבר עבור ב'.
- אף תשובה לא נכונה, לא נכון הרי ג' נכונה!

2. אם הסדרות $(a_n), (b_n)$ מתכנסות במובן הרחב, באיזה תנאי ניתן להסיק שגם הסדרה $(a_n b_n)$ מתכנסת במובן הרחב?

א. נכון תמיד - לא נכון, קחו לדוגמא: $a_n = 1/n \rightarrow 0$, בעוד

$$a_n b_n = \begin{cases} \frac{2n}{n} = 2 & \text{זוגי} \\ \frac{3n}{n} = 3 & \text{אחדות} \end{cases} \quad \text{ואז } b_n = \begin{cases} 2n & \text{זוגי} \\ 3n & \text{אחדות} \end{cases}$$

מתכנסת.

- נכון אם $a_n \geq 0$ וגם $b_n \geq 0$ לכל n - לא נכון, ראו א'.
- נכון אם $a_n > 0$ וגם $b_n > 0$ לכל n - לא נכון, ראו א'.
- אף תשובה לא נכונה - התשובה שיש לסמן.

3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M \in \mathbb{R}$ באיזה תנאי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס?

א. תמיד - לא נכון, קחו לדוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ואת הסדרה $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ המכפלה היא } \infty$$

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט - נכון, כי על פי הנתון (b_n) מתכנסת ולכן

חסומה, לכן יש A המקיים לכל n ש $|b_n| \leq A$, ואז מתקיים כי לכל n

$$|a_n b_n| \leq A |a_n|, \text{ אבל אז } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} A |a_n| = A \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \text{ ולכן על פי מבחן}$$

ההשוואה הטור מתכנס בהחלט, ובוודאי מתכנס.

ג. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי - נכון, אך מוכל בתוך התשובה של התכנסות בהחלט ולכן לא נסמן אותה.

ד. אם (a_n) סדרה יורדת - נכון, אך נסמן את תשובה ב' כי אם הטור מתכנס אזי הסדרה חייבת להיות חיובית יורדת לאפס, ולכן הטור מתכנס בהחלט ושוב קבלנו את תשובה ב'.

4. טור מתכנס:

א. אם האיברים שלו שואפים לאפס – לא נכון, זהו תנאי הכרחי אך לא

$$\text{מספיק: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

ב. אם ההפרש בין איברים עוקבים שואף לאפס – לא נכון, ראו את הדוגמא הקודמת. עוד יותר מזה גם אם ההפרש בין איברים עוקבים של סדרת הסכומים החלקיים שואף לאפס זה עדין לא תנאי מספיק.

ג. אם לכל n הסכום של n איברים עוקבים שואף לאפס – לא נכון, שוב ראו את הדוגמא מ-א'.

ד. אף תשובה לא נכונה – נכון, על פי אלימינציה.

5. סדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב:

א. אם $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ - לא נכון, ראו את $a_n = (-1)^n n!$, שאינה מתכנסת בכלל אבל הריבוע שלה מתכנסת אינסוף.

ב. אם $a_{n+1} > a_n$ לכל n - נכון, כי הרי כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

ג. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ - לא נכון, קחו $a_n = 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$ שאינה מתכנסת אבל סכומה כן.

ד. אף תשובה לא נכונה – לא נכון.

6. נניח כי $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5$ וגם $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5$ ולכל n נגדיר $c_n = \max(a_n, \sqrt{a_n b_n})$, אזי $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5$

א. תמיד – נכון, כי אם נשים לב שגם $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 25$ ולכן $\sqrt{a_n b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5$

נראה שבעצם יש n_0 כך שלכל $n_0 < n$ מתקיים כי $|a_n - 5| < \varepsilon$ וגם

$$|\sqrt{a_n b_n} - 5| < \varepsilon \text{ כך שבכל מקרה } |c_n - 5| < \varepsilon$$

ב. אם $a_n \geq b_n$ עבור כמעט כל n - נכון, אבל לא נסמן כי התשובה א' מכילה את כל המקרים.

ג. אם הסדרות $(a_n), (b_n)$ מונוטוניות – נכון, אבל לא נסמן כי התשובה א' מכילה את כל המקרים.

ד. אף תשובה לא נכונה – לא נכון.

7. קבעו אם כל טור מתכנס על תנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר והצדיקו את תשובתכם.

א. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$. נבדוק התכנסות בהחלט: $\left| \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \right| = \frac{1}{n(\ln n)^2}$

נוכיח כי $\frac{1}{n(\ln n)^2}$ סדרה מונוטונית יורדת ל-0.

היות ומתקיים כי $n < n+1$ וכן $\ln n < \ln(n+1)$ אז מתקיים

$$\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2} < \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

כמו כן $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = 0$.

על כן מותר להשתמש במבחן העיבוי ולבדוק במקום את הטור הנתון את הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\ln 2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln 2)^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

השוואה הראשון הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\ln 2^n)^2}$ מתכנס, ולכן הטור שלו מתכנס יחד

איתו, ובסה"כ קיבלנו כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ מתכנס בהחלט!

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} - 1)$

נכפול את האיבר הכללי בצמוד ונראה מה נקבל:

$$\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} - 1 \right) = \frac{\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + 1 \right)}{\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + 1 \right)} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + 1 \right)} > \frac{1}{3\sqrt{n}}$$

אי השוויון האחרון נובע מכך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + 1 \right) = 2$, ולכן כמעט לכל n

מתקיים כי $\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + 1 \right) < 3$.

כעת, היות וידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}} = \infty$ גם הטור שלנו על פי מבחן השוואה

הראשון מתבדר ל- ∞ .

8. נניח כי לכל n $a_n > 0$ וכן $c_n > 0$ ומתקיים כי $-a_n \leq b_n \leq c_n$. אם נתון כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ו } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ מתכנסים, הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ מתכנס בהחלט.}$$

נגדיר $p_n = \frac{|b_n| + b_n}{2}$ ו $q_n = \frac{|b_n| - b_n}{2}$. כעת, לכל n מתקיים כי $p_n \leq c_n$, וכן $q_n \leq a_n$,

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסים על פי מבחן השוואה הראשון. ולכן על פי

המשפטים שנלמדו בכיתה מתחייב כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור המתכנס בהחלט.

פתרון לבוחן של ד"ר הורביץ סמסטר א' מועד ב'

1. סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב:
- תמיד – נכון, זהו משפט ידוע!! – זה מה שצריך לסמן.
 - אם היא עולה ממש – נכון, כי היא מתכנסת תמיד אבל זו תשובה המוכלת בתשובה א'.
 - אם היא חסומה – נכון, כי היא מתכנסת תמיד וזו תשובה המוכלת בתשובה א'.
 - אם היא בלתי חסומה – נכון, ראה ב' וג'.

2. נניח שקיים $0 < \varepsilon$ כך שלכל שני איברים בסדרה (a_n) מתקיים כי $|a_n - a_m| > \varepsilon$ אזי:
- (a_n) מתבדרת (במובן הצר) – נכון, כי אם סדרה מתכנסת במובן הצר אזי ידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_{n+1} = 0$ אבל זה סותר את הנתון כי לכל שני איברים $|a_n - a_m| > \varepsilon$.
 - כל תת סדרה של (a_n) מתבדרת (במובן הצר) – נכון, כי אם (a_{n_k}) תת סדרה של (a_n) המתכנסת במובן הצר אזי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} - a_{n_{k+1}} = 0$ אבל זו סתירה לנתון כי לכל שני איברים $|a_n - a_m| > \varepsilon$. תשובה זו מכילה את תשובה א' שכן כל סדרה היא גם תת סדרה של עצמה- ולכן זו התשובה שיש לסמן.
 - יתכן ש (a_n) חסומה – לא נכון, כי אם הסדרה חסומה אזי על פי בולצנו ווירשטראס חייבת להיות לה תת סדרה המתכנסת במובן הצר בניגוד לאמור בסעיף ב'.
 - אף תשובה לא נכונה – נו באמת!!

3. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. נניח שלכל N טבעי יש N איברים כך שמתקיים כי $\frac{1}{N} < a_n$.
- האיברים (a_n) אינם שואפים לאפס – לא נכון, ראו את הסדרה $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
 - הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר – נכון, היות והטור חיובי אז אם הוא מתכנס בהחלט לאותו סכום צריך להתכנס כל ערבוב סדר איבריו, נסדר את האיברים כך שיתקיימו אי השוויונים הבאים: $a_1 > 1, a_2 > \frac{1}{2}, a_3 > \frac{1}{3}, \dots$ וכך הלאה ואז על פי מבחן ההשוואה הוא חייב להתבדר. סתירה. לכן הטור המקורי לא יכול להתכנס, לכן הוא מתבדר.
 - יתכן ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס או מתבדר – לא נכון, ראו את סעיף ב'.
 - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס – לא נכון, ראו את סעיף ב'.

אופציה נוספת להוכיח כי הטור חייב להתבדר היא להוסיף לטור סוגריים באופן הבא, בסוגר הראשון איבר הגדור מ-1, הסוגר הבא יכיל איבר יחיד אם בסוגריים שלפניו מופיע המחבור $\frac{1}{2}$, אחרת יכיל את כל האיברים עד האיבר המחבור הראשון שגדול מ- $\frac{1}{2}$, וכך הלאה, סדרת הסכומים החלקיים של הטור החדש עם הסוגריים גדולה מסדרת הסכומים החלקיים של הטור ההרמוני ולכן הוא מתבדר, אבל זהו טור חיובי ולכן כל הסוגריים "חוקיים" ולכן נובעת התבדרות הטור המקורי.

4. לכל n נניח ש $a_n < 0$ וגם $b_n < 0$ ונניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אזי:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס – נכון, כי היות ומתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ולכן כמעט לכל n מתקיים כי $|b_n| < 1$ ואז $|a_n b_n| < |a_n|$ ולכן על פי מבחן

ההשוואה עם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ הטור מתכנס בהחלט.

ב. יתכן כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס או מתבדר – לא נכון, הרי הוכחו את התכנסותו בודאות ב-א'.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתבדר – לא נכון, ראו את ב' וא'.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ מתבדר – לא נכון, קחו לדוגמא את הטורים $a_n = -\frac{1}{n^2}$, $b_n = -\frac{1}{n^3}$ אבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

שהוא טור מתכנס.

5. נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ ולכל n נגדיר $b_n = \inf_{k \leq n} a_k$. אזי:

א. הסדרה (b_n) יורדת – לא נכון, קחו בשביל (a_n) כל סדרה מונוטונית עולה ותקבלו שזה לא עובד.

ב. הסדרה (b_n) עולה – נכון, היות ומתקיים כי $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \subseteq \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ מתקיים אי השוויון $b_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = b_{n+1}$.

ג. הסדרה (b_n) מתכנסת – נכון, כי היא מונוטונית עולה וחסומה כי (a_n) חסומה.

ד. הסדרה (b_n) מתכנסת ל- L - נכון, שימו לב כי בעצם מדובר בהגדרה של $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ מפני שנתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת – וזו התשובה הנכונה ביותר שמכילה את כל התשובות האחרות.

6. תהי $K \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה ויהי $M = \sup_{x \in K} x$, אזי:

א. קיימת סדרה (a_n) כך שכל $a_n \in K$ וגם $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$ - נכון, כי נבחר לכל

n איבר $a_n \in K$ המקיים כי $M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$ (חייב להיות כזה על פי

הגדרת ה-sup), ואז $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$ על פי משפט הסנדביץ'.

ב. קיימת סדרה (b_n) כך שכל $b_n \notin K$ המקיימת כי $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$ - נכון, כי נבחר את הסדרה $b_n = M + \frac{1}{n}$ ואז $b_n \notin K$ כי כל איבריה גדולים ממש מה- $\sup K$.

ג. (א) ו (ב) שניהם נכונים – נכון, וזו התשובה שצריך לסמן.
ד. (א) ו (ב) שניהם לא נכונים – לא נכון, ראו א' וב'.

7. קבעו אם כל טור מתכנס בהחל, מתכנס על תנאי או מתבדר:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$. זהו טור חיובי יש להפעיל את מבחן דאלמבר:

$$\text{ולכן הטור } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)! n^{2n}}{(n+1)^{2n+2} (2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{e^2} < 1$$

מתכנס בהחלט.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) + \sin(n\pi)}{n\pi}$.

נשים לב כי לכל $n \cos n\pi = (-1)^n$ וכן $\sin n\pi = 0$ ולכן בעצם הטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) + \sin(n\pi)}{n\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ שזה טור שאנו יודעים כי מתכנס על תנאי.

8. הוכיחו שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ מתכנס.

נבנה סדרה באופן הבא: $c_n = \begin{cases} k^2 & k \in N \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ ואז $c_n \leq a_n$ לכל n . ולכן הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ מתכנס על פי מבחן ההשוואה הראשון. אבל הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2} \text{ מתקבל}$$

מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ על ידי הכנסת סוגריים ולכן גם הוא מתכנס,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2} = (a_1 + 0 + 0) + (a_4 + 0 + 0 + 0) + (a_9 + 0 + 0 + \dots) + \dots$$

זיון חשבון אינפיניטסימלי I

צני על שלוש מארגס השאלות הבאות, הן שורת בצדן חומר
צני איסור. מפק הזיון שזה וחצי. בקבלה.

① קצו אק כל סדרה $\{a_n\}$ מתכנסת או מתבדרת, והצדקו את תשובתכם.

$$a_n = \frac{1+n+3n\sqrt{n}}{2+n^2-4\sqrt{n}} \quad (א)$$

$$(2) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n+1} a_n, \quad n \geq 1.$$

② קצו אק כל טור מתכנס או מתבדר והצדקו את תשובתכם.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \quad (א)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (2)$$

③ נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס ! $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור כלשהו
מתכנס. הוכיחו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n =$ מתכנס.

④ נניח שלכל $n, a_n \geq 0$. הוכיחו כי הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת
אק ורק אק הסדרה $\{a_n^2\}$ מתכנסת.

בדיקת

④ ④ נרשם את גורם המכנה ונקבל: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n+3\sqrt{n}}{2+n^2+4\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}}{\frac{2}{n^2} + 1 + \frac{4}{\sqrt{n}}} = \frac{0}{1} = 0$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{n^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ לסיים בדיקה

ודם $a_{n+1} < a_n$ ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$ כן

ודם $0 < a_n < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$ ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$

ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$ ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$

④ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$ נרשם $3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3e \neq 0$

ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$ ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

נרשם S_n

$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$ ודם $a_n < 0 < \frac{n^2}{n^2+n+1} < a_{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} <$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לוח חיובי מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

$|a_n b_n| \leq M a_n$ ≤ 1

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M a_n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ מתכנס

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

④ נניח ש $\{a_n\}$ מתכנסת ל l ו $0 \leq a_n$ ו $\{a_n^2\}$ מתכנסת

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \quad (1)$$

נניח $0 < M$ ו $0 < \epsilon$ ו $\{a_n\}$ מתכנסת ל l ו $\{a_n^2\}$ מתכנסת

$$|a_n - l| = \frac{|(a_n - l)(a_n + l)|}{a_n + l} \leq \frac{|(a_n - l)(a_n + l)|}{a_n + l} = \frac{|a_n^2 - l^2|}{a_n + l}$$

$$|a_n - l| \leq \frac{\epsilon}{a_n + l} \quad \text{עבור } n \text{ מספיק גדול}$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \quad \text{ועל } |a_n^2 - l^2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a_n^2 - l^2|}{a_n + l} < \frac{\epsilon}{a_n + l}$$

$$(a_n - l) \leq |a_n - l| \leq \frac{\epsilon}{a_n + l} \quad \text{עבור } n \text{ מספיק גדול} \quad (2)$$

$$|a_n^2 - l^2| = |a_n - l| |a_n + l| \geq |a_n - l|^2 \quad \text{עבור } 0 \leq a_n \text{ ו } l$$

$$|a_n^2 - l^2| < \epsilon \quad \text{עבור } n \text{ מספיק גדול}$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{l} \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - \sqrt{l}| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - \sqrt{l}|^2 < \epsilon^2$$

סעיף 3

3. נתון כי סדרה $\{a_n\}$ היא סדרה חסומה ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. נניח $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$.
 א. הראה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

ב. הראה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

הנחה: $\{a_n\}$ היא סדרה חסומה, לכן קיימת קבוצה סגורה וחסומה K המכילה את כל האיברים. נבחר $\epsilon = \frac{1}{2}$. לפי ההנחה, קיימת N כזו ש- $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2}$ לכל $n \geq N$. נבחר $n \geq N$ ונכתוב:

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - l| < \frac{1}{n} + |a_{n+1} - l|$$

$$|a_n - l| < \frac{1}{n} + |a_{n+1} - l|$$

$$(a_n - l) < \frac{1}{n} + (a_{n+1} - l) \quad (1)$$

$$(a_n - l) < \frac{1}{n} + (a_{n+1} - l) \quad (2)$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)}$$

4. נתון כי $\{a_n\}$ היא סדרה חסומה ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. נניח $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$.
 א. הראה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

ב. הראה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

הנחה: $\{a_n\}$ היא סדרה חסומה, לכן קיימת קבוצה סגורה וחסומה K המכילה את כל האיברים. נבחר $\epsilon = \frac{1}{2}$. לפי ההנחה, קיימת N כזו ש- $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2}$ לכל $n \geq N$. נבחר $n \geq N$ ונכתוב:

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - l| < \frac{1}{n} + |a_{n+1} - l|$$

$$|a_n - l| < \frac{1}{n} + |a_{n+1} - l|$$

$$(a_n - l) < \frac{1}{n} + (a_{n+1} - l) \quad (1)$$

$$(a_n - l) < \frac{1}{n} + (a_{n+1} - l) \quad (2)$$

$$a_n - a_{n+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

5. סדרת טור, מתכנסת, &

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

נבדוק את הסדרה $S_n = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $= 1 - \sqrt{1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ $\therefore$ סדרת הטור מתכנסת ל-1.

6. סדרת טור, מתכנסת, &

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n (\ln(n))^2}$$

נבדוק את הסדרה $a_n = \frac{1}{n (\ln(n))^2}$

$$\frac{1}{n (\ln(n))^2} < \frac{1}{n (\ln(n))^2} \quad \frac{1}{n (\ln(n))^2} > 0$$

$$\frac{(n+1) (\ln(n+1))^2}{n (\ln(n))^2} > 1 \quad \text{כי } \frac{1}{n (\ln(n))^2} > 0 \text{ ונראה כי } \frac{(n+1) (\ln(n+1))^2}{n (\ln(n))^2} > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\ln(n))^2}$$

$$\frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2} = \frac{1}{(n \ln 2)^2} = \frac{1}{n^2 \ln^2 2} < \frac{1}{n^2}$$

עבור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנסת (סדרה מתכנסת)
 ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2}$ מתכנסת (סדרה מתכנסת)
 וכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנסת (סדרה מתכנסת)
 ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנסת (סדרה מתכנסת)
 כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנסת (סדרה מתכנסת).

זיון חשבון אינפיניטסימלי I

צני על שלוש מארגס השאלות הבאות, הן שורת בצדן חומר
צני איסור. מפק הזיון שזה וחצי. בקבלה.

① קצו אק כל סדרה $\{a_n\}$ מתכנסת או מתבדרת, והצדקו את תשובתכם.

$$a_n = \frac{1+n+3n\sqrt{n}}{2+n^2-4\sqrt{n}} \quad (א)$$

$$(2) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n+1} a_n, \quad n \geq 1.$$

② קצו אק כל טור מתכנס או מתבדר והצדקו את תשובתכם.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \quad (א)$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

③ נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס ! $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור כלשהו
מתכנס. הוכיחו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

④ נניח שלכל $n, a_n \geq 0$. הוכיחו כי הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת
אק ורק אק הסדרה $\{a_n^2\}$ מתכנסת.

בדיקת

④ ④ נרשם את גורם המכנה ונקבל: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n+3\sqrt{n}}{2+n^2+4\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}}{\frac{2}{n^2} + 1 + \frac{4}{\sqrt{n}}} = \frac{0}{1} = 0$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{n^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ לרשם בדיקת

והנחנו $a_{n+1} < a_n$ ונרשם $a_n > 0$

כמו כן $0 < a_n < \frac{n^2}{n^2+n+1} < \alpha$

והנחנו $a_n > 0$ ונרשם $a_n < \frac{n^2}{n^2+n+1} < \alpha$

④ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$

נרשם $3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3e \neq 0$

לכן הסדר מתפזר, כי הוא לא נקטף תמידית, ולכן הסדר מתפזר.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

נרשם S_n

$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

לכן הסדר מתכנס.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n^2+2n} + \sqrt{n^3+n^2}} <$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לרשם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס $\{b_n\}$ סדרה מתכנסת

$|b_n| < M$ $\forall n$ M קבוע

$|a_n b_n| \leq M a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M a_n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ מתכנס

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

④ נניח ש $\{a_n\}$ מתכנסת ל l ו $0 \leq a_n$ ו $\{a_n^2\}$ מתכנסת

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \quad (1)$$

נניח $0 < M$ ו $0 < \epsilon$ ו $\{a_n\}$ מתכנסת ל l ו $\{a_n^2\}$ מתכנסת

$$|a_n - l| = \frac{|(a_n - l)(a_n + l)|}{a_n + l} \leq \frac{|(a_n - l)(a_n + l)|}{a_n + l} = \frac{|a_n^2 - l^2|}{a_n + l}$$

$$|a_n - l| \leq \frac{\epsilon}{a_n + l} \quad \text{עבור } n \text{ מספיק גדול}$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \quad \text{ועל } |a_n^2 - l^2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a_n^2 - l^2|}{a_n + l} < \frac{\epsilon}{a_n + l}$$

$$(a_n - l) \leq |a_n - l| \leq \frac{\epsilon}{a_n + l} \quad \text{עבור } n \text{ מספיק גדול} \quad (2)$$

$$|a_n^2 - l^2| = |a_n - l| |a_n + l| \geq |a_n - l|^2 \quad \text{עבור } 0 \leq a_n \text{ ו } l$$

$$|a_n^2 - l^2| < \epsilon \quad \text{עבור } n \text{ מספיק גדול}$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{l} \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - \sqrt{l}| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - \sqrt{l}|^2 < \epsilon^2$$

פערן 817

$$|a_{n+1} - a_n| \leq 1 \quad \text{u} \quad 8,81 \quad \underline{\lim} a_n = 1 \quad \overline{\lim} a_n = 1 \quad 34,3 \quad 7707 \rightarrow 112 \quad 3$$

83 308 78 3 208 78

2. הבה נגדיר $L = \overline{\lim} a_n$ ו- $l = \underline{\lim} a_n$ ונראה ש- $l \leq L$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$

$$l - \frac{1}{2} < a_n < l + \frac{1}{2} \leq l + \frac{1}{2} \quad \text{אם } a_n \in \mathbb{Z} \quad \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$$
$$1 - \frac{1}{2} \leq L - \frac{1}{2} \leq a_n \leq L + \frac{1}{2}$$

($a_n < \frac{1}{2}$) (ב) 1 ש7707 16348 a_n נרנן נרע ע-2=7 נרניון (*)

$(\frac{1}{2} \leq a_m \leq 1)$ L 57707 63406 a_m 57307 1756 11675 7747 121

$n \leq n' \leq m$ ו $a_{n'}$ חיובי
 $a_m - a_n > \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$ e סתירה

$$-\frac{1}{2} \leq a_n' \leq \frac{1}{2} \quad \text{S. 1.8}$$

13 מתקנות 88
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857

$\{a_n\}$ හි $\{a_n\}$ පරිමාණය $\{a_n\}$ $\{a_n\}$ $\{a_n\}$

15 תת 30 רה תקומה ופך יר 8 תת 30 רה מתכנסת 3 אג-א 26 יסור וסור 151

11 יטבתא. 12 ורע. 13 מ. 14 מרבתא. 15 מ. 16 קרע. 17 חזק.

אדם י' 8 {שני ימים 30 יום מדינות

1877 12 17 1891

4. מצא את $\{a_n\}$ ו- b כך שיהיה $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} = 2$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 3$.

החלטתו של בית דין לענין פיקודת המבחן

77909 7716 1 8 77107 771R 771N 771S 771T 771U 771V

$$|a_{i-3}|/c_{i-14} \quad |a_{i-1}|/c_{i-14} \quad n_0 < n \quad \text{S.S. } \gamma \quad n_0 \quad v \quad n/180 \quad :3 \quad \text{S.S.}$$
$$1-\varepsilon_0 \leq 2-a_n \leq 1+\varepsilon_0 \quad \text{and} \quad -\varepsilon_0 \leq a_n-2 \leq -1+\varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon_0 \leq a_n-1 \leq \varepsilon_0 \quad \forall n \quad \square$$

$$||2 - a_n| - 1| < \varepsilon_0 \quad \Rightarrow$$

$$||a_n - 2| - 1| < \varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \varepsilon_0 < a_n - 2 < 1 + \varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon_0 < a_n - 3 < \varepsilon_0 \quad 14$$

$$\Rightarrow \frac{|L_n - 1|}{L_n} < \varepsilon_n \quad \text{for } n < n_0 \quad \text{and } n_0 \text{ is arbitrary}$$

5. סדרת טור, מתכנסת, &

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

נבדוק את הסדרה $S_n = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

כל האיברים מתבטלים, נשאר $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sqrt{2} - 1$ $\Delta = 1$

2. סדרת טור, מתכנסת, &

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n (\ln(n))^2}$$

נבדוק את הסדרה a_n

$$\frac{1}{n (\ln(n))^2} < \frac{1}{n (\ln(n))^2} \quad \frac{1}{n (\ln(n))^2} > 0$$

$$\frac{(n+1) (\ln(n+1))^2}{n (\ln(n))^2} > 1$$

כלומר $\frac{1}{n (\ln(n))^2} > \frac{1}{(n+1) (\ln(n+1))^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n (\ln(n))^2} = 0$

לכן הסדרה מתכנסת לפי מבחן דאלבר

$$\frac{2^n}{2^n (\ln 2^n)^2} = \frac{1}{(n \ln 2)^2} = \frac{1}{n^2 \ln^2 2} < \frac{1}{n^2}$$

עבור $n \geq 1$ מתקיים $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 2} < \infty$

לכן הסדרה מתכנסת לפי מבחן דאלבר