

זמן המבחן: שעותיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

חלק א'

1. אם

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin \frac{t(1-t)}{6}, \quad z(t) = \frac{12t}{t+6},$$

איך משתמשים ב-Matlab למצוא את

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} dt \quad ?$$

2. אם $x(t), y(t), z(t)$ הם כמו בשאלה 1, איך משתמשים ב-Matlab למצוא את הערך הנומרי של

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt \quad ?$$

3. כתוב פונקציה ב-Matlab אשר מקבלת כקלט סקלר p , ומחזירה את הערך המינימלי של הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + px}{\sqrt{1 + (x + 2y)^2 + (x - y)^2}}$$

4. אם

$$f_1(p) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & p \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_2(p) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & p \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f_3(p) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & p \end{pmatrix},$$

איך היית משתמש ב-Matlab לייצר גרפים של $f_1(p), f_2(p), f_3(p)$ על אותם הצירים, עבור p בקטע $[-2, 2]$?

5. הסבר את פקודות ה-Maple המופיעות בקטע קוד למטה. איזה כלל מאלגברה ליניארית מודגם בשורה האחרונה ?

```
[ > with(LinearAlgebra):
> A:=<<1, 3, 4>|<2, t, -2>|<2, -1, 3>>;
                                     
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & t & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

> Determinant(A);
                                     
$$-5t - 40$$

> B:=subs(t=-8,A);
                                     
$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

> ColumnSpace(B);
                                     
$$\left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{13}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix} \right]$$

> v1:=<5, -13, 0>; v2:=<5, -12, 0>;
                                     
$$v1 := \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

                                     
$$v2 := \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> LinearSolve(B,v1); LinearSolve(B,v2);
                                     
$$\begin{bmatrix} 1 - t\theta_3 \\ 2 - \frac{1}{2}t\theta_3 \\ t\theta_3 \end{bmatrix}$$

Error, (in LinearAlgebra:-LA_Main:-LinearSolve) inconsistent system
```

1. (א) כתוב פונקציה ב-Matlab אשר מקבלת כקלט מטריצה M , ומחזירה כפלט את המטריצה שמקבלים מ- M על ידי החלפת הרכיב הכי קטן שלה ב-0. (הרכיב הכי קטן של M הוא המספר הכי קטן - בערך מוחלט - שמופיע ב- M , למעט 0. אם יש יותר ממספר אחד כזה, יש לבחור אחד מהם.)

(ב) בתהליך של "נקיון מטריצה" מחליפים כמה שאפשר רכיבים קטנים במטריצה ב-0, כל עוד שלא עושים שינוי של מעל אחוז אחד בערך עצמי הכי גדול של המטריצה. העזר בפונקציה שכתבת בסעיף הקודם לבנות פונקציה המבצעת ניקיון מטריצה.

2. כתוב פרוצדורה ב-Maple אשר מקבלת כקלט שתי מטריצות A, B , מגודל 2×2 , עם רכיבים שלמים, ומחזירה את הערכים של θ שבהם יש לפונקציה

$$f(\theta) = \text{Trace}(MM^T)$$

נקודות קריטיות. כאן

$$M = A \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} B$$

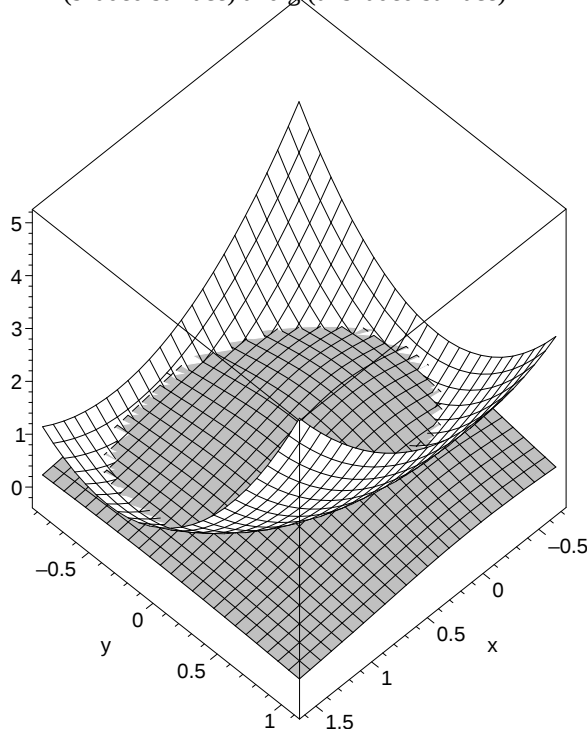
יש להניח שניתן למצוא את הערכים האלה באופן מדויק.

איך ניתן לשפר את הפרוצדורה כדי למצוא לא רק את הנקודות הקריטיות, אלה גם לזהות את המינימומים ואת המקסימומים ?

3. הפונקציות f, g , של שני משתנים, מוגדרות על ידי

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy - y$$

f (shaded surface) and g (unshaded surface)



רואים מהגרף שלכל זווית θ קיים $r(\theta) > 0$ כך ש-

$$f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) = g(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$$

(א) כתוב פרוצדורה ב- Maple אשר מוצאת, ל- θ נתונה, את הערך הנומרי של $r(\theta)$, וגם את הערך הנומרי של

$$F(\theta) = f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$$

(ב) איך היית מייצר, על אותם הצירים, את הגרפים של $r(\theta)$ ו- $F(\theta)$?

(ג) איך היית מוצא, בעזרת Maple, את הערך המינימלי של $r(\theta)$?

4. הפונקציות f, g מוגדרות כמו בשאלה 3 למעלה (ראה גם את הגרף).

(א) כתוב פונקציה ב- Matlab אשר בודקת, ל- x ו- y נתונים, האם $f(x, y) > g(x, y)$ או לא (מומלץ שהפונקציה תחזיר 1 אם כן, ו-0 אם לא).

(ב) העזר בפונקציה שלך מהסעיף הקודם לכתוב פקודות לחשב את

$$\int \int_D (f(x, y) - g(x, y)) \, dx dy$$

כאשר D הוא התחום שבו $f(x, y) > g(x, y)$.

Exam solutions, Moed bet, 5765

These are only notes, not full answers. All the questions can be answered in many ways! Especially the ones in part B.

 Section A, question 1

make a file q1.m with the contents:

```
function an=q1(t)
an = sqrt( cos(t).^2 + sin(t.*(1-t)/6).^2 + 144*t.^2./(t+6).^2 );
```

and then do quad(@q1, 0, 2*pi)

Section A, question 2

```
x(t):=cos(t);
y(t):=sin(t*(1-t)/6);
z(t):=12*t/(6+t);
evalf(int( sqrt(diff(x(t),t)^2+diff(y(t),t)^2+diff(z(t),t)^2), t=0..2*Pi ));
```

Section A, question 3

make a file q3a.m with the contents:

```
function z=q3a(x,p) % note here x is a vector!
z = (x(1)^2+x(2)^2+p*x(1))/sqrt(1+(x(1)+2*x(2))^2+(x(1)-x(2))^2);
```

make a file q3b.m with the contents:

```
function z=q3b(p);
[w z] = fminsearch(@q3a, [0,0], [], p);
```

Section A, question 4

make a file q4.m with the contents:

```
function f=q4(p)
f(1)=det( [1 2 p; -1 2 -1; 2 -5 4] );
f(2)=det( [1 2 1; -1 2 p; 2 -5 4] );
f(3)=det( [1 2 1; -1 2 -1; 2 -5 p] );
```

```
then do (for example)
p=[-2:0.05:2];
f=zeros(3,size(p,2));
for i=1:size(p,2)
    f(:,i)=q4(p(i));
end
plot( p , f(1,:), 'r', p , f(2,:), 'g', p ,f(3,:), 'b')
```

Section A, question 5

line 1: loading the LinearAlgebra package to do linear algebra calculations

line 2: Defining the matrix A

line 3: Computing the determinant of the matrix A

line 4: Defining the matrix B, by setting $t=-8$ in A, so the determinant of B will be zero

line 5: Since the determinant of B is zero, its column space should be less than 3 dimensional. Here we find a basis for the column space

line 6: Defining two vectors v1, v2

line 7: Solving $Bx = v1$, $Bx = v2$

Clearly v1 is in the column space of B, v2 is not.

So $Bx = v1$ has an infinite number of solutions (parametrized by `_t0_3`)

$Bx = v2$ has no solutions (hence the error message)

We are seeing the result that if B has determinant zero, then the equation

$Bx = v$ has either no solutions or an infinite number of solutions, depending

on whether v is or is not in the column space of B.

 Section B, question 1

(a) file q1a.m with content:

```
function M=q1a(M) % this is allowed !

small=Inf;
small_row=0;
small_col=0;
```

```
for i=1:size(M,1)
for j=1:size(M,2)
    if abs(M(i,j))>0 & abs(M(i,j))<small
        small=abs(M(i,j));
        small_row=i;
        small_col=j;
    end
end
end
```

```
M(small_row,small_col)=0;
```

```
% doesn't work for zero matrix!
```

(b) file q1b.m with content:

```
function M=q1b(M)
```

```
big = max(abs(eig(M)));
M1=M;
bignew=big;
```

```
while( abs(bignew-big)/big < 0.01)
M=M1;
M1=q1a(M);
bignew=max(abs(eig(M1)));
end
```

 Section B, question 2

```
with(LinearAlgebra):
```

```
findt:=proc(A,B)
    local theta,M,q,r;
    q:=<1<-sin(theta),cos(theta)>>;
    M:=A.q-q.B;
    r:=simplify( Trace(M.Transpose(M)) );
    return(solve( diff(r,theta)=0, theta));
end proc;
```

```
findt2:=proc(A,B) local theta,M,q,r,sols,i,d2;
q:=<1<-sin(theta),cos(theta)>>;
M:=A.q-q.B;
r:=simplify( Trace(M.Transpose(M)) );
sols:=solve( diff(r,theta)=0, theta);
for i from 1 to nops(sols) do
    d2:=simplify(subs( theta=op(i,sols) , simplify(diff(diff(r,theta),theta)) ));
    if evalf(d2)<0 then
        print(theta=op(i,sols), "maximum");
    elif evalf(d2)>0 then
        print(theta=op(i,sols), "mimimum");
    else print(theta=op(i,sols));
    end if
end do;
end proc;
```

```
example:
A:=<<1,2>>|<3,2>>; B:=<<2,3>>|<-1,2>>;
findt(A,B);
```

```

      1/2      1/2
[arctan(-5 + 26 ), -arctan(5 + 26 )]
findt2(A,B);
      1/2
theta = arctan(-5 + 26 ), "mimimum"

      1/2
theta = -arctan(5 + 26 ), "maximum"
```

 Section B, question 3

$f:=1/(1+x^2+y^2)$; $g:=x^2+2*y^2+x*y$;

(a)

```
m:=proc(theta)
local r,s;
s:=fsolve( subs(x=r*cos(theta),y=r*sin(theta),f) =
            subs(x=r*cos(theta),y=r*sin(theta),g) , r=0..2) ;
return( s, evalf(subs(x=s*cos(theta),y=s*sin(theta),f)) );
end proc;
```

(b)

```
for i from 0 to 100 do
temp:=[m(2*Pi*i/100)];
r[i]:=op(1,temp);
F[i]:=op(2,temp);
end do;
```

```
plot( [ [seq([2*Pi/100*i, r[i]],i=0..100)], [seq([2*Pi/100*i, F[i]],i=0..100)]],
       style=point, legend=['r','F'] );
```

see [graph](#)

note the minimum r and the maximum F are at the same point!

(c)

To find the minimum of a function such as $r(\theta)$ in Maple is difficult (it is easy in Matlab). From the graph the minimum is near $\theta=3.8$. It is necessary to do some trial and error around this point to get a more accurate estimate.

 Section B, question 4

(a) Write a Matlab function that computes $f(x,y)-g(x,y)$ for scalars x,y .
 file q4a.m with content:

```
function z=q4a(x,y)
z=1/(1+x^2+y^2) - x^2 - 2*y^2 - y*x + y;
```

function to check if $f>g$ for a given x,y :
 file q4b.m with content:

```
function z=q4b(x,y)
if q4a(x,y)>0
z=1;
else
z=0;
end;
```

(b) To do the double integral need a function that returns $f-g$ if $f>g$ and 0 otherwise, must work on vectors x and scalars y .
 file q4c.m with content:

```
function z=q4c(x,y)
z=zeros(size(x));
for i=1:size(x,1)
for j=1:size(x,2)
z(i,j)=q4a(x(i,j),y)*q4b(x(i,j),y);
end
end
```

now do dblquad(@q4c, -1, 1.5, -1, 1)
 (see graph to get correct limits)

[Back to course homepage](#)
[Back to my main teaching page](#)
[Back to my main page](#)