

שאלון בחינה בקורס "חשבון אינפיניטסימלי" (88-132)
 מרצים: פרופ' מ. אגרנובסקי, פרופ' י. דונין, ד"ר ש. הורוביץ, ד"ר ש. ינץ, פרופ' ל. זלצמן
 סמסטר א', מועד ב': ל' ניסן תשס"ג (2.5.03)
 משך הבחינה: שעתיים
השימוש בחומר עזר אסור, מותר השימוש במחשבון כיס פשוט בלבד.

מס' מחברת: _____

חלק א'

ענו על כל שמונה השאלות הבאות. בכולן יש לסמן רק נכון/לא נכון בתחתית הדף
 הזה. אין צורך לנמק את התשובות.

שיטת הניקוד: כל תשובה נכונה - 5 נקודות
 אין תשובה - 2 נקודות
 תשובה שגויה - 0 נקודות

1. סדרה $\{a_n\}$ מתכנסת למספר ממשי L אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $n \geq n_0$, אז $|a_n - L| \leq \epsilon$.

2. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס למספר ממשי אם ורק אם סדרת הסכומים החלקים של הטור חסומה.

3. אם $a_n + b_n \rightarrow a + b$ ו- $a_n - b_n \rightarrow a - b$ אזי $a_n \rightarrow a$ ו- $b_n \rightarrow b$.

4. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור ממשי ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור המתקבל מ- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י שינוי סדר האיברים בלבד.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ אז קיים טור $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ המתקבל מ- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י שינוי סדר האיברים כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -10$.

5. נניח ש- f ו- g הן שתי פונקציות המוגדרות בקטע פתוח (a, b) . נניח ש- f חסומה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, אזי $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) = 0$.

6. אם $f(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 + 1}$ אז לכל $y > 0$ קיים $x > 0$ כך ש- $f(x) = y$.

7. נניח ש- f פונקציה מוגדרת בקטע I כך ש- $f^2(x)$ רציפה ב- I . אזי f רציפה ב- I .

8. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים וגדול מ- 1, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתכנס.

תשובות: 1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____

5. _____ 6. _____ 7. _____ 8. _____

חלק ב'

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות. נמקו כל תשובה.
כל שאלה שווה 15 נקודות.

9. מצאו את משוואת המשיק לגרף $y = x^{3x}$ בנקודה $x_0 = 2$.

10. קבעו אם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3 - \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

11. נניח ש- f מוגדרת וגזירה בסביבת 0, ש- $f(0) = 0$ וש- $f'(0) = 2$. מצאו את הנגזרת של $f(f(f(x)))$ בנקודה $x = 0$.

חלק ג'

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות. כל שאלה שווה 15 נקודות.

12. תהי $\{x_n\}$ סדרה חסומה של מספרים ממשיים. הוכיחו שקיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ כך ש-
$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = 0$$

13. תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a, b) כך שלכל $x \in (a, b)$, $f(x)$ מספר רציונלי. הוכיחו כי f קבועה (השתמשו במשפט על פונקציות רציפות).

14. (לתלמידי פרופ' זלצמן וד"ר ינץ בלבד).
הוכח או הפרך: הפונקציה $\sin \sqrt{x}$ רציפה במידה שווה על $(0, \infty)$.

14. (לתלמידי פרופ' אגרנובסקי, פרופ' דונין וד"ר הורוביץ בלבד).
נניח ש $0 < x_1 < x_2$ וש- f פונקציה רציפה בקטע $[x_1, x_2]$ וגזירה בקטע (x_1, x_2) . הוכיחו שקיים מספר c , $x_1 < c < x_2$ כך ש- $f(c) - cf'(c) = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$ (רמז: התבוננו בפונקציות $\frac{f(x)}{x}$ ו- $\frac{1}{x}$).

ב ה צ ל ח ה !!!

$$f(x)=x^{3x} \text{ נגזור:}$$

$$f'(x)=(x^{3x})'=(e^{3x\ln x})'=e^{3x\ln x}\cdot (3x\ln x)'=x^{3x}\cdot (3\ln x+3)$$

$$f'(2)=2^6\cdot (3\ln 2+3) \text{ נציב את הנקודה הנתונה למציאת השיפוע:}$$

$$f(2)=2^6 \text{ נציב בנוסחה למשוואת ישר עפ"י נקודה ושיפוע, ונקבל:}$$

$$y=2^6+2^6\cdot (3\ln 2+3)(x-2)=192(x-2)(1+\ln (2))+64$$

$$(10) \text{ נראה שהטור מתבדר. ברור שהטור הנתון שווה ל-} \sum \frac{(-1)^n(3+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$$

$$\text{נבדוק התכנסות בהחלט: לפי מבחן קושי - צריך לבדוק את הגבול העליון של } \frac{(3+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\text{מתקיים } \lim_{n\rightarrow \infty} \frac{(3+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1, \text{ ולכן הטור אינו מתכנס בהחלט. יתרה מזאת, הטור המקורי מתבדר לפי התוצאה שהוכחנו על מבחן קושי (ראה פתרון מבחן קודם).}$$

$$(11) \text{ השאלה אמנם נראית מפחידה, אבל זה בסך הכל כלל השרשרת: ניזכר בנוסחה - } (f\circ g)'(c)=f'(g(c))\cdot g'(c).$$

$$\text{לכן הנגזרת המבוקשת היא } f'(f(f(x)))=f'(f(f(x)))\cdot (f(f(x)))'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$\text{נציב את הנקודה הנתונה: } f'(f(f(0)))\cdot f'(f(0))\cdot f'(0)=f'(f(0))\cdot f'(0)\cdot f'(0)=f'(0)^3=2^3=8$$

$$\text{דוגמה פשוטה היא } 2x.$$

חלק ג'

$$(12) \text{ לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס יש ל} x_n \text{ תת סדרה מתכנסת } \{x_{n_k}\}. \text{ נסמן גבולה ב-} L. \text{ היא מקיימת את הדרוש, שכן}$$

$$\lim_{k\rightarrow \infty} x_{n_k}=\lim_{k\rightarrow \infty} x_{n_{k+1}}=L$$

$$\lim_{k\rightarrow \infty} x_{n_{k+1}}-x_{n_k}=L-L=0 \text{ כנדרש.}$$

$$(13) \text{ היה בשיעורי הבית. (מניחים בשלילה, משפט ערך הביניים וצפיפות המספרים הממשיים)}$$

$$14 \text{ זלצמן וינץ) הוכחה: ידוע שהרכבת פונ' רבמ"ש בקטע היא רבמ"ש באותו קטע.}$$

$$\sqrt{x}, \sin x, \text{ הן רציפות במ"ש בקטע הנתון (סינוס מחזורית, שורש הוכחנו בתרגול) ולכן גם ההרכבה } \sqrt{x}\circ \sin \text{ רבמ"ש.}$$

$$14 \text{ אגרמובסקי, דונין והורוביץ) נתבונן בפונקציות } g(x)=\frac{f(x)}{x}, h(x)=\frac{1}{x}$$

$$\text{מתקיים: } h'(x)=-\frac{1}{x^2} \text{ וגם } g'(x)=(\frac{f(x)}{x})'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$\text{כעת, נפעיל את משפט הערך הממוצע המוכלל:}$$

$$\frac{g'(c)}{h'(c)} = \frac{g(x_2)-g(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)}: c \in (x_1, x_2) \text{ שבה מתקיים: קיימת נקודה}$$

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)} = \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{x_1 f(x_2) - f(x_1)x_2}{x_1 x_2}}{\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}} = \frac{x_1 f(x_2) - f(x_1)x_2}{x_1 - x_2}: \text{נפשט את שני אגפי השוויון הקודם:}$$

$$\frac{g'(c)}{h'(c)} = \frac{\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}}{-\frac{1}{c^2}} = -(cf'(c) - f(c)) \text{ ובאגף השני -}$$

ובסך הכל קיבלנו את הדרוש:

$$-(cf'(c) - f(c)) = \frac{x_1 f(x_2) - f(x_1)x_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(c) - cf'(c) = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

