

195-88 מתמטיקה בדידה תשע"ה סמסטר קיץ

התחיל ב:	20:12 , 4/11/2016
מצב	הסתיים
הושלם ב-	20:13 , 4/11/2016
הזמן שלקח	54 שניות
נקודות	0.00/10.01
ציון	קיבלתם 0.00 מתוך הציון המירבי 10.00 (0%)

מידע

כעת נפרט את דרך הכתיבה בתרגיל זה. חשוב לקרוא!

1. אותיות יווניות: כותבים את שם האות. ראו בטבלה הבאה כיצד לכתוב את האותיות הרלוונטיות:

אותיות יווניות וכיצד לכתוב אותן	
האות היוונית	כיצד לכתוב אותה
α	alpha
β	beta
λ	lambda
μ	mu

2. קבוצות: קבוצות כותבים בין סוגריים מסולסלים, למשל את $\{1,2\}$ כותבים $\{1,2\}$.

3. כאשר כופלים משתנים, למשל ab , נוסף * ביניהם, כלומר כתבו $a * b$. אחרת, התשובה לא תתקבל.

4. אינדקסים למשתנים: כדי לכתוב s_1 כותבים פשוט $s[1]$.

5. שימו לב שאתם רושמים אותיות גדולות וקטנות בהתאם לתרגיל.

בהצלחה!

מידע

חומר עזר - לוגיקה

בשאלות הבאות בחרו מי צריך להכנס:

- הכרחי
- מספיק
- מספיק והכרחי
- לא מספיק ולא הכרחי

שאלה 1

לא נענה

על מנת שמספר יהיה חיובי שהוא יהיה גדול מ-5 ❌

הגשת שאלה

אילן אילניי

אם מספר גדול מ-5 אז הוא בפרט גדול מ-0'
אבל למשל 2 גדול מ-0 אבל לא גדול מ-5.
לכן התשובה הנכונה היא מספיק.

שאלה 2

לא נענה

על מנת שמספר יתחלק בשש שהוא יהיה זוגי

הגשת שאלה

אם מספר מתחלק ב-6 הוא בפרט מתחלק ב-2.
אבל 4 מתחלק ב-2 ולא ב-6.
לכן התשובה היא הכרחי.

שאלה 3

לא נענה

על מנת שסכום מספרים יהיה זוגי ששניהם יהיו זוגיים או שניהם יהיו אי זוגיים.

הגשת שאלה

אם סכום מספרים זוגי ואחד מהם זוגי אז גם האחר זוגי, ואם אחד מהם אי-זוגי אז גם האחר,
אם שני מספרים זוגיים או ששניהם אי-זוגיים אז הסכום זוגי,
לכן התשובה היא הכרחי ומספיק.

מידע

חומר עזר - לוגיקה

בשאלות הבאות ענו האם שני המשפטים שקולים.

שאלה 4

לא נענה

ענו האם שני המשפטים שקולים.

1. "אם ערן רעב הוא עצבני."
2. "כאשר ערן אינו עצבני הוא לא רעב."

בחר תשובה אחת:

☐ נכון

☐ לא נכון

הגשת שאלה

אם ערן לא עצבני, הוא לא רעב כי אם כן אז הוא היה עצבני.

התשובה הנכונה היא: "אמת"

שאלה 5

לא נענה

ענו האם שני המשפטים שקולים.

1. "אם ערן רעב הוא עצבני."
2. "ערן עצבני או שאינו רעב"

בחר תשובה אחת:

☐ נכון

☐ לא נכון

הגשת שאלה

אם ערן לא עצבני אז הוא לא רעב, ולכן ערן או לא רעב או עצבני.

התשובה הנכונה היא: "אמת"

שאלה 6

לא נענה

ענו האם שני המשפטים שקולים.

1. "אם אייל שמח ענת גבוהה, ואם ענת גבוהה צחי חמוד"
2. "אם אייל שמח אז צחי חמוד"

בחר תשובה אחת:

☐ נכון

☐ לא נכון

הגשת שאלה

הפסוקים אינם שקולים.

הפרכה: אייל אינו שמח, ענת גבוהה וצחי אינו חמוד.

הפסוק הראשון אינו מתקיים ואילו הפסוק השני מתקיים.

התשובה הנכונה היא: "לא נכון"

מידע

חומר עזר - לוגיקה, הרצאה על לוגיקה.

בשאלות הבאות עקבו אחרי ההוראות.

שאלה 7

לא נענה

בחרו את הפסוק המתאים לטבלאת האמת הבאה:

p	q	
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

יש לבחור תשובה אחת:

☐ a.

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

☐ b.

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$$

. c 

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$$

. d 

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$$

. e 

$$p$$

הגשת שאלה

התשובה היא: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

נשים לב מהטבלה שהיא מקבלת T בדיוק בשם מקבל T. והמשפט הזה בדיוק שקול לq.

התשובה הנכונה:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$$

שאלה 8

לא נענה

חומר עזר - הרצאה על לוגיקה, תרגול.

בכל סעיף ענו האם שני הביטויים הלוגים שקולים:

.1

ביטוי 1: $\neg(\neg A \wedge B)$

ביטוי 2: $A \vee \neg B$

Not answered

.2

ביטוי 1: $A \iff (\neg B \wedge C)$

ביטוי 2: $A \vee (B \wedge \neg C)$

Not answered

.3

ביטוי 1: $A \vee B$

ביטוי 2: $\neg A \rightarrow B$

Not answered

הגשת שאלה

אילן אילניי

1.

אם נזכר בדה-מורגן שאומר ש:

$$\neg(A \wedge B)$$

שקול ל:

$$\neg A \vee \neg B$$

נחליף את B ב- $\neg B$ ונקבל את השקילות.

2.

אם A נכון ו- C לא נכון אז $\neg B \wedge C$ לא נכון ולכן $(\neg B \wedge C) \iff A$ לא נכון.
מצד שני מכיוון ש A נכון גם $A \vee (B \wedge \neg C)$ נכון.

3.

$A \vee B$ לא נכון רק בשגם A וגם B לא נכונים,
מצד שני $A \rightarrow B$ לא נכון רק כש- A נכון ו- B לא,
מפה יוצא ש- $A \rightarrow B$ רק כש- $\neg A$ נכון ו- B לא נכון,
וזה שקול לכך ש A לא נכון וגם B לא נכון.

A correct answer is **true**.A correct answer is **false**.A correct answer is **true**.

מידע

חומר עזר - הרצאה על לוגיקה, תרגול.
בשאלות הבאות ענו האם שני המשפטים גוררים את השלישי.

שאלה 9

לא נענה

1. כאשר השמש זורחת, כל התרנגולים קוראים
 2. כאשר התרנגול שלי, קוקי, קורא השמש זורחת
- מסקנה:
- השמש זורחת אם ורק אם כל התרנגולים קוראים

בחר תשובה אחת:

☐ נכון

אילן אילניי

☐ לא נכון

הגשת שאלה

בכיוון אחד, אם השמש זורחת כל התרנגולים קוראים לפי ההנחה הראשונה.
בכיוון השני, אם כל התרנגולים קוראים, בפרט התרנגול קוקי קורא ולכן השמש זורחת.
התשובה הנכונה היא: "אמת"

שאלה 10

לא נענה

1. כאשר יורד גשם, יש עננים או שיש ברז כיבוי אש פתוח
2. אם אין ברז כיבוי אש פתוח אז יורד גשם

מסקנה:

- יש עננים אם ורק אם יורד גשם

בחר תשובה אחת:

☐ נכון

☐ לא נכון

הגשת שאלה

הפרכה:

לא יורד גשם (לכן המשפט הראשון נכון, שקר גורר כל דבר).
יש ברז כיבוי אש פתוח (לכן המשפט השני נכון, שקר גורר כל דבר).
יש עננים (לכן המסקנה שגויה, כי שתי ההנחות נכונות אבל יש עננים ואין גשם).
התשובה הנכונה היא: "לא נכון"

שאלה 11

לא נענה

1. כאשר יורד גשם, יש עננים או שיש ברז כיבוי אש פתוח
2. אם אין ברז כיבוי אש פתוח אז יורד גשם

מסקנה:

- אם אין ברז כיבוי אש פתוח, יש עננים

בחר תשובה אחת:

☐ נכון

אילן אילניי

☐ לא נכון

הגשת שאלה

אם אין ברז כיבוי אש פתוח, אז יורד גשם, אז יש עננים או שיש ברז כיבוי אש פתוח, אבל אין ברז כיבוי אש פתוח ולכן יש עננים.
התשובה הנכונה היא: "אמת"

מידע

חומר עזר - הרצאה על לוגיקה, תרגול.
בשאלות הבאות עקבו אחרי ההוראות.

שאלה 12

לא נענה

חומר עזר - הרצאה על לוגיקה, מערך התרגול.
בשאלה זו נרשום את הקשרים השונים כך:

הקשר הלוגי:	איך נכתוב אותו:
$\rightarrow$	rightarrow
$\leftarrow$	leftarrow
$\wedge$	land
$\vee$	lor
$\leftrightarrow$	leftrightarrow

רשמו את המשפטים הבאים פורמלית:
1.

אם תלמיד פותר את תרגילי הבית ב-XI הוא מצליח במבחן.

נגדיר:

משמעות: תלמיד פותר את תרגילי הבית ב-XI
אטום: תלמיד מצליח במבחן

A

B

ולכן המשפט הוא:

$B \rightarrow A$

2.

אילן אילניי

דני שמח אם ורק אם הוא משחק או שהוא רואה טלוויזיה.

נגדיר:

משמעות:	אטום:
דני שמח	A
דני משחק	B
דני רואה טלוויזיה	C

ולכן המשפט הוא:

$$A \rightarrow (B \vee C)$$

3.

אם אביב לא נוסע וגם לא רץ אז הוא לא ממהר.

נגדיר:

משמעות:	אטום:
אביב נוסע	A
אביב רץ	B
אביב ממהר	C

ולכן המשפט שקול ל:

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C$$

הגשת שאלה

1.

אם תלמיד פותר את תרגילי ה-XI הוא מצליח במבחן.

יכתב:

$$B \leftarrow A$$

2.

דני שמח אם ורק אם הוא משחק או שהוא רואה טלוויזיה.

נקבל:

$$A \leftrightarrow (B \vee C)$$

3.

אם אביב לא נוסע וגם לא רץ אז הוא לא ממהר.

שקול ללהגיד:

$$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C$$

A correct answer is *leftarrow*, which can be typed in as follows:

A correct answer is *leftrightarrow*, which can be typed in as follows:

A correct answer is *lor*, which can be typed in as follows:

A correct answer is *land*, which can be typed in as follows:

A correct answer is *rightarrow*, which can be typed in as follows:

שאלה 13

לא נענה

האם הפסוק הבא נכון, כאשר משתני הפרדיקט נלקח מהשלמים (קבוצת השלמים מוגדרת ב $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)

$$[\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall y \exists x P(x, y)] \rightarrow [\forall x \exists y (P(x, y) \wedge P(y, x))]$$

שימו לב:

אם אתם חושבים שהפסוק אינו נכון אתם צריכים למצוא פרדיקט $P(x, y)$ שעבורו הפסוק אינו נכון.

אם אתם חושבים שהפסוק נכון אתם צריכים להוכיח כי *לכל* פרדיקט $P(x, y)$ הפסוק נכון.

בחר תשובה אחת:

☐ נכון

☐ לא נכון

הגשת שאלה

ניתן לקחת את הפרדיקט $P(x, y)$ להיות $x - y = 1$

התשובה הנכונה היא: "לא נכון"

מידע

חומר עזר - הרצאה על לוגיקה, תרגול.

בשאלות הבאות עקבו אחרי ההוראות.

שאלה 14

לא נענה

חומר עזר - לוגיקה

לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים.

סמנו את כל המשפטים השקולים לשלילת המשפט.

בחר תשובה אחת או יותר:

☐ i. קיים טבח שקיים מאכל שהוא מכין לא טעים.

☐ ii. קיים טבח שכל מאכל הוא מכין טעים.

☐ iii. לכל טבח לא קיים מאכל שהוא מכין טעים.

☐ iv. לא לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים.

☐ v. לא קיים טבח.

☐ vi. קיים טבח שלא קיים מאכל שהוא מכין טעים.

☐ vii. קיים טבח כך שקיים מאכל שהוא מכין טעים.

אילן אילנני

☐ viii. קיים טבח שכל מאכל הוא מכין לא טעים.

הגשת שאלה

תשובתך אינה נכונה.

נרשום

A – טבחים

B – מאכל

$f(x, y)$ – טבח x מכין y טעים

נמצא את

$$\neg(\forall x \in A \exists y \in B : f(x, y))$$

ונקבל שזה שקול לשני הדברים הבאים

$$\exists x \in A \neg(\exists y \in B : f(x, y))$$

$$\exists x \in A (\forall y \in B : \neg f(x, y))$$

בהעברה למילים קיבלנו 3 משפטים

לא לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים.

קיים טבח שלא קיים מאכל שהוא מכין טעים.

קיים טבח שכל מאכל הוא מכין לא טעים.

התשובה הנכונה: לא לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים,, קיים טבח שכל מאכל הוא מכין לא טעים,, קיים טבח שלא קיים מאכל שהוא מכין טעים.

שאלה 15

לא נענה

בחר את השלילות הנכונות של הפסוק הבא:

$$\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \wedge P(z, x, y))$$

בחר תשובה אחת או יותר:

a. ☐ $\exists x \forall y \neg \exists z (P(x, y, z) \wedge P(z, x, y))$

b. ☐ $\exists x \forall y \exists z (\neg P(x, y, z) \vee \neg P(z, x, y))$

c. ☐ $\exists x \forall y \neg \forall z (P(x, y, z) \wedge P(z, x, y))$

d. ☐ $\exists x \forall y \exists z (\neg P(x, y, z) \wedge \neg P(z, x, y))$

e. ☐ $\exists x \neg \forall y \exists z (P(x, y, z) \wedge P(z, x, y))$

הגשת שאלה

אילן אילניי

תשובתך אינה נכונה.

התשובה הנכונה: $\exists x \forall y \exists z (\neg P(x, y, z) \vee \neg P(z, x, y))$
 $\exists x \forall y \neg \forall z (P(x, y, z) \wedge P(z, x, y))$.

שאלה 16

לא נענה

חומר עזר - הרצאה על לוגיקה, מערך התרגול.

בחרו את הפסוק השקול לפסוק:

$$p \vee q$$

כאשר $\uparrow$ הוא הקשר המקיים:

$$p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$$

יש לבחור תשובה אחת:

a ☐ $(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

b ☐ $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

c ☐ $p \uparrow q$

הגשת שאלה

תשובה שגויה.

בצורה דומה לדברים שעשינו נוכל לקבל ש:

$$p \uparrow p = \neg p$$

לכן נקבל ש:

$$(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) = \neg p \uparrow \neg q$$

שזה לפי ההגדרה:

$$\neg(\neg p \wedge \neg q)$$

ולפי דה מורגן זה:

$$p \vee q$$

התשובה הנכונה: $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

חומר עזר - הרצאה על לוגיקה, מערך התרגול.

בשאלה זו נכתוב את הקשרים הלוגיים בצורה הבאה:

הקשר הלוגי:	איך נכתוב אותו:
$X \wedge Y$	$A(X, Y)$
$X \vee Y$	$O(X, Y)$
$\neg X$	$N(X)$
$X \downarrow Y$	$f(X, Y)$

למשל כלל דה-מורגן $X \wedge Y = \neg(\neg X \vee \neg Y)$ יכתב בצורה $A(X, Y) = N(O(N(X), N(Y)))$.

(שימו לב ש $X \downarrow Y$ נכתב עם f קטנה.)

שאלה:

הראו כי ניתן לבטא את כל הקשרים הלוגיים באמצעות הקשר נור $\downarrow$ המוגדר כך: ערך האמת של

$X \downarrow Y$ שווה ל- $\neg(X \vee Y)$.

פתרון:

בהרצאה הגדרתם "קבוצת קשרים שלמה" כקבוצה שבאמצעות שימוש בה ניתן ליצור את כל הפסוקים הלוגיים.

כמו כן, הראיתם בהרצאה כי הקבוצה $\{\neg, \vee, \wedge\}$ היא קבוצה שלמה שכזו. לכן, אם נוכל לבטא בעזרת $\downarrow$ את שלושת אלו, סיימנו.

למעשה, כפי שראיתם (או תראו) בהרצאה, מתקיים:

$$X \wedge Y = \neg(\neg X \vee \neg Y)$$

ולכן מספיק להראות כי מ- $\downarrow$ ניתן לכתוב את $\{\neg, \vee\}$.

נתחיל עם הקשר "שלילה".

קל לראות ש (בטאו בלי נור):

$$X \vee X = \text{[]}$$

לכן אם נוסיף שלילה על שני האגפים נקבל ש (בטאו באמצעות נור בלבד):

$$\neg X = \text{[]}$$

כעת הקשר או יהיה פשוט:

אנחנו יודעים כי השלילה של $X \vee Y$ היא $X \downarrow Y$ לפי ההגדרה של נור, ולכן השלילה של $X \downarrow Y$ היא $X \vee Y$. אבל אנחנו יודעים לבטא את נור, ואנחנו יודעים לבטא שלילה, לכן נותר רק לשלול את נור!

כלומר מתקיים (בטאו באמצעות נור בלבד):

$$X \vee Y = \text{[]}$$

וסיימנו.

הגשת שאלה

נתחיל עם שלילה.

אנחנו יודעים כי $X \vee X$ הוא בעצם X . לכן, אם נוסיף שלילה לפני $X \vee X$, נקבל את $\neg X$.

מכאן ניתן להסיק כי $X \downarrow X$ הוא השלילה של X .

אילן אילניי

בעת הקשר או יהיה פשוט:

אנחנו יודעים כי השלילה של $X \vee Y$ היא $X \downarrow Y$ לפי ההגדרה של נור, ולכן השלילה של $X \downarrow Y$ היא $X \vee Y$. אבל אנחנו יודעים לבטא את נור, ואנחנו יודעים לבטא שלילה, לכן נותר רק לשלול את נור!

זה ייכתב כך:

$$(X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$$

A correct answer is X , which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(X, X)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(f(X, Y), f(X, Y))$, which can be typed in as follows:

סיום שלב צפייה במשוב

ניווט בוחן

i	8	7	i	6	5	4	i	3	2	1	i	i
											9	10
										11	12	13
										14	15	16
										17		

הצגת עמוד אחד בכל פעם

סיום שלב צפייה במשוב

195–88 מתמטיקה בדידה תשע"ה סמסטר קיץ

התחיל ב:	20:12 , 4/11/2016
מצב	הסתיים
הושלם ב-	20:13 , 4/11/2016
הזמן שלקח	57 שניות
נקודות	0.00/11.00
ציון	קיבלתם 0.00 מתוך הציון המירבי 10.00(0%)

מידע

ראשית נפרט את דרך הכתיבה בתרגיל זה. חשוב לקרוא!

1. אותיות יווניות: כותבים את שם האות. ראו בטבלה הבאה כיצד לכתוב את האותיות הרלוונטיות:

אותיות יווניות וכיצד לכתוב אותן	
האות היוונית	כיצד לכתוב אותה
α	alpha
β	beta
λ	lambda
μ	mu

2. קבוצות: קבוצות כותבים בין סוגריים מסולסלים, למשל את $\{1,2\}$ כותבים $\{1,2\}$.

3. כאשר בופלים משתנים, למשל ab , נסיף * ביניהם, כלומר כתבו $a * b$. אחרת, התשובה לא תתקבל.

4. אינדקסים למשתנים: כדי לכתוב s_1 כותבים פשוט $s[1]$.

5. שימו לב שאתם רושמים אותיות גדולות וקטנות בהתאם לתרגיל.

6. זוגות: כשתרצו לרשום זוגות למשל (a,b) רשמו $[a,b]$.

בהצלחה!

שאלה 1

לא נענה

חומר עזר - קבוצות הרצאה, תרגול.

שאלה:

נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{2 \cdot m + 9 | m \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{2 \cdot m + 11 | m \in \mathbb{Z}\}$$

הוכיחו ש:

$$A = B$$

פתרון:

כדי להוכיח שוויון קבוצות מספיק להוכיח שיש הכלה דו כיוונית בין A ו- B .

נניח ש:

$$x \in A$$

יש להוכיח ש:

אילן אילניי

$$x \in \text{[]}$$

אנחנו יודעים שקיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש:

$$x = \text{[]}$$

נראה שקיים $n \in \mathbb{Z}$ שמקיים:

$$2 \cdot n + 11 = x$$

הביעו את n באמצעות m :

$$n = \text{[]}$$

ברור שיש n כזה, ולכן קיבלנו ש:

$$x \in B$$

ואז:

$$A \subseteq \text{[]}$$

ובאופן דומה נוכל להוכיח את הכיוון ההפוך.

הגשת שאלה

אם:

$$x \in A$$

אז קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש:

$$x = 2 \cdot m + 9$$

לכן:

$$x = 2 \cdot (m - 1) + 11$$

ואז:

$$x \in B$$

מה שאומר ש:

$$A \subseteq B$$

בצורה דומה נקבל ש:

$$B \subseteq A$$

ואז:

$$A = B$$

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **$2 \cdot m + 9$** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **$m - 1$** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

שאלה 2

לא נענה

חומר עזר - קבוצות הרצאה, תרגול.

בהזנת התשובה: לא לשכוח להוסיף סוגריים {}
תהיינה הקבוצות הבאות:

אילן אילניי

$$A=\{1, 12\}$$

$$B=\{12, 5\}$$

$$C=\{1, 12, 5\}$$

מצא את:

$$A \Delta (B \Delta C) =$$

הגשת שאלה

הגדת הפעולה אומרת ש:

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ולכן

$$B \Delta C = \{1\}$$

ואז

$$A \Delta (B \Delta C) = \{12\}$$

A correct answer is {12}, which can be typed in as follows: {12}

שאלה 3
לא נענה

חומר עזר - קבוצות הרצאה, תרגול.
שאלה:
בשאלה זאת A, B, C מסמנות קבוצות.
הוכיחו ש:

$$A = B$$

אם ורק אם

$$\forall C : A \cup C = B \cup C$$

פתרון:

כיוון ראשון ($\Leftarrow$):

אם $A = B$, אז לכל C מתקיים:

$$x \in A \cup C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in A \vee x \in$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in \forall x \in C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in B \cup C$$

וקיבלנו:

אילן אילניי

$$A \cup C = B \cup C$$

כיוון שני ($\Rightarrow$):

אם לכל C מתקיים :

$$A \cup C = B \cup C$$

אזי זה בפרט נכון ל:

$$C = \emptyset$$

ונקבל ש:

$$A = A \cup \emptyset = B \cup \emptyset =$$

מ.ש.ל

הגשת שאלה

$\Leftarrow$

אם $A = B$, אז לכל C מתקיים:

$$x \in A \cup C$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in A \vee x \in C$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in B \vee x \in C$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in B \cup C$$

וקיבלנו:

$$A \cup C = B \cup C$$

$\Rightarrow$

אם לכל C מתקיים :

$$A \cup C = B \cup C$$

אזי זה בפרט נכון ל:

$$C = \emptyset$$

ונקבל ש:

$$A = A \cup \emptyset = B \cup \emptyset = B$$

מ.ש.ל

A correct answer is **C**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

חומר עזר - קבוצות הרצאה, תרגול.

שאלה:

יהיו שני איברים a, b . נגדיר:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

(זו למעשה שיטה טכנית להגדיר זוגות סדורים באמצעות קבוצות בלבד.)

הוכיחו שאם:

$$(a, b) = (c, d)$$

אזי

$$a = c$$

$$b = d$$

פתרון:

נניח ש:

$$(a, b) = (c, d)$$

אז לפי ההגדרה קיבלנו את השוויון:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \boxed{\phantom{\{c\}, \{c, d\}}}$$

נפריד למקרים, אם $a = b$ אז, נקבל ש:

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

לכן מטעמי גודל נקבל:

$$\{a\} = \{c\} = \boxed{}$$

ונקבל:

$$a = b = c = \boxed{}$$

ובפרט הטענה נכונה.

אם $a \neq b$ אז נקבל ש:

$$|\{a, b\}| = \boxed{}$$

(הסימון הוא גודל הקבוצה)

אבל משוויון הקבוצות מההתחלה נקבל:

$$\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

ומטעמי גודל:

$$\{c\} \neq \{a, b\}$$

ולכן בהכרח:

$$\{c\} = \boxed{\phantom{\{a\}}}$$

ואז:

$$a = c$$

ואנחנו גם יודעים ש:

אילן אילניי

ומטעמי גודל:

לכן:

אבל אנחנו יודעים ש:

ולכן נקבל:

הגשת שאלה

בניח ש:

אז לפי ההגדרה קיבלנו את השוויון:

נפריד למקרים, אם $a = b$ אז, נקבל ש:

לכן מטעמי גודל נקבל:

ונקבל:

ובפרט הטענה נכונה.

אם $a \neq b$ אז נקבל ש:

אבל משוויון הקבוצות מההתחלה נקבל:

ומטעמי גודל:

ולכן בהכרח:

ואז:

ואנחנו גם יודעים ש:

ומטעמי גודל:

לכן:

אבל אנחנו יודעים ש:

ולכן נקבל:

$$\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

$$\{a, b\} \neq \{c\}$$

$$\{a, b\} = \{c, d\}$$

$$b \neq a = c$$

$$b =$$



$$(a, b) = (c, d)$$

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

$$\{a\} = \{c\} = \{c, d\}$$

$$a = b = c = d$$

$$|\{a, b\}| = 2$$

$$\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\{c\} \neq \{a, b\}$$

$$\{c\} = \{a\}$$

$$a = c$$

$$\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

$$\{a, b\} \neq \{c\}$$

$$\{a, b\} = \{c, d\}$$

$$b \neq a = c$$

$$b = d$$



A correct answer is $\{\{c\}, \{c, d\}\}$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $\{c, d\}$, which can be typed in as follows:

A correct answer is d , which can be typed in as follows:

A correct answer is 2 , which can be typed in as follows:

A correct answer is $\{a\}$, which can be typed in as follows:

A correct answer is d , which can be typed in as follows:

שאלה 5

לא נענה

חומר עזר - קבוצות, מערך תרגול.

ביצד נרשום תשובה: בשאלה זו רישמו הפרש קבוצות $A \setminus B$ כ $A - B$ (כלומר A מינוס B)

שאלה:

תהי A קבוצה ותהי $X \subseteq P(A)$.

נאמר כי X הינו חוג אם:

$$\begin{aligned} \emptyset &\in X \\ \forall A, B \in X : A \setminus B &\in X \end{aligned}$$

הוכיחו ש:

$$\forall A, B \in X : A \cap B \in X$$

פתרון:

יהי חוג X ותהיינה $A, B \in X$.

על פי התכונות מתקיים:

$$A \setminus B \in \text{[input box]}$$

נשתמש בתכונה עוד פעם ונקבל:

$$\text{[input box]} \setminus (\text{[input box]}) \in X$$

אבל קבוצה זו שווה ל:

$$A \cap \text{[input box]}$$

(הסבר נוסף על המעבר האחרון בפתרונות המלאים לאחר ההגשה הסופית.)



הגשת שאלה

יהי :
אילן אילניי

$$A, B \in X$$

על פי התכונות מתקיים:

$$A \setminus B \in X$$

נשתמש בתכונה עוד פעם ונקבל:

$$A \setminus (A \setminus B) \in X$$

אבל קבוצה זו שווה ל:

$$A \cap B$$

הוכחה לטענה האחרונה:

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \setminus B)} = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} = \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = (A \cap B) \end{aligned}$$



A correct answer is **X**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **A**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **A - B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

שאלה 6
לא נענה

חומר עזר - קבוצות הרצאה, תרגול.

שאלה:

תהא A קבוצה. נגדיר את הקבוצה $P(A)$ להיות:

$$P(A) = \{M | M \subseteq A\}$$

כלומר כל הקבוצות שמוכלות בקבוצה A (ובמילים אחרות, כל תתי-הקבוצות של A).
הוכיחו שמתקיים (לכל שתי קבוצות A, B):

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

פתרון:

יש להוכיח הכלה דו כיוונית:

ביוון ראשון $(\supseteq)$:

יהי:

$$M \in P(A \cap B)$$

יש להוכיח ש:

$$M \in P(A) \cap P(B)$$

אנחנו יודעים מהגדרת קבוצת החזקה שמתקיים:

$$M \subseteq (A \cap \text{[]})$$

ולכן נקבל מהגדרת החיתוך ש:

אילן אילניי

שוב מהגדרת קבוצת החזקה:

$$M \subseteq A \wedge M \subseteq \boxed{}$$

$$M \in \boxed{} \wedge M \in P(B)$$

$$M \in P(A) \cap \boxed{}$$

$$P(A) \cap P(B) \supseteq P(A \cap B)$$

וקיבלנו:

כיוון שני $(\subseteq)$:

לכיוון השני, יהי:

$$M \in P(A) \cap P(B)$$

יש להוכיח ש:

$$M \in P(A \cap B)$$

אנחנו יודעים ש:

$$M \in P(A) \wedge M \in \boxed{}$$

ולכן נקבל:

$$M \subseteq A \wedge M \subseteq \boxed{}$$

מפה:

$$M \subseteq (\boxed{} \cap B)$$

ואז:

$$M \in P(A \cap \boxed{})$$

וקיבלנו

$$P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$$

משני הכיוונים קיבלנו, סה"כ, ש:

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

הגשת שאלה

$$M \in P(A \cap B)$$

$$\Updownarrow$$

$$M \subseteq A \cap B$$

$$\Updownarrow$$

$$M \subseteq A \wedge M \subseteq B$$

$$\Updownarrow$$

$$M \in P(A) \wedge M \in P(B)$$

$$\Updownarrow$$

$$M \in P(A) \cap P(B)$$

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

אילן אילניי

A correct answer is **$P(A)$** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **$P(B)$** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **$P(B)$** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **A**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

שאלה 7

לא נענה

חומר עזר - קבוצות, מערך תרגול.

שאלה:

תהי A קבוצה כלשהי עם 21 איברים.

האם ייתכן כי קיימת B כך ש:

$$P(B) = A$$

פתרון:

כפי שלמדתם, אם גודלה של B הוא n , גודלה של $P(B)$ הוא:

$$|P(B)| = \text{[]}$$

(הסימון הוא גודל הקבוצה)

לכן, הצטמצמנו לשאלה - האם קיים n כך ש:

$$|P(B)| = 21$$

ממה שידוע לנו, התשובה היא:

Not answered

הגשת שאלה

אנחנו יודעים ש:

$$|P(B)| = 2^n$$

(הסימון הוא גודל הקבוצה)

אך ברור שלא קיים n כך ש:

$$2^n = 21$$

מכיוון ש21 מתחלק במספר שאינו 2.

A correct answer is **2097152**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **false**.

שאלה 8

לא נענה

חומר עזר - אינדוקציה.

שאלה:

הוכח באינדוקציה:

$$S_n = \sum_{i=1}^n (9 + 2 \cdot i) = n^2 + 10 \cdot n.$$

פתרון:

ראשית, עבור $n=1$, נקבל את השוויון:

$$S_1 = 9 + 2 \cdot 1 = 11$$

כעת, נניח שהשענה נכונה עבור $n=k$, ונוכיח עבור $n=k+1$.

אנחנו מניחים ש:

$$\sum_{i=1}^k \boxed{} = k^2 + 10 \cdot k$$

אנחנו רוצים למצוא את:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \boxed{}$$

נפרק את האיבר האחרון מהסכום ונקבל:

$$\sum_{i=1}^k (9 + 2 \cdot i) + \boxed{}$$

אם נציב את הנחת האינדוקציה, נקבל:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (9 + 2 \cdot i) = \boxed{} + 9 + 2 \cdot (k + 1)$$

ששווה (אחרי כינוס איברים) ל:

$$\boxed{}$$

■

הגשת שאלה

A correct answer is $2 \cdot i + 9$, which can be typed in as follows: `2*i+9`

A correct answer is $2 \cdot i + 9$, which can be typed in as follows: `2*i+9`

A correct answer is $2 \cdot (k + 1) + 9$, which can be typed in as follows: `2*(k+1)+9`

A correct answer is $k^2 + 10 \cdot k$, which can be typed in as follows: `k^2+10*k`

A correct answer is $(k + 1)^2 + 10 \cdot (k + 1)$, which can be typed in as follows: `(k+1)^2+10*(k+1)`

שאלה 9

לא נענה

חומר עזר - אינדוקציה.

שאלה:

הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$3^n \geq n^2$$

פתרון:

נוכיח באינדוקציה, הבסיס יהיה $n = 1$ וגם $n = 2$.

בסיס:

לכל שני המקרים יש פשוט לעשות בדיקה שאותה לא צריכה להיות לבם בעיה לעשות.

צעד:

נניח נכונות הטענה עבור $n = k$ כך ש $k \geq 2$,

נוכיח נכונות הטענה עבור $n = k + 1$,

לפי הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$3^k \geq \text{[]}$$

נכפיל את שני האגפים ב3 ונקבל:

$$3^{k+1} \geq \text{[]}$$

עכשיו נשים לב שמכיוון ש $k \geq 2$ מתקיים:

$$k^2 \geq 2 \cdot k$$

ובגלל ש $k \geq 1$ מתקיים:

$$k^2 \geq 1$$

ואז:

$$2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 \geq \text{[]}$$

ובנוסף:

$$3 \cdot k^2 \geq k^2 + 2 \cdot k + 1 = \text{[]}$$

לכן קיבלנו:

$$3^{k+1} \geq (k+1)^2$$



הגשת שאלה

צעד:

נניח נכונות הטענה עבור $n = k$ כך ש $k \geq 2$,

נוכיח נכונות הטענה עבור $n = k + 1$,

לפי הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$3^k \geq k^2$$

נכפיל את שני האגפים ב3 ונקבל:

$$3^{k+1} \geq 3 \cdot k^2$$

עכשיו נשים לב שמכיוון ש $k \geq 2$ מתקיים:

$$k^2 \geq 2 \cdot k$$

ובגלל ש $k \geq 1$ מתקיים:

אילן אילניי

$$k^2 \geq 1$$

ואז:

$$2 \cdot k^2 \geq 2 \cdot k + 1$$

ובנוסף:

$$3 \cdot k^2 \geq k^2 + 2 \cdot k + 1 = (k + 1)^2$$

לכן קיבלנו:

$$3^{k+1} \geq (k + 1)^2$$



A correct answer is k^2 , which can be typed in as follows:

A correct answer is $3 \cdot k^2$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $2 \cdot k + 1$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $(k + 1)^2$, which can be typed in as follows:

שאלה 10

לא נענה

חומר עזר - אינדוקציה.

שאלה:

סדרת פיבונאצ'י נתונה על ידי נוסחאת הנסיגה:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

לכל $n \geq 3$, ותנאי ההתחלה:

$$F_1 = F_2 = 1$$

הוכיחו את השוויון הבא:

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

בונוס:

נסו להכליל למקרה שתנאי ההתחלה לא נתונים.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה:

בסיס:

$$n = 1$$

נציב ונקבל:

$$F_3 - 1 = F_1 + F_2 - 1 = F_1$$

כמתבקש.

צעד:

נניח נכונות הטענה עבור $n = k$ ונוכיח עבור $n = k + 1$,

על פי הנחת האינדוקציה נקבל:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k =$$

אילן אילניי

נוסיף F_{k+1} לשני הצדדים ונקבל:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} =$$



הערה:

בשביל הבונוס חשבו איפה השתמשנו בתנאי ההתחלה.

הגשת שאלה

פה נוכיח בלי תנאי ההתחלה שאם:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

אז:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - F_2$$

בסיס:

$$n = 1$$

נציב ונקבל:

$$F_3 - F_2 = F_1 + F_2 - F_2 = F_1$$

כמתבקש.

צעד:

נניח נכונות הטענה עבור $n = k$ ונוכיח עבור $n = k + 1$,

על פי הנחת האינדוקציה נקבל:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k = F_{k+2} - F_2$$

נוסיף F_{k+1} לשני הצדדים ונקבל:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{k+1} = F_{k+2} - F_2 + F_{k+1} = F_{k+3} - F_2$$



A correct answer is $F_{k+2} - 1$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $F_{k+3} - 1$, which can be typed in as follows:

שאלה 11

לא נענה

חומר עזר - אינדוקציה.

הערה: תהא A קבוצה בת n איברים. אחד הסימונים המקובלים לכך הוא $|A| = n$ (אנחנו נשתמש בו בהרחבה בהמשך הקורס).

שאלה:

תהי A קבוצה כך ש $|A| = n$. נגדיר :

$$B = \{(M, N) \in P(A) \times P(A) \mid M \subseteq N\}$$

מצאו את הגודל של B .

פתרון:

אילן אילניי

נוכיח באינדוקציה ש:

בסיס:

עבור $n = 0$ נקבל:

$$A = \emptyset$$

$$P(A) = \{\emptyset\}$$

$$B = \{(\emptyset, \emptyset)\}$$

ולכן:

$$|B| = \text{[]}$$

צעד:

נניח כעת את נכונות הטענה עבור n נוכיח עבור $n + 1$.

תהי קבוצה:

$$|A| = n + 1$$

ניקח:

$$a \in A$$

ונקבל:

$$|A \setminus \{a\}| = \text{[]}$$

לכן נקבל לפי הנחת האינדוקציה שאם:

$$C_1 = \{(M, N) \in P(A \setminus \{a\}) \times P(A \setminus \{a\}) \mid M \subseteq N\}$$

אז:

$$|C_1| = \text{[]}$$

עכשיו נשים לב שאם:

$$(M, N) \in B$$

אזי יש שלוש אפשרויות:

$$1. \text{[]} \notin N$$

$$2. a \in N \setminus \text{[]}$$

$$3. a \in M \cap N$$

(רמז: חשבו על האיבר a ממקודם. איך ניתן לסדר אותו ב- N וב- M).

האפשרות הרביעית היא:

$$a \in M \setminus N$$

אבל אז:

$$M \not\subseteq N$$

בסתירה להגדרת B .

עכשיו נגדיר:

$$C_2 = \{(M, N \cup \{a\}) \mid M \subseteq N \subseteq A \setminus \{a\}\}$$

$$C_3 = \{(M \cup \{a\}, N \cup \{a\}) \mid M \subseteq N \subseteq A \setminus \{a\}\}$$

ונשים לב שאלו, יחד עם C_1 , הן בדיוק האופציות שכתבנו קודם.

בנוסף הקבוצות זרות ולכן:

אילן אילניי

$$C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 = B$$

(הסימון הוא של איחוד זר)

אבל לכל:

$$(M, N) \in C_1$$

מתקיים:

$$(M, N \cup \{a\}) \in C_2$$

ו:

$$(M \cup \{a\}, N \cup \{a\}) \in C_3$$

ולכן:

$$|C_3| = |C_2| = |C_1| = \text{[]}$$

ואז:

$$|B| = |C_1| + |C_2| + |C_3| = \text{[]}$$

והוכחנו את הטענה, כנדרש.



הגשת שאלה

A correct answer is **1**, which can be typed in as follows: **1**

A correct answer is **n**, which can be typed in as follows: **n**

A correct answer is **3^n**, which can be typed in as follows: **3^n**

A correct answer is **a**, which can be typed in as follows: **a**

A correct answer is **M**, which can be typed in as follows: **M**

A correct answer is **3^n**, which can be typed in as follows: **3^n**

A correct answer is **3^{n+1}**, which can be typed in as follows: **3^{(n+1)}**

סיום שלב צפייה במשוב

ניווט בוחן

11 **10** **9** **8** **7** **6** **5** **4** **3** **2** **1** **i**

סיום שלב צפייה במשוב

195-88 מתמטיקה בדידה תשע"ה סמסטר קיץ

התחיל ב:	20:12 , 4/11/2016
מצב	הסתיים
הושלם ב-	20:13 , 4/11/2016
הזמן שלקח	59 שניות
ציון	קיבלתם 0.00 מתוך הציון המירבי 10.00 (0%)

מידע

כעת נפרט את דרך הכתיבה בתרגיל זה. חשוב לקרוא!

1. אותיות יווניות: כותבים את שם האות. ראו בטבלה הבאה כיצד לכתוב את האותיות הרלוונטיות:

אותיות יווניות וכיצד לכתוב אותן	
האות היוונית	כיצד לכתוב אותה
α	alpha
β	beta
λ	lambda
μ	mu

2. קבוצות: קבוצות כותבים בין סוגריים מסולסלים, למשל את $\{1,2\}$ כותבים $\{1,2\}$.
3. כאשר כופלים משתנים, למשל ab , נסיף * ביניהם, כלומר כתבו $a * b$. אחרת, התשובה לא תתקבל.
4. אינדקסים למשתנים: כדי לכתוב s_1 כותבים פשוט $s[1]$.
5. שימו לב שאתם רושמים אותיות גדולות וקטנות בהתאם לתרגיל.
6. כשאתם רוצים לרשום זוג סדור למשל (a,b) רשמו $[a,b]$.
- בהצלחה!

שאלה 1

לא נענה

חומר עזר - יחסים

הזנת הזוג הסדור (a,b) נעשית ע"י $[a,b]$

שאלה:

נתונות קבוצה A ושני יחסי שקילות:

$$R, S \subseteq A \times A$$

הוכח ש:

$$R \cap S$$

יחס שקילות.

הוכחה:

נוכיח את שלושת התכונות.

רפלקסיביות:

יהי:

$$a \in \boxed{}$$

ולפי הרפלקסיביות של R ו S נקבל:

$$(a, a) \in R \wedge (a, a) \in \boxed{}$$

ומפה:

$$(a, a) \in R \cap S$$

סימטריות:

יהי:

$$(a, b) \in R \cap S$$

יש להוכיח ש:

$$\boxed{} \in R \cap S$$

מההנחה ידוע כי:

$$(a, b) \in R \wedge (a, b) \in \boxed{}$$

ומכיוון ש R ו S סימטרים נקבל:

$$(b, a) \in R \wedge (b, a) \in S$$

ומפה:

$$(b, a) \in R \cap S$$

טרניסיטיביות:

יהי:

$$(a, b), (b, c) \in R \cap S$$

יש להוכיח:

$$\boxed{} \in R \cap S$$

אנחנו יודעים:

$$(a, b), (b, c) \in R \wedge (a, b), (b, c) \in \boxed{}$$

ומכיוון ש R ו S טרנסיטיבים נקבל:

$$(a, c) \in R \wedge (a, c) \in S$$

ומפה:

$$(a, c) \in R \cap \boxed{}$$

מ.ש.ל.

הגשת שאלה

רפלקסיביות:

יהי:

אילן אילניי

$$a \in A$$

ולפי הרפלקסיביות של R ו S נקבל:

$$(a, a) \in R \wedge (a, a) \in S$$

ומפה:

$$(a, a) \in R \cap S$$

סימטריות:

יהי:

$$(a, b) \in R \cap S$$

יש להוכיח ש:

$$(b, a) \in R \cap S$$

מההנחה ידוע כי:

$$(a, b) \in R \wedge (a, b) \in S$$

ומכיוון ש R ו S סימטרים נקבל:

$$(b, a) \in R \wedge (b, a) \in S$$

ומפה:

$$(b, a) \in R \cap S$$

טרנסיטיביות:

יהי:

$$(a, b), (b, c) \in R \cap S$$

יש להוכיח:

$$(a, c) \in R \cap S$$

אנחנו יודעים:

$$(a, b), (b, c) \in R \wedge (a, b), (b, c) \in S$$

ומכיוון ש R ו S טרנסיטיבים נקבל:

$$(a, c) \in R \wedge (a, c) \in S$$

ומפה:

$$(a, c) \in R \cap S$$

מ.ש.ל

A correct answer is A , which can be typed in as follows: A correct answer is S , which can be typed in as follows: A correct answer is $[b, a]$, which can be typed in as follows: A correct answer is S , which can be typed in as follows: A correct answer is $[a, c]$, which can be typed in as follows: A correct answer is S , which can be typed in as follows: A correct answer is S , which can be typed in as follows:

חומר עזר - קשר שקילות

תזכורת על מנת לכתוב a_i יש לרשום $a[i]$

שאלה:

נתונה קבוצה A עם יחס שקילות $\approx$, וקיימים $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ כך ש:

$$\forall b \in A \exists i : a_i \approx b$$

מצאו את כל האפשרויות לגודל של קבוצת המנה $A/\approx$.

פתרון:

נתחיל מלטעון את הטענה הבאה, אם:

$$B = \{[a_1], [a_2], [a_3], [a_4]\}$$

אז:

$$A/\approx = B$$

נניח בשלילה שהקבוצות אינן שוות אזי קיים:

$$b \in \text{[input]}$$

כך ש:

$$[b] \notin \text{[input]}$$

אבל קיים i כך ש:

$$b \approx \text{[input]}$$

ואז:

$$[b] = \text{[input]}$$

בסתירה לכך ש:

$$[a_i] \in \text{[input]}$$

עכשיו שהוכחנו שיוויון ברור ש:

$$|A/\approx| \leq \text{[input]}$$

וכל האפשרויות (חוץ מריק) קיימות.

דוגמא:

ניקח את $A = \mathbb{Z}$ ונגדיר יחס שקילות:

$$a \approx b \Leftrightarrow 2|a - b$$

נקבל שכל איבר שקול לו או 2 ואז:

$$A/\approx = \{[1], [2]\}$$

הגשת שאלה

נתחיל מלטעון את הטענה הבאה, אם:

$$B = \{[a_1], [a_2], [a_3], [a_4]\}$$

$$A_{/\approx} = B$$

אז:

אילן אילניי

נניח בשלילה שהקבוצות אינן שוות אזי קיים:

$$b \in A$$

כך ש:

$$[b] \notin B$$

אבל קיים i כך ש:

$$b \approx a_i$$

ואז:

$$[b] = [a[i]]$$

בסתירה לכך ש:

$$[a_i] \in B$$

עכשיו שהוכחנו שיוויון ברור ש:

$$|A_{/\approx}| \leq 4$$

וכל האפשרויות (חוץ מריק) קיימות.

A correct answer is **A**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **a_i**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **[a_i]**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **4**, which can be typed in as follows:

שאלה 3

לא נענה

חומר עזר - יחסי שקילות

תזכורת: על מנת לרשום a^n רישמו $a^{(n[1])}$.

שאלה:

נגדיר יחס $\approx$ על $\mathbb{N}$:

$$a \approx b \iff \exists n, m \in \mathbb{N} : a^n = b^m$$

הוכיחו ש $\approx$ יחס שקילות.

פתרון:

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{N}$ נוכל לבחור הרבה מספרים אבל בפרט אם:

$$1 = n = \text{[input box]}$$

נקבל:

$$a^1 = \text{[input box]}$$

ואז:

אילן אילניי

$$a \approx a$$

סימטריות:

יהי $a \approx b$ ו $a, b \in \mathbb{N}$ יש להוכיח:

$$b \approx$$

אנחנו יודעים שקיימים n, m כך ש

$$a^n =$$

וזה גורר בבירור ש

$$b^m = a^n$$

ולכן

$$b \approx a$$

טרניסיטיביות:

יהי $a \approx b, b \approx c$ יש להוכיח ש:

$$a \approx$$

קיימים n_1, n_2, m_1, m_1 כך ש

$$a^{n_1} =$$

$$b^{n_2} =$$

ולכן נבחר:

$$n =$$

$$m =$$

ונקבל

$$a^n = c^m$$

ואז

$$a \approx c$$



הגשת שאלה

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{N}$ נוכל לבחור הרבה מספרים אבל בפרט אם

$$1 = n = m$$

ונקבל

$$a^1 = a^1$$

ואז

$$a \approx a$$

סימטריות:

יהי $a \approx b$ ו $a, b \in \mathbb{N}$ יש להוכיח

$$b \approx a$$

אנחנו יודעים שקיימים n, m כך ש

אילן אילניי

זזה גורר בבירור ש

$$a^n = b^m$$

$$b^m = a^n$$

$$b \approx a$$

ולכן

טרניסיטיביות:

$$a \approx b, b \approx c$$

יהי להוכיח ש

$$a \approx c$$

קיימים n_1, m_1, n_2, m_2 כך ש

$$a^{n_1} = b^{m_1}$$

$$b^{n_2} = c^{m_2}$$

ולכן נבחר

$$n = n_1 \cdot n_2$$

$$m = m_1 \cdot m_2$$

ונקבל

$$a^n = (a^{n_1})^{n_2} = (b^{m_1})^{n_2} = (b^{n_2})^{m_1} = (c^{m_2})^{m_1} = c^m$$

ואז

$$a \approx c$$



A correct answer is m , which can be typed in as follows:

A correct answer is a , which can be typed in as follows:

A correct answer is a , which can be typed in as follows:

A correct answer is b^m , which can be typed in as follows:

A correct answer is c , which can be typed in as follows:

A correct answer is b^{m_1} , which can be typed in as follows:

A correct answer is c^{m_2} , which can be typed in as follows:

A correct answer is $n_1 \cdot n_2$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $m_1 \cdot m_2$, which can be typed in as follows:

שאלה 4

לא נענה

הגדרות:

בהינתן יחס $R \subseteq A \times B$ ויחס $S \subseteq B \times C$, נגדיר את ההרכבה שלהם $S \circ R$:

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

ובמילים - כל הזוגות (a, c) כך שקיים b שעבורו aRb, bSc .

עוד נגדיר: נאמר שיחס $T \subseteq E \times D$ הוא על, אם לכל $d \in D$ קיים $e \in E$ כך ש- $(e, d) \in T$.

בהינתן יחס T על, נגדיר את היחס ההפוך $T^{-1} \subseteq D \times E$ להיות היחס

אילן אילניי

$$T^{-1} = \{(d, e) \in D \times E : (e, d) \in T\}$$

הוכח:

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

הערה:

בשאלה זו כתבו T^{-1} עבור T

הוכחה:

יהי

$$(c, a) \in (S \circ R)^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$(a, c) \in \boxed{} \circ \boxed{}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists b \in B : \boxed{} \in R \wedge$$

$$\wedge (b, c) \in \boxed{}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists b \in B : (b, a) \in \boxed{} \wedge$$

$$\wedge \boxed{} \in S^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$(c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$$

מ.ש.ל.

הגשת שאלה

יהי

$$(c, a) \in (S \circ R)^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$(a, c) \in S \circ R$$

$$\Downarrow$$

$$\exists b \in B : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S$$

$$\Downarrow$$

$$\exists b \in B : (b, a) \in R^{-1} \wedge (c, b) \in S^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$(c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$$

A correct answer is S , which can be typed in as follows:

A correct answer is R , which can be typed in as follows:

A correct answer is $[a, b]$, which can be typed in as follows:

A correct answer is S , which can be typed in as follows:

A correct answer is $\frac{1}{R}$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $[c, b]$, which can be typed in as follows:

אילן אילנני

שאלה 5

לא נענה

חומר עזר - יחסי סדר

שאלה:

נתונה קבוצה:

$$A = \{4, 8, 12\}$$

מצאו כמה יחסי סדר לינארים (יש שמכירים את המינוח שלמים או מלאים) יש על הקבוצה.

פתרון:

אפשר ללכת ישירות על פי ההגדרה ולבדוק את כל האפשרויות, אבל נשים לב לדבר נוח:

ביחס סדר מלא אנו מסדרים את כל האיברים בשורה (או עמודה), לכן (כאשר הקבוצה בגודל 3) יהיה איבר קטן ביותר, אמצעי וגדול ביותר.

כמות האפשרויות לאיבר הגדול ביותר היא:

לאחר שבחרנו איבר גדול ביותר כמות האפשרויות שנותרו לאיבר האמצעי היא:

ולבסוף כמות האפשרויות שנותרו לאיבר הקטן ביותר היא:

את המספרים האלה יש להכפיל כדי לקבל את כל האפשרויות, לכן יש:

יחסי סדר מלאים על הקבוצה.

הגשת שאלה

כמות האיפשרויות לאיבר מקסמלי היא 3.

לאחר שבחרנו איבר מקסמיילי כמות האפשרויות לאיבר האמצעי היא 2.

ולבסוף כמות האפשרויות שנשאר לאיבר האחרון היא 1.

את המספרים האלה יש להכפיל כדי לקבל את כל האפשרויות, לכן יש 6, יחסי סדר שונים.

A correct answer is 6, which can be typed in as follows:

A correct answer is 2, which can be typed in as follows: 2

A correct answer is 1, which can be typed in as follows: 1

A correct answer is 6, which can be typed in as follows: 6

אילן אילניי

שאלה 6

לא נענה

חומר עזר - יחסי סדר

שאלה:

תהי B קבוצה ותהי תת קבוצה $A \subseteq B$. נגדיר:

$$R = \{(x, x) \mid x \in B\}$$

$$O = A \times (B \setminus A)$$

הוכיחו:

$O \cup R$ יחס סדר חלקי על B .

פתרון:

רפלקסיביות:

יהי:

$$x \in \boxed{}$$

צ"ל $(x, x) \in O \cup R$.

אבל מתקיים:

$$(x, x) \in \boxed{}$$

ומפה נובע ש:

$$(x, x) \in O \cup R$$

אנטי סימטריות:

יהיו $x, y \in B$ כך ש $(x, y), (y, x) \in O \cup R$, צ"ל $x = y$.

נניח בשלילה כי $x \neq y$ ולכן נקבל:

$$(x, y), (y, x) \notin R$$

לכן נקבל בהכרח:

$$(x, y), (y, x) \in \boxed{}$$

לכן לפי הזוג (x, y) מתקיים:

$$y \in B \setminus A$$

ובכמו כן לפי הזוג (y, x) מתקיים:

$$y \in \boxed{}$$

בסתירה.

לכן

אילן אילניי

$x =$

טרנזיטיביות:

יהיו $x, y, z \in B$ כך ש $(x, y), (y, z) \in O \cup R$.
צ"ל $(x, z) \in O \cup R$.

נחלק למקרים:

אם $x = y$ נקבל שיש להוכיח ש:

$(y, z) \in O \cup$

אך זה נתון.

בדומה נקבל שאם $y = z$ זהו מקרה ברור.

במקרה שבו $x \neq y, y \neq z$ נקבל בדומה למה שעשינו באנטי-סימטריות ש:

$(x, y), (y, z) \in$

ושוב באופן דומה נקבל כי $y \in A \wedge y \notin A$ בסתירה, לכן מצב זה אינו אפשרי כלל.



הגשת שאלה

רפלקסיביות:

יהי

$x \in A$

מתקיים:

$(x, x) \in R$

ומפה נובע ש:

$(x, x) \in O \cup R$

אי סימטריות:

יהי $(x, y), (y, x) \in O \cup R$.

נניח $x \neq y$ ולכן נקבל:

$(x, y), (y, x) \notin R$

לכן נקבל בהכרח:

$(x, y), (y, x) \in O$

אך לפי הגדרת O נקבל:

$y \in B \setminus A$

לפי הזוג הראשון, ו:

$y \in A$

לפי הזוג השני, אך בניגוד לזה:

$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

אילן אילניי

שזוהי סתירה ולכן בהרכב:

$$x = y$$

טרנסיטיביות:

$$(x, y), (y, z) \in O \cup R$$

אם $x = y$ נקבל שיש להוכיח ש:

$$(y, z) \in O \cup R$$

אך זה ברור.

בדומה נקבל שאם $y = z$ זהו מקרה ברור.במקרה שבו $x \neq y \neq z$ נקבל בדומה למה שעשינו בסימטריות ש:

$$(x, y), (y, z) \in O$$

אך עכשיו בדיוק כמו קודם נקבל

$$y \in A \cap (B \setminus A)$$

ושזוהי סתירה וכל דבר שנגיד אחר כך יהיה נכון, בפרט:

$$(x, z) \in O \cup R$$



* שימו לב שהגדרת הטרנסיטיביות מבקשת שהמשפט הבא יהיה נכון:

$$(x, y), (y, z) \in O \cup R \rightarrow (x, z) \in O \cup R$$

אך ניזכר שבלוגיקה אם A אינו נכון אזי תמיד:

$$A \rightarrow B$$

נכון לכל B .

בפרט תמיד אפשר להגיד:

$$A \rightarrow (x = y)$$

נכון.

בדיוק כמו שאפשר להגיד:

$$A \rightarrow (x \neq y)$$

נכון.

A correct answer is B , which can be typed in as follows: A correct answer is R , which can be typed in as follows: A correct answer is O , which can be typed in as follows: A correct answer is A , which can be typed in as follows: A correct answer is y , which can be typed in as follows: A correct answer is R , which can be typed in as follows: A correct answer is O , which can be typed in as follows:

שאלה 7

לא נענה

חומר עזר - יחסי סדר

תרגיל:יהי יחס סדר חלקי $R \subseteq X \times X$ ותהי $Y \subseteq X$ קבוצה.

אילן אילניי

הוכיחו:

$$S = R \cap (Y \times Y)$$

יחס סדר חלקי על Y .

הוכחה:רפלקסיביות:יהי $y \in Y$, צריך להוכיח כי $(y, y) \in S$.

אנחנו יודעים ש:

$$(y, y) \in Y \times \boxed{}$$

לפי הגדרת המכפלה הקרטזית.

כמו כן:

$$y \in X$$

ולכן לפי הרפלקסיביות של R :

$$(y, y) \in \boxed{}$$

לכן:

$$(y, y) \in R \cap (Y \times Y) = \boxed{}$$

אנטי-סימטריות:יהיו $a, b \in Y$ כך ש:

$$(a, b), (b, a) \in S$$

צ"ל כי $a = b$.

לפי ההגדרה:

$$(a, b), (b, a) \in R \cap (Y \times Y)$$

ולכן בפרט:

$$(a, b), (b, a) \in \boxed{}$$

ולפי האנטי סימטריות של R נקבל:

$$a = \boxed{}$$

טרנזיטיביות:יהיו $a, b, c \in Y$ כך ש:

$$(a, b), (b, c) \in S$$

צ"ל $(a, c) \in S$.

לפי הגדרת הכפל הקרטזי נקבל:

$$(a, c) \in Y \times \boxed{}$$

בנוסף, כיוון ש

$$(a, b), (b, c) \in \boxed{}$$

מהטרנזיטיביות של R נקבל:

$$(a, c) \in R$$

$$(a, c) \in R \cap (Y \times Y) = S$$

■

וסה"כ ביחד: אילן אילניי

הגשת שאלה

רפלקסיביות:
יהי:

$$y \in Y$$

אנחנו יודעים ש:

$$(y, y) \in Y \times Y$$

לפי הגדרת הכפל.
כמו כן:

$$y \in X$$

ולכן לפי רפלקסיביות של R

$$(y, y) \in R$$

לכן

$$(y, y) \in R \cap Y \times Y = S$$

אנטי-סימטריות:
יהיו $a, b \in Y$ כך ש:

$$(a, b), (b, a) \in S$$

מכך נובע ש:

$$(a, b), (b, a) \in R \cap Y \times Y$$

ולכן:

$$(a, b), (b, a) \in R$$

ולפי אנטי סימטריות של R נקבל:

$$a = b$$

טרנסיטיביות:

יהי $a, b, c \in Y$ כך ש:

$$(a, b), (b, c) \in S$$

לפי הגדרת הכפל הקרטזי נקבל:

$$(a, c) \in Y \times Y$$

בנוסף כמו קודם נוכל לקבל ש:

$$(a, b), (b, c) \in R$$

אבל מטרנסיטיביות של R נקבל:

$$(a, c) \in R$$

וקיבלנו:

$$(a, c) \in R \cap Y \times Y = S$$

■

A correct answer is Y , which can be typed in as follows:

A correct answer is R , which can be typed in as follows:

A correct answer is S , which can be typed in as follows:

A correct answer is R , which can be typed in as follows:

A correct answer is b , which can be typed in as follows:

A correct answer is Y , which can be typed in as follows:

A correct answer is R , which can be typed in as follows:

חומר עזר - יחסי סדר

תזכורת: יחס סדר חלקי נקרא לינארי אם בין כל שני איברים מתקיים היחס (בכיוון אחד כמובן, אם הם שונים).
בכתיב מתמטי, R יחס סדר חלקי לינארי על A אם לכל זוג איברים $a, b \in A$ מתקיים aRb או מתקיים bRa .

שאלה:

תהי A קבוצה ויהיו $R, S \subseteq A \times A$ יחסי סדר חלקי כך ש- R יחס סדר חלקי לינארי.

נניח:

$$R \subseteq S$$

הוכיחו ש:

$$R = S$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $R \neq S$, לכן קיימים:

$$x, y \in \text{[input box]}$$

כך ש

$$(x, y) \in S$$

וגם

$$(x, y) \notin \text{[input box]}$$

אך לפי הגדרת יחס סדר לינארי נקבל שאם:

$$(x, y) \notin R$$

אזי:

$$(y, x) \in R$$

ובכיוון ש- $R \subseteq S$ נקבל:

$$(y, x) \in S$$

לכן לפי תכונת האנטי סימטריות של S נקבל:

$$x = \text{[input box]}$$

אזי קיבלנו:

$$(x, x) \notin \text{[input box]}$$

בסתירה לרפלקסיביות של R .



הערה:

שימו לב שמשמעות המשפט היא דבר מאוד הגיוני, אם יש לי יחס סדר שמשווה בין כל שני איברים אז אי אפשר להגדיל אותו.

הגשת שאלה

נניח חוסר שיוויון, לכן קיים:

$$x, y \in A$$

כך ש: אילן אילניי

$$(x, y) \in S$$

וגם:

$$(x, y) \notin R$$

אך לפי הגדרת יחס סדר מלא נקבל שאם:

$$(x, y) \notin R$$

אזי:

$$(y, x) \in R$$

ולפי נתון ההכלה נקבל:

$$(y, x) \in S$$

אבל לפי איסימטריות של S נקבל:

$$x = y$$

אזי קיבלנו:

$$(x, x) \notin R$$

בסתירה לרפלקסיביות של R .



A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is R , which can be typed in as follows:

A correct answer is y , which can be typed in as follows:

A correct answer is R , which can be typed in as follows:

שאלה 9

לא נענה

חומר עזר - יחסי סדר

שאלה:

יהי R יחס סדר על קבוצה X כך שלכל תת קבוצה לא ריקה $\emptyset \neq A \subseteq X$ קיים חסם תחתון $\inf(A) \in X$. הוכיחו שלכל תת קבוצה לא ריקה $\emptyset \neq A \subseteq X$ בעלת חסם מלעיל, קיים $\sup(A)$.

פתרון:

תהי תת קבוצה לא ריקה $\emptyset \neq A \subseteq X$, כך ש A חסומה מלעיל, לפי זה קיים:

$$a \in \text{[input box]}$$

כך שלכל

$$y \in \text{[input box]}$$

מתקיים

$$(y, a) \in \boxed{}$$

נגדיר את קבוצת חסמי המלעיל של A :

$$B = \{x \in X \mid \forall y \in A : (y, x) \in R\}$$

ברור ש

$$B \subseteq \boxed{}$$

בנוסף מכיוון ש $a \in B$ ברור ש:

$$\emptyset \neq B$$

לכן לפי הנתון נקבל שקיים ל B חסם תחתון:

$$S = \inf(B)$$

נוכיח שזהו חסם מלעיל של A ,

יהי:

$$y \in A$$

לפי הגדרת B לכל $x \in B$ מתקיים:

$$(y, x) \in R$$

לכן y חסם מלרע של B ולפי הגדרת חסם תחתון נסיק כי

$$(y, S) \in R$$

הוכחנו כי $\inf(B)$ חסם מלעיל של A .

לכן $\inf(B) \in B$, ולכן $\inf(B)$ הוא המינימום (האיבר הקטן ביותר) בקבוצה B (קבוצת חסמי המלעיל של A).

לכן לפי ההגדרה, $\inf(B)$ הינו החסם העליון של A , כלומר

$$\inf(B) = \sup(A)$$



הגשת שאלה

A correct answer is X , which can be typed in as follows:

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is R , which can be typed in as follows:

A correct answer is X , which can be typed in as follows:

חומר עזר - אינדוקציה

שאלה זו היא בונוס, ולא חובה (אבל רצוי) לעשות אותה.

הגדרות:

העצרת של מספר טבעי n מוגדרת באופן הבא:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

מקדם הבינום של $m \leq n$ הוא

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

כאשר $m \geq n$, מקדם הבינום מוגדר להיות אפס:

$$\forall m \geq n : \binom{n}{m} = 0$$

תכונה של מקדמי הבינום היא:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

שאלה:

הוכיחו את נוסחת הבינום של ניוטון:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i}$$

פתרון:

נוכיח באינדוקציה:

בסיס: $n = 1$

במקרה הזה נקבל:

$$(x+y)^0 = \sum_{i=0}^0 \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = 1$$

ושיוויון זה ברור.

צעד:

נניח נכונות הטענה עבור n , נוכיח עבור $n+1$.

נתחיל מלפשט את מה שאנחנו מחפשים:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y)$$

ששווה לפי הנחת האינדוקציה ל:

$$\left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \boxed{} \right) \cdot (x+y)$$

נפתח ונקבל:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^{i+1} \cdot y^{n-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \boxed{}$$

נחליף משתנים ונכניס את הסכומים כדי לקבל:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) \cdot x^i \cdot y^{n-i+1}$$

נשתמש בתכונה שסיפרנו עליה בהתחלה ונקבל:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot \boxed{}$$



הגשת שאלה

אילן אילניי

בסיס: $n = 0$

במקרה הזה נקבל:

$$(x + y)^0 = \sum_{i=0}^0 \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = 1$$

ושיוויון זה ברור.

צעד:

נניח נכונות השענה עבור n , נוכיח עבור $n + 1$.

נתחיל מלפשט את מה שאנחנו מחפשים:

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)^n \cdot (x + y)$$

ששווה לפי הנחת האינדוקציה ל:

$$\left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right) \cdot (x + y)$$

נפתח ונקבל:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^{i+1} \cdot y^{n-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i+1}$$

נחליף משתנים ונכניס את הסכומים כדי לקבל:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) \cdot x^i \cdot y^{n-i+1}$$

נשתמש בתכונה שסיפרנו עליה בהתחלה ונקבל:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot x^i \cdot y^{n+1-i}$$



שימו לב שאפשר להוכיח את הבינום גם בצורה קומבינטורית יותר פשוטה.

בנוסף נסו להגדיר פעולה דומה שבעזרתה תוכלו לתאר את:

$$(x + y + z)^n$$

A correct answer is $x^i \cdot y^{n-i}$, which can be typed in as follows: `x^i*y^(n-i)`

A correct answer is $x^i \cdot y^{n-i+1}$, which can be typed in as follows: `x^i*y^(n-i+1)`

A correct answer is $x^{i+1} \cdot y^{n-i}$, which can be typed in as follows: `x^(i+1)*y^(n-i)`

סיום שלב צפייה במשוב

ניווט בוחן

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 i

סיום שלב צפייה במשוב

88-195 מתמטיקה בדידה תשע"ה סמסטר קיץ

התחיל ב:	20:12 , 4/11/2016
מצב	הסתיים
הושלם ב-	20:13 , 4/11/2016
הזמן שלקח	1 דקה
ציון	קיבלתם 0.00 מתוך הציון המירבי 10.00 (0%)

מידע

ראשית נפרט את דרך הכתיבה בתרגיל זה. חשוב לקרוא!

1. אותיות יווניות: כותבים את שם האות. ראו בטבלה הבאה כיצד לכתוב את האותיות הרלוונטיות:

אותיות יווניות וכיצד לכתוב אותן	
האות היוונית	כיצד לכתוב אותה
α	alpha
β	beta
λ	lambda
μ	mu

2. קבוצות: קבוצות כותבים בין סוגריים מסולסלים, למשל את $\{1,2\}$ כותבים $\{1,2\}$.

3. כאשר כופלים משתנים, למשל ab , נוסף * ביניהם, כלומר כתבו $a * b$. אחרת, התשובה לא תתקבל.

4. שימו לב שאתם רושמים אותיות גדולות וקטנות בהתאם לתרגיל.

5. אינדקסים למשתנים: כדי לכתוב ψ_1 כותבים פשוט $\psi[1]$.

6. תמונה של פונקציה: כדי לכתוב $f[A]$ תמונה של פונקציה, רשמו $F(A)$.

בהצלחה!

שאלה 1

לא נענה

חומר עזר - פונקציות

שאלה:

תהי:

$$f : A \rightarrow B$$

פונקציה הפיכה, הוכיחו שההופכית יחידה.

פתרון:

תהיינה:

$$g : B \rightarrow A$$

$$h : B \rightarrow A$$

פונקציות הופכיות ל f .

לפי אסוציאטיביות, אנו יודעים כי

אילן אילניי

$$h \circ f \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$$

מצד אחד מהנתון על h נקבל:

$$(h \circ f) \circ g = \text{[input box]}$$

מצד שני מהנתון על g נקבל:

$$h \circ (f \circ g) = \text{[input box]}$$

מה שאומר ש:

$$h = \text{[input box]}$$



הגשת שאלה

יהי:

$$g : B \rightarrow A$$

$$h : B \rightarrow A$$

פונקציות הופכיות ל f .

נסתכל על הפונקציה:

$$h \circ f \circ g$$

מצד אחד מהנתון על h נקבל:

$$h \circ f \circ g = g$$

מצד שני מהנתון על g נקבל:

$$h \circ f \circ g = h$$

מה שאומר ש:

$$h = g$$



A correct answer is g , which can be typed in as follows:

A correct answer is h , which can be typed in as follows:

A correct answer is g , which can be typed in as follows:

שאלה 2

לא נענה

חומר עזר - פונקציות

שאלה:

נתונות:

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

הפיכות, הוכיחו ש:

אילן אילניי

$$g \circ f$$

הפיכה.

ביצד נכתוב תשובה:1. על מנת לרשום הרכבה $f \circ g$ נשתמש בנקודה ונרשום

$$f.g$$

2. על מנת להזין את הפונקציה ההופכית f^{-1} נרשום

$$f^{-1}$$

3. כדי לרשום את פונקצית הזהות מ X ל X נרשום $I[X]$.פתרון:מכיוון ש f, g הפיכות קיימות:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

$$g^{-1} : C \rightarrow B$$

נגדיר:

$$h : C \rightarrow A$$

כך ש:

$$h =$$

ונקבל ש:

$$h \circ (g \circ f) =$$

ובדומה:

$$(g \circ f) \circ h =$$

ולכן קיבלנו:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = h = (g \circ f)^{-1}$$



הגשת שאלה

מכיוון ש f, g הפיכות קיימות:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

$$g^{-1} : C \rightarrow B$$

נגדיר:

$$h : C \rightarrow A$$

כך ש:

$$h = f^{-1} \circ g^{-1}$$

ונקבל ש:

$$h \circ (g \circ f) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$$

ובדומה:

אילן אילניי

$$(g \circ f) \circ h = g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) = g(g^{-1}(x)) = x$$

ולכן קיבלנו:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = h = (g \circ f)^{-1}$$



A correct answer is $\emptyset$, which can be typed in as follows:

A correct answer is I_A , which can be typed in as follows:

A correct answer is I_C , which can be typed in as follows:

שאלה 3

לא נענה

חומר עזר - פונקציות

שאלה:

לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות סמנו האם היא חח"ע (חד חד ערכית) והאם היא על.

1.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) := 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Not answered חח"ע:

Not answered על:

2.

$$f : P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(\emptyset) := 1$$

$$f(A) := \min(A) \text{ מגדירים } A \neq \emptyset$$

לפי יחס הסדר הרגיל.

Not answered חח"ע:

Not answered על:

3.

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x, y) := e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

Not answered חח"ע:

על: Not answered

.4

$$f: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$f(A) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A$$

שימו לב, מדובר בכפל מטריצות

חח"ע: Not answered

על: Not answered

הגשת שאלה

.1

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

חח"ע:

יהיו m, n כך ש $f(m) = f(n)$.אם $n > m$

$$0 = f(n) - f(m) = (m+1) + (m+2) + \dots + n$$

אך כיוון שמדובר במספרים טבעיים, קיבלנו סתירה.

באופן דומה, אם $n > m$ נגיע לסתירה ולכן סה"כ:

$$n = m$$

על:

נוכיח שקיים איבר בטווח שאין לו מקור, ולכן הפונקציה אינה על.
בפרט, נראה שלמספר 2 אין מקור.

נשים לב באופן כללי כי

$$f(n) = 1 + \dots + n \geq n$$

לכן שני המספרים היחידים שעשויים להשלח ל2 הם 1,2.

אך $f(1) = 1, f(2) = 3$ ולכן ל2 אין מקור.

.2

$$f: P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(\emptyset) := 1$$

$$f(A) := \min(A) \text{ מגדירים } A \neq \emptyset \text{ ולכל}$$

חח"ע:

נוכיח כי קיימות שתי קבוצות שונות $A, B \in P(\mathbb{N})$ כך ש $f(A) = f(B)$ ולכן הפונקציה אינה חח"ע.

$$1 = f(\emptyset) = f(\{1\})$$

על:

יהי $b \in \mathbb{N}$ צריך למצוא קבוצה $A \in P(\mathbb{N})$ כך ש $f(A) = b$.

$$f(b) = b$$

3.

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x, y) := e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

חח"ע:

נוכיח שקיימים שני זוגות שונים אשר נשלחים לאותה תמונה, ולכן הפונקציה אינה חח"ע.

$$1 = f(0, 0) = f(0, \pi)$$

על:

נוכיח שקיים מספר מרוכב שאין לו מקור, ולכן הפונקציה אינה על.

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $e^x > 0$.

לכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\cos(y) + i \sin(y) \neq 0$

(כיוון ש $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, לא ייתכן ששתי הפונקציות יתאפסו באותה נקודה.)

סה"כ, לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים כי $f(x, y) \neq 0$.

ולכן למספר $0 \in \mathbb{C}$ אין מקור.

4.

$$f: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$f(A) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ראשית נסמן M מטריצה הפיכה.

חח"ע:

תהיינה שתי מטריצות A, B כך ש $f(A) = f(B)$, עלינו להוכיח כי $A=B$.

אילן אילניי

$$M \cdot A = M \cdot B$$

נכפיל את שני הצדדים משמאל במטריצה ההופכית של M ונקבל

$$M^{-1} \cdot M \cdot A = M^{-1} \cdot M \cdot B$$

$$A = B$$

ולכן

על:

תהי מטריצה B עלינו למצוא מטריצה A כך ש $f(A) = B$.כלומר, עלינו למצוא מטריצה A כך ש $M \cdot A = B$.

$$A = M^{-1} \cdot B$$

$$f(M^{-1} \cdot B) = M \cdot M^{-1} \cdot B = B$$

ואכן

הערה: אם M לא הייתה הפיכה, ההעתקה הייתה לא חח"ע ולא על, הוכיחו זאת בעצמכם.A correct answer is **true**.A correct answer is **false**.A correct answer is **false**.A correct answer is **true**.A correct answer is **false**.A correct answer is **false**.A correct answer is **true**.A correct answer is **true**.

שאלה 4

לא נענה

חומר עזר - פונקציות

שאלה:

תהי פונקציה

$$f : X \rightarrow Y$$

ותהיינה קבוצות

$$A, B \subseteq X$$

הוכיחו ש:

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$$

תזכורת:לכל תת קבוצה $A \subseteq X$ מגדירים את התמונה של הקבוצה:

$$f[A] = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

ביצד נרשום תשובה: על מנת לרשום את התמונה $f[A]$ נרשום $F(A)$.

פתרון:

נוכיח באמצעות הבלה דו כיוונית.

בכיוון $f[A \cup B] \subseteq f[A] \cup f[B]$:

יהי

$$y \in f[A \cup B]$$

לכן קיים איבר

$$x \in A \cup B$$

כך ש:

$$f(x) = \text{[]}$$

אבל לפי הגדרת האיחוד נקבל:

$$x \in A \vee x \in \text{[]}$$

לכן לפי הגדרה נקבל:

$$f(x) \in f[A] \vee f(x) \in \text{[]}$$

מה שאומר:

$$f(x) \in f[A] \cup \text{[]}$$

ולכן

$$x \in f[A] \cup f[B]$$

כפי שרצינו.

ניתן להוכיח באופן דומה כי

$$f[A] \cup f[B] \subseteq f[A \cup B]$$

וסה"כ מתקיים

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$$



הגשת שאלה

A correct answer is y , which can be typed in as follows:

A correct answer is B , which can be typed in as follows:

A correct answer is $F(B)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $F(B)$, which can be typed in as follows:

אילן אילניי

שאלה 5

לא נענה

חומר עזר - פונקציות

תזכורת:

תהי פונקציה

$$f : X \rightarrow Y$$

התמונה ההפוכה של קבוצה $B \subseteq Y$ מוגדרת כ:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

שאלה:

תהי פונקציה

$$f : A \rightarrow B$$

ותהי $C \subseteq B$ הוכיחו שמתקיים

$$f[f^{-1}[C]] \subseteq C$$

ואם f על אזי

$$f[f^{-1}[C]] = C$$

פתרון:

נתחיל ממהכלה:

$$\subseteq$$

יהי:

$$y \in f[f^{-1}[C]]$$

לפי ההגדרה נקבל שקיים

$$x \in f^{-1}[\text{$$

כך ש:

$$f(x) = \text{$$

לפי הגדרה של תמונה הפוכה נקבל:

$$f(x) \in \text{$$

ולכן

$$y \in C$$

והוכחנו כי

$$f[f^{-1}[C]] \subseteq C$$

בעת, נניח ש f על, יש להוכיח את ההכלה בכיוון השני.

$\supseteq$

יהי:

$$y \in \boxed{}$$

כיוון ש f על, קיים:

$$x \in A$$

כך ש:

$$f(x) = \boxed{}$$

לכן לפי ההגדרה של תמונה הפוכה:

$$x \in f^{-1}[\boxed{}]$$

ולכן:

$$\boxed{} \in f[f^{-1}[C]]$$

כלומר הוכחנו כי

$$f[f^{-1}[C]] \supseteq C$$

ויחד עם ההכלה השנייה קיבלנו:

$$f[f^{-1}[C]] = C$$



נסו בעצמכם בדומה מאוד להוכיח את המשפט המקביל:

$$C \subseteq f^{-1}[f[C]]$$

ואם f חד-חד ערכית נקבל:

$$C = f^{-1}[f[C]]$$

הגשת שאלה

A correct answer is C , which can be typed in as follows:

A correct answer is y , which can be typed in as follows:

A correct answer is C , which can be typed in as follows:

A correct answer is C , which can be typed in as follows:

A correct answer is y , which can be typed in as follows:

A correct answer is C , which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(x)$, which can be typed in as follows:

חומר עזר - פונקציות

שאלה:

תהי פונקציה

$$f : A \rightarrow B$$

נגדיר פונקציה

$$g : P(B) \rightarrow P(A)$$

על ידי

$$g(X) := f^{-1}[X]$$

הוכיחו ש:

$$g \text{ חד-חד ערכית} \iff f \text{ על.}$$

פתרון:

$\Rightarrow$

נניח f על, נוכיח ש g חד-חד ערכית.

בשאלה קודמת ראינו שאם f על נקבל:

$$f[f^{-1}[C]] = \text{[]}$$

נניח ש:

$$g(X) = g(Y)$$

נקבל:

$$f^{-1}[X] = f^{-1}[\text{[]}]$$

לכן התמונות של שתי הקבוצות שוות:

$$X = f[f^{-1}[X]] = f[f^{-1}[Y]] = \text{[]}$$

מה שמוכיח ש g חד-חד ערכית.

$\Leftarrow$

נניח בשלילה ש f אינה על.

לכן קיים

$$b \in \text{[]}$$

כך שלא קיים

$$a \in A$$

עבורו

$$f(a) = \text{[]}$$

לכן

$$g(\{b\}) = f^{-1}[\{b\}] = \emptyset$$

אך ברור ש

אילן אילניי

$$g(\emptyset) = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

לכן קיבלנו ש:

$$g(\{b\}) = g(\emptyset)$$

וגם:

$$\{b\} \neq \emptyset$$

לכן g אינה חד-חד ערכית, בסתירה.



נסו להוכיח בצורה דומה מאוד את המשפט המקביל:

g על $\iff f$ חד-חד ערכית.

הגשת שאלה

A correct answer is **C**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **Y**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **Y**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **b**, which can be typed in as follows:

שאלה 7

לא נענה

חומר עזר - פונקציות.

שאלה:

הוכיחו את "השלישי חינם" גרסת הפונקציות:

תהיינה A, B כך ש A סופית, ותהי פונקציה

$$f: A \rightarrow B$$

הוכיחו שכל 2 מהתנאים הבאים גוררים את השלישי:

$$|A| = |B|$$

2. f חד-חד ערכית.

3. f על.

פתרון:

$$3 \Leftarrow 1 + 2$$

נסמן:

אילן אילניי

ונסמן:

$$|B| = |A| = n$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

(מותר לסמן כך כיוון שנתון שהקבוצה A סופית.)

לפי חד-חד ערכיות של f נקבל:

$$|F(A)| = |\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}| = \boxed{}$$

אבל אנחנו יודעים:

$$F(A) \subseteq \boxed{}$$

אבל עבור קבוצות סופיות, אם תת קבוצה שווה בגודלה לקבוצה הגדולה, סימן שהן שוות. כלומר:

$$F(A) = \boxed{}$$

מה שבדיוק אומר ש f על.

$$2 \Leftarrow 1 + 3$$

שוב, נסמן:

$$|B| = |A| = n$$

ונסמן:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

נניח בשלילה שקיימים $i \neq j$ כך ש:

$$f(a_i) = f(a_j)$$

נקבל:

$$|F(A)| = |\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}| < \boxed{}$$

אבל נתון ש f על ולכן:

$$|F(A)| = |B| = \boxed{}$$

בסתירה.

$$1 \Leftarrow 2 + 3$$

איך לכתוב
בשביל כותבים

$$\begin{matrix} G & \geq \\ L & \leq \end{matrix}$$

כיוון ש f על נקבל:

$$|A| \boxed{} |B|$$

כיוון ש f חד-חד ערכית נקבל:

$$|A| \boxed{} |B|$$

מה שאומר ש:

אילו אילני

$$|A| = |B|$$



הגשת שאלה

$$3 \Leftarrow 1 + 2$$

נגדיר:

$$|B| = |A| = n$$

ונרשום:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

ולפי חד-חד ערכיות של f נקבל:

$$|F(A)| = |\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}| = n$$

אבל אנחנו יודעים:

$$F(A) \subseteq B$$

אבל אם קבוצה מוכלת בקבוצה עם אותו גודל שהוא סופי אז הם שווים ולכן:

$$F(A) = B$$

מה שבדיוק אומר ש f על.

$$2 \Leftarrow 1 + 3$$

נניח ש:

$$f(a_i) = f(a_j)$$

וגם:

$$i \neq j$$

נקבל (עם הסימונים מהסעיף הקודם):

$$|F(A)| = |\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}| < n$$

אבל נתון ש f על ולכן:

$$|F(A)| = |B| = n$$

בסתירה.

$$1 \Leftarrow 2 + 3$$

לפי על נקבל:

$$|A| \geq |B|$$

לפי חד-חד ערכיות נקבל:

$$|A| \leq |B|$$

מה שאומר ש:

$$|A| = |B|$$



A correct answer is ***n***, which can be typed in as follows:

A correct answer is ***B***, which can be typed in as follows:

A correct answer is ***B***, which can be typed in as follows:

A correct answer is ***n***, which can be typed in as follows:

A correct answer is ***n***, which can be typed in as follows:

A correct answer is ***G***, which can be typed in as follows:

A correct answer is L , which can be typed in as follows:

אילן אילניי

שאלה 8

לא נענה

חומר עזר - פונקציות.

שאלה:

נתונות:

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

$$g \circ f$$

חד-חד ערכית.

פונקציות, בנוסף נתון ש:

א. האם f חד-חד ערכית?

ב. האם g חד-חד ערכית?

פתרון:

א. התשובה היא כן, נוכיח.

יהיו:

$$x, y \in \text{_____}$$

כך ש:

$$f(x) = \text{_____}$$

נפעיל g על שני הצדדים ונקבל:

$$g(f(x)) = \text{_____}$$

אך מה שכתוב פה זה בדיוק:

$$g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

ומהחד-חד ערכיות הנתונה נקבל:

$$x = \text{_____}$$



ב. התשובה היא לא בהכרח, נבנה דוגמא נגדית (הפרכה).

נבנה דוגמא פשוטה, נגדיר:

$$f : \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$$

$$f(1) = 1$$

$$g : \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$$

$$g(1) = g(2) = \text{_____}$$

נקבל ש- $g \circ f$ חד-חד ערכית למרות ש:

אילן אילניי

$$g(1) = g(2)$$

הערה:
נסו להוכיח את המשפט המקביל,
אם $g \circ f$ על אז g בהכרח על אבל f לא בהכרח.

הגשת שאלה

א. התשובה היא כן, נוכיח.

יהי:

$$x, y \in A$$

כך ש:

$$f(x) = f(y)$$

נפעיל g על שני הצדדים ונקבל:

$$g(f(x)) = g(f(y))$$

אך מה שכתוב פה זה בדיוק:

$$g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

ומהחד-חד ערכיות הנחונה נקבל:

$$x = y$$



ב. התשובה היא לא, נבנה דוגמא נגדית.
נבנה דוגמא פשוטה, נגדיר:

$$f : \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$$

$$f(1) = 1$$

$$g : \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$$

$$g(1) = g(2) = 1$$

נקבל ש $g \circ f$ חד-חד ערכית למרות ש:

$$g(1) = g(2)$$

הערה:
נסו להוכיח את המשפט המקביל,
אם $g \circ f$ על אז g בהכרח על אבל f לא בהכרח.

A correct answer is **A**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **$f(y)$** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **$g(f(y))$** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **y** , which can be typed in as follows:

A correct answer is **1**, which can be typed in as follows:

שאלה 9

לא נענה

חומר עזר - פונקציות.

שאלה:

תהיינה

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

פונקציות על.

הוכיחו כי $g \circ f$ על.

פתרון:

יהי:

$$z \in \boxed{}$$

ביוון שהפונקציה $\boxed{}$ על, נקבל שקיים:

$$y \in \boxed{}$$

כך ש:

$$\boxed{} = z$$

ביוון ש f על, נקבל שקיים:

$$x \in A$$

כך ש:

$$f(x) = \boxed{}$$

ולכן קיבלנו:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = \boxed{}$$

מה שמוכיח ש $g \circ f$ על.



הערה:

נסו להוכיח את המשפט המקביל,

אם f, g חד-חד ערכיות אז גם $g \circ f$ חד-חד ערכית.

הגשת שאלה

יהי:

$$x \in C$$

לפי העל של g נקבל שקיים:

$$y \in B$$

$$g(y) = x$$

$$z \in A$$

$$f(z) = y$$

$$g \circ f(z) = g(f(z)) = g(y) = x$$



בך ש:

אילן אילניי

ולפי העל של f נקבל שקיים:

בך ש:

ולכן קיבלנו:

מה שמוביח ש $g \circ f$ על.

הערה:

נסו להוכיח את המשפט המקביל,

אם f, g חד-חד ערכיות אז גם $g \circ f$ חד-חד ערכית.

A correct answer is **C**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **g**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **B**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **g(y)**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **y**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **z**, which can be typed in as follows:

שאלה 10

לא נענה

חומר עזר - פונקציות, יחסי סדר.

שאלה:

תהי A קבוצה סדורה חלקית

נגדיר שפונקציה $f : A \rightarrow A$ שומרת סדר אם

$$x \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

ונגיד שהיא הופכת סדר אם:

$$x \geq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

טענה א:

אם

$$f : A \rightarrow A$$

$$g : A \rightarrow A$$

שומרות סדר אזי:

$$g \circ f \text{ שומרת סדר.}$$

פתרון א:

יהיו:

$$x, y \in \boxed{}$$

בכ ש:

$$x \geq \boxed{}$$

$$f(x) \geq \boxed{}$$

לפי שמירת הסדר של f נקבל:ואז לפי שמירת הסדר של g נקבל:

שלפי הגדרה זה בדיוק:

$$g(f(x)) \geq g(f(y))$$

$$g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$$

שענה ב:

אם

הופכות סדר אזי:

$$f : A \rightarrow A$$

$$g : A \rightarrow A$$

$$g \circ f \text{ שומרת סדר.}$$

פתרון ב:

יהיו:

בכ ש:

$$x, y \in A$$

$$x \geq \boxed{}$$

לפי הפיכת הסדר של f נקבל:ואז לפי הפיכת הסדר של g נקבל:

שלפי הגדרה זה בדיוק:

$$g(f(x)) \geq g(f(y))$$

$$g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$$

שענה ג:

אם

שומרת סדר ו

$$f : A \rightarrow A$$

$$g : A \rightarrow A$$

$g \circ f$ הופכת סדר.

פתרון ג:

יהיו:

$$x, y \in \boxed{}$$

כך ש:

$$x \geq y$$

לפי שמירת הסדר של f נקבל:

$$f(x) \geq f(y)$$

ואז לפי הפיכת הסדר של g נקבל:

$$g(f(x)) \leq \boxed{}$$

שלפי הגדרה זה בדיוק:

$$g \circ f(x) \leq g \circ f(y)$$



הגשת שאלה

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is y , which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(y)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is y , which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(y)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is $g(f(y))$, which can be typed in as follows:

סיום שלב צפייה במשוב

ניווט בוחן

סיום שלב צפייה במשוב

195-88 מתמטיקה בדידה תשע"ה סמסטר קיץ

התחיל ב:	20:12 , 4/11/2016
מצב	הסתיים
הושלם ב-	20:13 , 4/11/2016
הזמן שלקח	1 דקה 2 שניות
נקודות	0.00/9.00
ציון	קיבלתם 0.00 מתוך הציון המירבי 10.00 (0%)

שאלה 1

לא נענה

חומר עזר - עוצמות

הערה:

ברוב השאלות אנו כותבים את הפעולות בלשון זכר, אז חשבתי לעשות כמה שאלות בלשון נקבה, בהצלחה לכן!

שאלה:

נתונות קבוצות:

$$A, B, C, D$$

כך ש:

$$|A| = |C|$$

$$|B| = |D|$$

הוכיחי ש:

$$|A \times B| = |C \times D|$$

פתרון:

לפי הגדרת שקילות עוצמה אנחנו יודעות שקיימות:

$$f : A \rightarrow \text{[input box]}$$

$$g : B \rightarrow \text{[input box]}$$

חח"ע ועל. נגדיר:

$$h : A \times B \rightarrow C \times D$$

כך ש:

$$h((x, y)) = (f(x), g(y))$$

נראה שהפונקציה חח"ע ועל.

חח"ע

בניח ש:

$$h((a, b)) = h((c, d))$$

לפי ההגדרה נקבל:

$$(f(a), g(b)) = \text{[input box]}$$

ולפי הגדרת זוג סדור נקבל:

$$f(a) = f(c)$$

אילן אילניי

$$g(b) = \boxed{}$$

הפונקציות חח"ע, ולכן:

$$a = c$$

$$b = \boxed{}$$

מה שבדיוק אומר ש:

$$(a, b) = (c, d)$$

על

יהי:

$$(c, d) \in C \times D$$

 f על\ ולכן קיים:

$$a \in \boxed{}$$

כך ש:

$$f(a) = \boxed{}$$

בדומה, g על ולכן קיים:

$$b \in B$$

כך ש:

$$g(b) = d$$

לכן:

$$h((a, b)) = (f(a), g(b)) = \boxed{}$$

מה שמוכיח ש- h על, ולכן הפונקציה חח"ע ועל וקיבלנו:

$$|A \times B| = |C \times D|$$



הערה:

יכולנו גם להוכיח קיום פונקציה הפוכה וזה היה כנראה קצר יותר, עשו זאת בעצמכן!

הגשת שאלה

לפי הגדרת שקילות עוצמה אנחנו יודעות שקיימים:

$$f : A \rightarrow C$$

$$g : B \rightarrow D$$

חח"ע ועל, נגדיר:

$$h : A \times B \rightarrow C \times D$$

כך ש:

$$h((x, y)) = (f(x), g(y))$$

נראה שהפונקציה חח"ע ועל.

חח"ע

בניח ש:

$$h((a, b)) = h((c, d))$$

לפי ההגדרה נקבל:

אילן אילניי

ולפי הגדרת זוג סדור נקבל:

$$(f(a), g(b)) = (f(c), g(d))$$

$$f(a) = f(c)$$

$$g(b) = g(d)$$

ומחח"ע של הפונקציות נקבל:

$$a = c$$

$$b = d$$

מה שבדיוק אומר ש:

$$(a, b) = (c, d)$$

על

יהי:

$$(c, d) \in C \times D$$

אזי אנחנו יודעות לפי העל של f שקיים:

$$a \in A$$

כך ש:

$$f(a) = c$$

ובדומה לפי העל של g קיים:

$$b \in B$$

כך ש:

$$g(b) = d$$

לכן:

$$h((a, b)) = (f(a), g(b)) = (c, d)$$

מה שמוכיח על, ולכן הפונקציה חח"ע ועל וקיבלנו:

$$|A \times B| = |C \times D|$$



A correct answer is C , which can be typed in as follows:

A correct answer is D , which can be typed in as follows:

A correct answer is $[f(c), g(d)]$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $g(d)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is d , which can be typed in as follows:

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is c , which can be typed in as follows:

A correct answer is $[c, d]$, which can be typed in as follows:

שאלה 2

לא נענה

חומר עזר - עוצמות

שאלה:

יהיו

אילן אילניי

$$A, B, C$$

קבוצות, כך ש:

$$|A| = |B|$$

$$|B| = |C|$$

הוכיח ש:

$$|A| = |C|$$

פתרון:

לפי הגדרת שוויון עוצמות נקבל שקיימות:

$$f: A \rightarrow \boxed{}$$

$$g: B \rightarrow \boxed{}$$

הפיכות, ונזכר שהוכחנו שבמקרה כזה גם:

$$g \circ f$$

הפיכה.

אנחנו יודעים ש:

$$g \circ f: A \rightarrow \boxed{}$$

ובזה הוכחנו:

$$|A| = |C|$$



הגשת שאלה

לפי הגדרת שיוויון עוצמות נקבל שקיימים:

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

כך ש f, g הפיכות, ונזכר שהוכחנו שבמקרה כזה גם:

$$g \circ f \text{ הופכית!}$$

ואנחנו יודעים ש:

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

ובזה הוכחנו:

$$|A| = |C|$$



A correct answer is B , which can be typed in as follows:

A correct answer is C , which can be typed in as follows:

A correct answer is C , which can be typed in as follows:

חומר עזר - עוצמות

שאלה:

תהי A קבוצה, הוכיחו ש:

$$|P(A)| \neq |A|$$

פתרון:

נניח בשלילה שיש פונקציה על:

$$f: A \rightarrow$$

נגדיר קבוצה:

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

נשים לב ש:

$$B \subseteq$$

ולכן:

$$B \in P(A)$$

f על, ולכן קיים:

$$x \in$$

כך ש:

$$f(x) =$$

אם $x \in B$ נקבל לפי הגדרת הקבוצה ש:

$$x \notin f(x)$$

כלומר:

$$x \notin$$

בסתירה.

אם $x \notin B$ פירוש הדבר שמתקיים:

$$x \notin$$

ולפי הגדרת B זה אומר:

$$x \in B$$

בסתירה.

בשני המצבים קיבלנו סתירה ולכן B לא יכול להיות מקור, בסתירה לכך שהפונקציה על. לכן:

$$|P(A)| \neq |A|$$



הגשת שאלה

נניח שיש פונקציה על:

$$f: A \rightarrow P(A)$$

נגדיר קבוצה:

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

נשים לב ש:

אילן אילניי

$$B \subseteq A$$

ולכן:

$$B \in P(A)$$

ומהעל של f נקבל שקיים:

$$x \in A$$

כך ש:

$$f(x) = B$$

אם $x \in B$ נקבל לפי הגדרת הקבוצה ש:

$$x \notin f(x)$$

שזה בדיוק:

$$x \notin B$$

בסתירה.

אם $x \notin B$ וזה בדיוק:

$$x \notin f(x)$$

ולפי הגדרת B זה אומר:

$$x \in B$$

בסתירה.

בשני המצבים קיבלנו סתירה ולכן B לא יכול להיות מקור, ובפרט לא קיימת פונקציה על $\mathcal{P}(A)$:

$$|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$$



A correct answer is $\mathcal{P}(A)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is B , which can be typed in as follows:

A correct answer is B , which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(x)$, which can be typed in as follows:

שאלה 4

לא נענה

חומר עזר - עוצמות

תזכורת:

קבוצת הפונקציות מ- B ל- A מסומנת:

$$A^B = \{f : B \rightarrow A\}$$

שאלה:

הצדיקו את השם של קבוצות החזקה: הוכיחו שלכל קבוצה A מתקיים:

$$|\{0,1\}^A| = |\mathcal{P}(A)|$$

פתרון:

אילן אילניי

נגדיר:

$$f : \{0, 1\}^A \rightarrow \boxed{}$$

על ידי:

$$f(g) = \{x \in A \mid g(x) = 1\}$$

ונוכיח שהפונקציה חח"ע ועל.

חח"ע:

יהיו:

$$g, h \in \{0, 1\}^A$$

כך ש:

$$f(g) = f(h)$$

נוכיח שהן שוות.

יהי:

$$x \in f(g)$$

אז נקבל:

$$x \in \boxed{}$$

וגם:

$$g(x) = \boxed{}$$

ולכן נקבל ש:

$$h(x) = 1 = \boxed{}$$

אז הדבר נכון בכיוון ההפוך ולכן לכל x :

$$h(x) = 1$$

אם ורק אם:

$$g(x) = 1$$

ולכן

$$h(x) \neq 1$$

אם ורק אם

$$g(x) \neq 1$$

אבל מכיוון שקיים רק איבר אחד אחר, נקבל ש:

$$h(x) = g(x) = \boxed{}$$

ולכן קיבלנו:

$$h = g$$

על:

יהי:

$$B \in \boxed{}$$

נגדיר פונקציה:

$$g : A \rightarrow \boxed{}$$

כך שאם $x \in B$ נגדיר:

אילן אילניי

ואם $x \notin B$ נגדיר:

אז מתקיים

מה שמוכיח על!

הוכחנו ש- f חח"ע ועל ולכן:

$$|\{0,1\}^A| = |P(A)|$$

■

הגשת שאלה

נגדיר:

$$f : \{0,1\}^A \rightarrow P(A)$$

כך ש:

$$f(g) = \{x \in A \mid g(x) = 1\}$$

ונוכיח שהופנקציה חח"ע ועל.

חח"ע:

יהי:

$$f(g) = f(h)$$

נקבל ש:

$$x \in f(g)$$

גורר ש:

$$x \in f(h)$$

ומצד שני:

$$g(x) = 1$$

ולכן נקבל ש:

$$h(x) = 1 = g(x)$$

אותו הדבר נכון בכיוון ההפוך ולכן לכל x :

$$f(x) = 1$$

אם ורק אם:

$$g(x) = 1$$

ואם:

$$f(x) \neq 1$$

אז:

$$g(x) \neq 1$$

אבל מכיוון שקיים רק איבר אחד אחר, נקבל ש:

$$f(x) = g(x) = 0$$

ובקיצור קיבלנו:

$$f = g$$

על:

יהי:

אילן אילניי

$$B \in P(A)$$

נגדיר פונקציה:

$$g : A \rightarrow \{0, 1\}$$

כך שאם $x \in B$ נגדיר:

$$g(x) = 1$$

ואם $x \notin B$ נגדיר:

$$g(x) = 0$$

קל יהיה לראות ש:

$$f(g) = B$$

מה שמוכיח על!

הוכחנו ש f חח"ע ועל ולכן:

$$| \{0, 1\}^A | = | P(A) |$$



A correct answer is $P(A)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(h)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is 1 , which can be typed in as follows:

A correct answer is $g(x)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is 0 , which can be typed in as follows:

A correct answer is $P(A)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $\{0, 1\}$, which can be typed in as follows:

A correct answer is 1 , which can be typed in as follows:

A correct answer is 0 , which can be typed in as follows:

A correct answer is B , which can be typed in as follows:

שאלה 5

לא נענה

חומר עזר - עוצמות

שאלה:

יהיו A, B קבוצות כך ש:

$$| A \setminus B | = | B \setminus A |$$

הוכיחי ש:

$$| A | = | B |$$

פתרון:

מהנתון, קיימת פונקציה חח"ע ועל:

$$f : A \setminus B \rightarrow B \setminus \text{[]}$$

נגדיר:

אילן אילניי

$$g : A \rightarrow \boxed{}$$

כך שאם $x \in A \cap B$:

$$g(x) = \boxed{}$$

ואם $x \in A \setminus B$:

$$g(x) = \boxed{}$$

נוכיח שפונקציה זו חח"ע ועל.

חח"ע

נניח ש:

$$g(x) = g(y)$$

אם $x, y \in A \cap B$ נקבל לפי הגדרת g :

$$x = \boxed{}$$

אם $x, y \in A \setminus B$ נקבל:

$$f(x) = \boxed{}$$

ולפי חח"ע של f נקבל:

$$x = y$$

אם בלי הגבלת הכלליות $x \in A \cap B$ וגם $y \in A \setminus B$ נקבל:

$$g(x) \in A \cap B$$

$$g(y) \in B \setminus \boxed{}$$

אבל:

$$(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

בסתירה, ולכן g חח"ע.

על

f על, ולכן נקבל:

$$g[A \setminus B] = B \setminus \boxed{}$$

ומהגדרת g נקבל:

$$g[A \cap B] = A \cap B$$

ולכן:

$$g[A] = g[(A \cap B) \cup (A \setminus B)] = g[A \cap B] \cup g[A \setminus B] = \boxed{}$$

מה שאומר g על.

לסיכום, g חח"ע ועל ולכן:

$$|A| = |B|$$



הערה:

יכול להיות שתמצאו פונקציות אחרות המוכיחות את המשפט, אבל זאת עליכם להכניס את הפונקציה שאנו מבקשים (שהיא הפשוטה ביותר).

הערה 2:

אפשר היה להוכיח את המשפט לפי אריתמטיקה של קבוצות, אך כדי לדעת איך לעשות גם הוכחה ישירה.

הגשת שאלה

אילן אילניי

מהנתון שקיימת פונקציה:

$$f : A \setminus B \rightarrow B \setminus A$$

חח"ע ועל,

נגדיר:

$$g : A \rightarrow B$$

כך שאם $x \in A \cap B$:

$$g(x) = x$$

ואם $x \in A \setminus B$:

$$g(x) = f(x)$$

נוכיח שפונקציה זו חח"ע ועל.

חח"ע

יהי:

$$g(x) = g(y)$$

אם $x, y \in A \cap B$ נקבל:

$$x = y$$

לפי הגדרת g .

אם $x, y \in A \setminus B$ נקבל:

$$f(x) = f(y)$$

מה שגורר לפי חח"ע של f ש:

$$x = y$$

אם $x \in A \cap B$ וגם $y \in A \setminus B$ נקבל:

$$g(x) \in A \cap B$$

$$g(y) \in B \setminus A$$

אבל:

$$(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

בסתירה, ולכן חח"ע.

על

נשים לב שמהעל של f נקבל:

$$g[A \setminus B] = B \setminus A$$

ומהגדרת g נקבל:

$$g[A \cap B] = A \cap B$$

ולכן:

$$g[A] = g[(A \cap B) \cup (A \setminus B)] = g[A \cap B] \cup g[A \setminus B] = B$$

מה שאומר g על.

g חח"ע ועל ולכן:

$$|A| = |B|$$



A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is B , which can be typed in as follows:

A correct answer is x , which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(x)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is y , which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(y)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is B , which can be typed in as follows:

שאלה 6

לא נענה

חומר עזר - עוצמות.

שאלה:

א. הוכיחו שלכל קבוצה A קיימת פונקציה חח"ע:

$$f : A^A \rightarrow P(A \times A)$$

ב. הסיקו שאם A אינסופית ו $|A| = \alpha$ אז:

$$\alpha^\alpha = 2^\alpha$$

פתרון:

א.

נגדיר:

$$f : A^A \rightarrow P(A \times A)$$

כך שאם $g \in A^A$, כלומר:

$$g : A \rightarrow \boxed{}$$

נגדיר:

$$f(g) = \{(x, y) \in A \times A \mid y = \boxed{}\}$$

(שימו לב שזוהי בדיוק ההגדרה הפורמלית של הפונקציה)

נוכיח שפונקציה זו חח"ע:

יהי $g, h \in A^A$ כך ש:

$$f(g) = \boxed{}$$

אזי, יהי $x \in A$ נקבל:

$$(x, g(x)) \in f(g)$$

מהשוויון נקבל:

$$(x, g(x)) \in \boxed{}$$

ומהגדרת הקבוצה f נקבל:

$$g(x) = \boxed{}$$

זה נכון לכל $x \in A$ ולכן:

$$g = \boxed{}$$

ולכן הפונקציה חח"ע.

ב.

כיצד נרשום תשובה: עבור α נרשום α

נניח ש A אינסופית, לכן:

$$\alpha \cdot \alpha =$$

עכשיו נשים לב שבדיוק הוכחנו ש:

$$\alpha^\alpha \leq 2^{\alpha \cdot \alpha}$$

מה שאומר:

$$\alpha^\alpha \leq$$

אבל אנחנו גם יודעים ש:

$$\alpha^\alpha \geq$$

ולכן ממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נקבל:

$$\alpha^\alpha = 2^\alpha$$



הגשת שאלה

א.

נגדיר:

$$f : A^A \rightarrow P(A \times A)$$

כך שאם $g \in A^A$ כלומר:

$$g : A \rightarrow A$$

נגדיר:

$$f(g) = \{(x, y) \in A \times A \mid y = f(x)\}$$

(שימו לב שזוהי בדיוק ההגדרה הפורמלית של הפונקציה)

נוכיח שפונקציה זו חח"ע.

יהי $g, h \in A^A$ כך ש:

$$f(g) = f(h)$$

אזי, יהי $x \in A$ נקבל:

$$(x, g(x)) \in f(g)$$

ומהשיוויון נקבל:

$$(x, g(x)) \in f(h)$$

ומהגדרת הקבוצה f נקבל:

$$g(x) = h(x)$$

זה נכון לכל $x \in A$ ולכן:

$$g = h$$

ולכן הפונקציה חח"ע.

ב.

נניח ש A אינסופית, לכן:

אילן אילניי

עכשיו נשים לב שבדיוק הוכחנו ש:

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha$$

$$\alpha^\alpha \leq 2^{\alpha \cdot \alpha}$$

מה שאומר:

$$\alpha^\alpha \leq 2^\alpha$$

אבל אנחנו גם יודעים ש:

$$\alpha^\alpha \geq 2^\alpha$$

ולכן מקנטור-ברנשטיין נקבל:

$$\alpha^\alpha = 2^\alpha$$



A correct answer is A , which can be typed in as follows:

A correct answer is $g(x)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(h)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $f(h)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $h(x)$, which can be typed in as follows:

A correct answer is h , which can be typed in as follows:

A correct answer is α , which can be typed in as follows:

A correct answer is 2^α , which can be typed in as follows:

A correct answer is 2^α , which can be typed in as follows:

שאלה 7

לא נענה

חומר עזר - עוצמות.

שאלה:

בשאלה הבאה תארו את העוצמות, למשל:

$$(\aleph_0 + \aleph) \cdot 2 = \aleph$$

הערה:

לצורך השאלה נרשום:

$$2^\aleph = \aleph_2$$

ובמקום $\aleph$ רשמו a .

1.

$$(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0}$$

אנחנו יודעים שלעוצמות α, β אינסופיות:

$$\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$

ולכן:

$$\aleph_0 + \aleph = \text{[]}$$

לכן נשאר למצוא את:

עבשיו נזכר ש:

$$2^{N_0} =$$

ולכן קיבלנו:

$$N_0 \cdot N_0 =$$

אבל אנחנו יודעים ש:

ולכן קיבלנו:

.2

נשים לב ש:

$$H_0^u =$$

:Dλ1

$$5^{\#} = K_2 \geq$$

לבן:

$$N_2 + N =$$

:Dλ1

וקיבלנו:

$$\mathcal{N} \cdot (\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_0^{\mathcal{N}_0}) = \mathcal{N}_2$$

.3

$$H \cdot H_0^{\frac{1}{2}} + H$$

ראשית, נשים לב ש:

$$\mathcal{H}_n \geq \mathcal{H}_0^n \geq 2^n$$

אבל:

See

ולכן:

$$\mathcal{H}_0^{\mathcal{H}} = 2^{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_2$$

ואנחנו יודעים ש:

$\mathbb{N}_2 \geq$

ולכן:

ובדיוק כמו בהתחלה נקבל:

$$H_{0^2}^2 =$$

ומבאן קל להסיק:

אילן אילניי

ולכן:

$$\aleph \cdot 2^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2}$$

$$\aleph \cdot \aleph_0^{\aleph+\aleph} = 2^{\aleph_2}$$



הגשת שאלה

1.

אנחנו יודעים שלעוצמות α, β אינסופיות:

ולכן:

לכן נשאר למצוא את:

עכשיו נזכר ש:

ולכן קיבלנו:

אבל אנחנו יודעים ש:

ולכן קיבלנו:

2.

נשים לב ש:

וגם:

לכן:

וגם:

וקיבלנו:

3.

נתחיל מלשים לב ש:

אבל:

ולכן:

ואנחנו יודעים ש:

$$(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0}$$

$$\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$

$$\aleph_0 + \aleph = \aleph$$

$$\aleph^{\aleph_0}$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\aleph \cdot (5^{\aleph} + \aleph_0^{\aleph_0})$$

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

$$5^{\aleph} = \aleph_2 \geq \aleph$$

$$\aleph_2 + \aleph = \aleph_2$$

$$\aleph_2 \cdot \aleph = \aleph_2$$

$$\aleph \cdot (\aleph_2 + \aleph_0^{\aleph_0}) = \aleph_2$$

$$\aleph \cdot \aleph_0^{\aleph+\aleph}$$

$$\aleph^{\aleph} \geq \aleph_0^{\aleph} \geq 2^{\aleph}$$

$$\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

$$\aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph} = \aleph_2$$

$$\aleph_2 \geq \aleph$$

אילן אילניי ולכן:

$$\aleph_2 + \aleph = \aleph_2$$

ובדיוק כמו בהתחלה נקבל:

$$\aleph_0^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2}$$

ומכאן קל להסיק:

$$\aleph \cdot 2^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2}$$

ולכן:

$$\aleph \cdot \aleph_0^{\aleph+\aleph} = 2^{\aleph_2}$$



A correct answer is **a**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **a**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **a**₀, which can be typed in as follows:

A correct answer is **a**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **a**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **a**₂, which can be typed in as follows:

A correct answer is **2^a**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **a**, which can be typed in as follows:

A correct answer is **2^{a2}**, which can be typed in as follows:

שאלה 8

לא נענה

תרגיל:

מצאו את עוצמות הקבוצות הבאות:

- כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 01.
- כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00.
- כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00 או את הרצף 11.

תזכורת: סדרה בינארית היא סדרה המכילה את הספרות 0,1 בלבד, כלומר פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$.

פתרון:

1.

קבוצת כל הסדרות הבינאריות (סדרות שיש רק 0 ו-1) כך שאין את הרצף 01.

מכיוון שאין הרצף הזה נקבל שלאחר 0 חייב להיות:

[

לכן בסדרה יש אחדים עד שזה עובר לאפס ונשאר כך לתמיד, לדוגמא:

111111000000.....

לכן אפשר לבנות פונקציה חח"ע מהקבוצה הנתונה לקבוצה $\mathbb{N} \cup \{0\}$ השולחת כל סדרה למספר הפעמים שמופיעה בה הספרה:

(חוץ מהסדרה שכולה 1)

ובאמצעות ק.ש.ב ניתן להסיק כי עוצמת הקבוצה הינה:

$\aleph_0$

2.

קבוצת כל הסדרות הבינאריות כך שלא מופיע הרצף 00.

נשים לב שמכיוון שהרצף לא מופיע אחרי 0 יש:

לכן כל 0 יופיע בנפרד וביניהם יהיו אחדים למשל:

11101101111110101111.....

לכן (חוץ מקבוצה שנהיית רק אחדים בסוף) נקבל שאפשר לתאר סדרה בסדרת כמות האחדים, למשל את:

110110110110.....

נתאר:

222222....

לכן העוצמה של הקבוצה שווה לעוצמה של סדרות מספרים שלמים והיא:

$\aleph$

3.

קבוצת כל הסדרות הבינאריות שלא כוללות את הרצף 00 או 11.

נשים לב שאחרי 0 חייב להיות:

ואחרי 1 חייב להיות:

לכן האיבר הראשון קובע את כל הסדרה, וכמות הסדרות היא:

■

הגשת שאלה

1.

קבוצת כל הסדרות הבינאריות (סדרות שיש רק 0 ו-1) כך שאין את הרצף 01.

מכיוון שאין הרצף הזה נקבל שלאחר 0 חייב להיות 0.

לכן בסדרה יש אחדים עד שזה עובר לאפס ונשאר כך לתמיד, לדוגמא:

111111000000.....

לכן לכל סדרה נוכל לתת את מספר הפעמים שמופיע 1 (חוץ מהסדרה שכולה 1).

ולכן קיבלנו שהעוצמה היא:

אילן אילניי

$$\aleph_0$$

2.

קבוצת כל הסדרות הבינאריות כך שלא מופיע הרצף 00.

נשים לב שמכיוון שהרצף לא מופיע אחרי 0 יש 1.

לכן כל 0 יופיע בנפרד וביניהם יהיו אחדים למשל:

$$1110110111111101011111.....$$

לכן (חוץ מקבוצה שנהיית רק אחדים בסוף) נקבל שאפשר לתאר סדרה בסדרת כמות האחדים, למשל את:

$$110110110110.....$$

נתאר:

$$222222.....$$

לכן העוצמה של הקבוצה שווה לעוצמה של סדרות מספרים שלמים והיא:

$$\aleph$$

3.

קבוצת כל הסדרות הבינאריות שלא כוללות את הרצף 00 או 11.

נשים לב שאחרי 0 חייב להיות 1.

ואחרי 1 חייב להיות 0.

לכן האיבר הראשון קובע את כל הסדרה, וכמות הסדרות היא 2.

$$\blacksquare$$

A correct answer is 0, which can be typed in as follows: 0

A correct answer is 1, which can be typed in as follows: 1

A correct answer is 1, which can be typed in as follows: 1

A correct answer is 1, which can be typed in as follows: 1

A correct answer is 0, which can be typed in as follows: 0

A correct answer is 2, which can be typed in as follows: 2

שאלה 9

לא נענה

חומר עזר - עוצמות

הערה:

נזכיר שבדי לרשום ארשמו a.

שאלה:

מצאו את העוצמה של הקבוצה הבאה:

$$A = \text{קבוצת כל הקטעים ב-}\mathbb{R}^2 \text{ המאונכים לציר ה-}x$$

פתרון:

נוכיח משהו חזק, תהי:

$$B = \text{קבוצת כל הקטעים ב-}\mathbb{R}^2$$

נוכיח ש:

אילן אילניי

$$|B| = \boxed{}$$

נשים לב שכל קטע אפשר לייצג בקטע בן שתי נקודות, כלומר אם L קטע אז קיימות שתי נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ונקודות אלה יחידות, (זוהי בעצם הגדרת קטע) לכן נוכל להגדיר:

$$f: B \rightarrow \mathbb{R}^{}$$

$$f(L) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$\text{\mid B \mid} \leq \text{\mid R^{\{4\}} \mid} = \boxed{}$$

מצד שני לכל $x \in \mathbb{R}$ יש את הקטע $(x, 0)$ ל $(x, 1)$.
לכן גם:

$$|B| \geq \boxed{}$$

מקנטור ברנשטיין קיבלנו:

$$|B| = \aleph$$

בפרט:

$$A \subseteq B$$

ולכן:

$$|A| \leq \aleph$$

נשאר להוכיח את הכיוון ההפוך, עשו זאת בעצמכם.

הגשת שאלה

מצאו את העוצמה של הקבוצה הבאה:

קבוצת כל הקטעים ב $\mathbb{R}^2$ המאונכים לציר ה- $x=A$

פתרון:

נוכיח משהו חזק, תהי:

$$= B \mathbb{R}^2$$

נוכיח ש:

$$|B| = \aleph$$

נשים לב שכל קטע אפשר לייצג בקטע בן שתי נקודות, כלומר אם L קטע אז קיימות שתי נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ונקודות אלה יחידות, (זוהי בעצם הגדרת קטע) לכן נוכל להגדיר:

$$f: B \rightarrow \mathbb{R}^4$$

ונקבל:

$$|B| \leq |R^4| = \aleph$$

מצד שני לכל $x \in \mathbb{R}$ יש את הקטע $(x, 0)$ ל $(x, 1)$.
לכן גם:

אילן אילניי

מקנטור ברנשטיין קיבלנו:

בפרט:

ולכן:

שימו לב שבדיוק אותם קטעים שהשתמשנו להוכיח ש:

נמצאים ב A ולכן:

$$|B| \geq \aleph$$

$$|B| = \aleph$$

$$A \subseteq B$$

$$|A| \leq \aleph$$

$$|B_{mid}| \geq \aleph$$

$$|A| \geq \aleph$$

A correct answer is $\aleph$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $\aleph$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $\aleph$, which can be typed in as follows:

A correct answer is $\aleph$, which can be typed in as follows:

סיום שלב צפייה במשוב

ניווט בוחן

סיום שלב צפייה במשוב

195–88 מתמטיקה בדידה תשע"ה סמסטר קיץ

התחיל ב:	20:12 , 4/11/2016
מצב	הסתיים
הושלם ב-	20:13 , 4/11/2016
הזמן שלקח	42 שניות

מידע

מספר שאלות בגרפים ללא הגשה וללא ניקוד:

שאלה 1: האם קיים גרף שקדקודיו בעלי הדרגות:

א. 3,3,3,3

ב. 3,3,3,3,3

ג. 1,1,2,3,4,5

שאלה 2: האם יתכן כי בגרף מסדר 100 לכל קדקוד תהיה דרגה 3?

שאלה 3:הוכיחו/הפריכו: אם G גרף רגולרי (כלומר דרגות כל הקודקודים שלו שוות), אז גם המשלים שלו רגולרי.

שאלה 4: יהי G גרף מסדר 6 לפחות. הוכיחו כי ב- G או במשלים שלו יש מעגל מסדר 3 לפחות.

סיום שלב צפייה במשוב

ניווט בוחן



סיום שלב צפייה במשוב