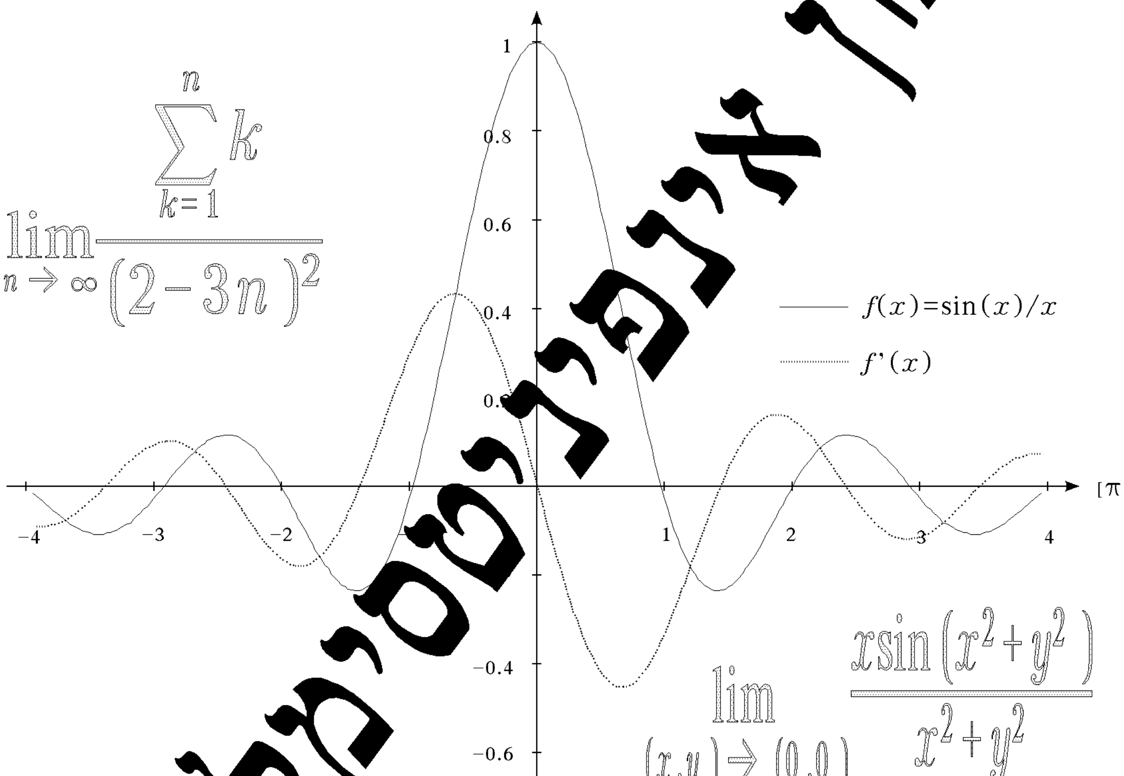
חשבון אינפיניטסימלי 1+2

$$\sup\{|f(x)+g(x)| : x\in[a,b]\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{(2-3n)^2}$$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{2}{e^{1/4}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}\mathrm{d}x\le 2e^2$$

חוברת תרגילים

מהדורה שלישית: תשס"ב

בועז צבאן, המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב, אוניברסיטת בר-אילן

תוכן עניינים

אקדמות מלין

חוברת זו כוללת תרגילים טכניים (אין ברירה, חלק מהמתמטיקה צריך ללמוד דרך הידיים) וכן תרגילי חשיבה עבור הקורס חשבון אינפיניטסימלי של המחלקה למתמטיקה באוניברסיטת בר־אילן. הסדר של התרגילים אינו מחייב וניתן בקלות יחסית להתאימו לקורס.

מקורות וקרדיט. חוברת זו מבוססת על תרגילים של ליאורה הוך ושלי. מספר שאלות נלקחו מהמתרגלים הבאים: מריאל מהדב, שמואל קפלן, יהודה שנפס, אברהם בבקוף, . . . , וניוטון! כמות גדולה של תרגילים נוספה למהדורה הנוכחית, להגדלת חופש הבחירה של המתרגל (וכדי שיישאר לתלמידים מה לעשות לפני הבחינה). תודתי נתונה למריאל מהדב על בחירת התרגילים החדשים. אפשר להעשיר את התרגילים בעזרת הוספת שאלות מהמבחנים שמופיעים בחלק ב׳.

עיצוב. עמוד השער נכתב במעבד (המדהים!) אורן. התרגילים נכתבו ב LaTeX עברי (לא, זה לא נוח לכתוב ב LaTeX עברי: התמיכה עדיין מלאכותית), תוך שימוש בחבילה שכתב בוריס לאבה מהטכניון, ופקודות מאקרו שכתבתי לפי עניות דעתי. שימוש בפונט David (ברירת המחדל של הפונטים ב LaTeX עברי מזעזעת) התאפשר בזכות מישאל סקלרץ, ותודתי נתונה לו על כך.

מבנה. החלק הראשון של החוברת מכיל תרגילים (ראה תוכן עניינים בהמשך). החלק השני מכיל צילומים של יותר מחמישים בחינות שנערכו במחלקה בשנים

הקודמות, ע"י המרצים הבאים: אליהו בלר, שמחה הורביץ, לורנס זלצמן, שמואל קנטורוביץ', ואחיעזר שאקי.

להערות, הדואר האלקטרוני שלי הוא tsaban@macs.biu.ac.il

פרק 1

חסמים

שאלה 1. מצא את החסם העליון, החסם התחתון, המקסימום והמינימום של הקבוצות הבאות, כאשר הם קיימים. נמק את טענותיך.

1.1) $A := \{5 - \frac{2}{3n} : n \in \mathbb{N}\}$

1.2) $B := \{(-1)^n \left(5 - \frac{3}{4^n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$

1.3) $C := \{\frac{n^2+3n}{n^2-3n+4} : n \in \mathbb{N}\}$

1.4) $D := \{n + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

שאלה 2. הוכח כי לכל קבוצה סופית ולא ריקה יש מקסימום ומינימום.

שאלה 3. נתון ש $S \subseteq T$. מה הקשר בין $\inf S$ ו $\inf T$? ענה על אותה שאלה לגבי $\sup S$, $\sup T$.

שאלה 4. הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, כל אחת מהטענות הבאות.

4.1) תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים וחסומה מלעיל אך לא מלרע. אזי הקבוצה המשלימה A^c חסומה מלרע אך לא מלעיל.

(4.2) כאשר קיים מינימום לקבוצה הוא יחיד.

(4.3) אם לקבוצה S קיים מינימום ו $c > 0$, אז לקבוצה cS קיים מינימום, וערכו הוא $c \cdot \min S$.

(4.4) תהי S קבוצה חסומה לא ריקה. אזי:

$$\sup cS = \begin{cases} c \cdot \sup S & c > 0 \\ c \cdot \inf S & c < 0 \end{cases}$$

(4.5) תהיינה $S, T \neq \emptyset$ קבוצות חסומות. נסמן $S+T := \{s+t : s \in S, t \in T\}$. אזי:

$$\begin{aligned} \sup(S+T) &= \sup S + \sup T \\ \inf(S+T) &= \inf S + \inf T \end{aligned}$$

(4.6) תהיינה $S, T \neq \emptyset$ קבוצות חסומות. אזי:

$$\begin{aligned} \sup(S \cup T) &= \max\{\sup S, \sup T\} \\ \inf(S \cap T) &= \min\{\inf S, \inf T\} \end{aligned}$$

(4.7) תהיינה $S, T \neq \emptyset$ קבוצות של מספרים חיוביים. נסמן

$$S \cdot T := \{s \cdot t : s \in S, t \in T\}, \quad \frac{1}{S} := \{\frac{1}{s} : s \in S\}$$

אזי:

$$\begin{aligned} \sup(S \cdot T) &= \sup S \cdot \sup T \\ \inf\left(\frac{1}{S}\right) &= \frac{1}{\sup S} \end{aligned}$$

שאלה 5. נתונות שתי פונקציות $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. הוכח את הטענה הבאה.

$$\begin{aligned} \sup\{|f(x)+g(x)| \quad &: \quad x \in [a,b]\} \leq \\ &\leq \quad \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} + \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\} \end{aligned}$$

פרק 2

גבולות של סדרות

שאלה 1. הוכח ישירות על פי ההגדרה:

1.1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$

1.2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\cos(n^2) = 0$

1.3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4+\sqrt{n}} = 0$

1.4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1300n+400000}{n^5+8.5n+4} = 0$

שאלה 2. נסח את שלילת הגדרת קיום גבול, והוכח בעזרתו כי לסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{זוגי } n \\ 1 & \text{איזוגי } n \end{cases}$$

לא קיים גבול.

שאלה 3. תהי נתונה סידרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. הוכח או הפרך:

3.1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

3.2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (הבחן בין שני מקרים עבור a)

3.3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

3.4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$

שאלה 4. חשב את הגבולות הבאים (על פי משפטים):

4.1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n-5}{n^6+2n^2-3}$

4.2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \sin\frac{n\pi}{3}}{3^n}$

4.3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n}\right)$

4.4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^7-3n^2-1}{1+2n^2-n^5}$

4.5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^{2n+3}n^5}$

4.6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$

4.7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}$

4.8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{(2-3n)^2}$

4.9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

4.10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n-3^{n+1}}{2^n+3^{n+1}}$

4.11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

4.12) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

4.13) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

4.14) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

שאלה 5. נתונה סידרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים חיוביים וקיים $0 < q < 1$ שלכל $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leq qx_n$ הוכח ש $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (ראשית יש להראות שהסידרה מתכנסת).

שאלה 6. נתון שלכל n קיים משולש שאורכי צלעותיו הם a^n, b^n, c^n. מצא את כל הערכים האפשריים עבור (a, b, c). הוכח.

שאלה 7. [ממבחן] יהיו a, b, c מספרים חיוביים. הוכח:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}$$

שאלה 8. הוכח או הפרך:

(8.1 נתון שהסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L = 0$, ולסידרה $\{b_n\}$ אין גבול. אזי לסידרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין גבול.t

(8.2 כמו קודם, אלא שהפעם $L \neq 0$.

שאלה 9. הוכח או הפרך:

(9.1 אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, ו $L = 0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$ (טפל בנפרד במקרה שבו יש אינסוף ערכים של n שעבורם a_n שלילי).

(9.2 אותה שאלה כאשר $L < 0$ (טפל בנפרד במקרה $L = -\infty$).

(9.3 אותה שאלה כאשר $L > 0$. (טפל בנפרד במקרה $L = \infty$).

שאלה 10. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות לא חסומות. אזי לסידרה $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא קיים גבול סופי.

פרק 3

סדרות מונוטוניות, רקורסיה, המספר e

שאלה 1. [ממבחן] תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרת מספרים כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} a_{2k} &< a_{2k+2} \\ a_{2k+1} &< a_{2k-1} \end{aligned}$$

הוכח כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

שאלה 2. [ממבחן] אנתונות שתי סדרות $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ונתון שהסידרה $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. בדוק מהו $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

שאלה 3.

3.1) תהא

$$A := \{x_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}_{n \text{ פעמים}} : n \in \mathbb{N}\}$$

מצא את $\inf A$ ואת $\sup A$. (רמז: הגדר באינדוקציה $x_1 = \sqrt{2}$, ו $x_{n+1} =$ $\sqrt{2x_n}$.)

3.2) פתור את המשוואה $x = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+x}}}$. (לא מספיק למצוא פתרון. יש להוכיח שאין פתרונות פרט לאלו שמצאת).

שאלה 4. יהי $c > 0$ ונגדיר סידרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ בצורה הבאה: $a_1 = c$, ולכל $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$.

4.1) עבור אילו ערכי c הסידרה יורדת, קבועה, עולה?

4.2) בכל אחד מהמקרים, האם קיים לסידרה גבול? מהו הגבול?

שאלה 5. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סידרה המוגדרת באופן הבא: $a_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}$. הוכח שהסידרה מתכנסת, ושגבולה נמצא בקטע $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$.

שאלה 6. חשב את הגבולות הבאים:

6.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$

6.2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{2n+1}\right)^{n}$

6.3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

שאלה 7. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים שאינה חסומה מלעיל. קבע אילו מהטענות הבאות נובעות מהנתון (נמק).

7.1) $a_{n+1} \geq a_n$ לכל n

7.2) $a_{n+1} \geq a_n$ החל מ N מסויים

7.3) $a_{n+1} \geq a_n$ עבור אינסוף n־ים

7.4) $a_{n+1} \geq 1000^{1000000000}$ עבור אינסוף n־ים

7.5) [ממבחן] ל $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סידרה ששואפת לאינסוף.

שאלה 8. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים (שונים מ 0). אזי לכל n,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

באי־שוויון זה, הגורם השמאלי נקרא *ממוצע הרמוני*, הגורם האמצעי נקרא *ממוצע גאומטרי* והגורם הימני נקרא *ממוצע אלגברי* (אינך נדרש להוכיח אי־שוויון זה).

הוכח:

8.1) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה חיובית המתכנסת לגבול a. אזי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n}=a$.

8.2) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$. אזי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

8.3) מצא את הגבולות

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[2^n]{a}-1}$$

עבור $a>1$.

8.4) מצא את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$
2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}}$
3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^{1/n}$
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^\pi}{\pi^n}$
5. $\lim_{n\to\infty}n^n q^n, \quad (0<q)$
6. $\lim_{n\to\infty}\left(n^{1/n}\right)^{1/n}$

7. $a > 0 \quad \lim_{n\to\infty} a^{1/n^2},$

8. $(0 < b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{(1+b)(1+b^2)\cdots(1+b^n)}$ (רמז: **חלק למקרים** $0 < b < 1$, $b = 1$, $1 < b$).

שאלה 9. הוכח שהסידרה המוגדרת על ידי

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

אינה חסומה (רמז: הנח בשלילה שהיא חסומה, והראה שהיא מונוטונית).

שאלה 10. [ממבחן] יהי $0 < c < 1$. נגדיר $a_0 = c$, ולכל n טבעי, $a_n = \frac{c}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$.
הוכח שהסידרה המתקבלת מתכנסת, ומצא את גבולה.

שאלה 11. מצא את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{(1^n+2^n+\cdots+n^n)^{1/n}}{n}$.

פרק 4

גבול עליון ותחתון, תת־סדרות, סדרות קושי ומשפט קנטור

שאלה 1. מצא את כל הגבולות החלקיים של הסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, כאשר:

1.1) $a_n = \frac{5^n+(-5)^n}{4^n}$

1.2) $a_n = \frac{4^n+(-4)^n}{5^n}$

1.3) $a_n = n - 7\left[\frac{n}{7}\right]$

שאלה 2. יהי $a_1 = 0$ ועבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$\begin{cases} a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} \\ a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \end{cases}$$

מצא את $\limsup a_n$ ואת $\liminf a_n$.

שאלה 3. הוכח שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, אזי

$$\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$$

שאלה 4.

(4.1) הוכח שאם $a_n > 0$ לכל n, ומתקיים $\limsup a_n \cdot \limsup \frac{1}{a_n} = 1$, אזי הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים.

(4.2) תן דוגמא נגדית כאשר משמיטים את הדרישה שלכל n, $a_n > 0$.

שאלה 5.

(5.1) תן דוגמא של סידרת קושי של מספרים רציונליים שאינה מתכנסת למספר רציונלי. הצדק תשובתך.

(5.2) יהי $0 \le K < 1$ ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה המקיימת $|a_{n+1} - a_n| \le K \cdot |a_n - a_{n-1}|$ לכל $n \ge 2$. הוכח שהסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(5.3) [ממבחן] נגדיר סידרה באינדוקציה:

$$a_1 = 13; \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n \cdot n!}\right) \quad (n \ge 1).$$

הוכח שהסידרה מתכנסת.

שאלה 6. נתבונן בסידרה הבאה:

$$1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

(6.1) הראה שלסידרה זאת יש אינסוף תת־סדרות המקיימות את הדרישות הבאות:

1. איחוד כל האינדקסים שלהן יכסה את כל האינדקסים של הסידרה.
2. אין לתת־הסדרות אינדקסים משותפים.
3. כל התת־סדרות שואפות לאותו גבול (מהו הגבול?).

6.2) ידוע שאם יש מספר סופי של תת־סדרות כך שמתקיימות תכונות (1), (2), ו (3), אז הסידרה המקורית מתכנסת אף היא, ולאותו גבול. האם גם במקרה שלנו הסידרה המקורית מתכנסת לגבול המשותף של (אינסוף) התת־סדרות שלה? מדוע?

שאלה 7. נגדיר באינדוקציה את הסדרות הבאות:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases} , \qquad \begin{cases} b_1 = 4 \\ b_{n+1} = \sqrt{6+b_n} \end{cases}$$

7.1) האם הקבוצה

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

מכילה נקודה אחת בלבד? אם כן ־ מהי?

7.2) נתבונן בסדרות

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{זוגי } n \\ 6-a_n & \text{איזוגי } n \end{cases}, \; d_n = \begin{cases} b_n & \text{זוגי } n \\ 6-b_n & \text{איזוגי } n \end{cases}, \; I_n = \begin{cases} [c_n, d_n] & \text{זוגי } n \\ [d_n, c_n] & \text{איזוגי } n \end{cases}$$

האם הקבוצה

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

מכילה נקודה אחת בלבד? אם כן ־ מהי?

שאלה 8. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה כך ש $a_1 = \frac{1}{2}$ ולכל $n \geq 2$ מתקיים $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$. הוכח שהסידרה מתכנסת לגבול a כך ש $0 \leq a \leq 1$.

פרק 5

טורים

שאלה 1. בדוק התכנסות/התבדרות של הטורים הבאים.

1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

1.2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) a^n \qquad (a > 0)$

1.3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10^n} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$

1.4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n-1}}{n^n} + \frac{2\cdot 5\cdot\dots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\dots\cdot(4n-3)}\right)$

1.5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{2^n - n}\right)$

שאלה 2. מצא את סכומם של הטורים הבאים:

2.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

2.2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

2.3) $\alpha \neq 0, -1, -2, -3, \dots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$

שאלה 3. הוכח או הפרך:

(3.1 אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ מתבדר.

(3.2 אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

(3.3 אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ מתכנס.

שאלה 4. נתון הטור $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^3} + \ldots$. האם הטור מתכנס? (הוכח או הפרך).

שאלה 5. אותה שאלה עבור הטור $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$.

שאלה 6. לאילו ערכי x הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים?

(6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$

(6.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} \qquad (x \neq -1)$

שאלה 7. בדוק האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

(7.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$

(7.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} \frac{1}{n}$

(7.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{\ln(n+1)}$

שאלה 8.

(8.1 הוכח שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ מתכנסים, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

(8.2 הוכח שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס בהחלט.

שאלה 9. יהי k מספר השנה הלועזית. נסמן $\mathbb{N}_k = k, k+1, k+2, \ldots$. הוכח שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f: \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$, כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{f(n)}}{f(n)\ln(f(n))\ln(\ln(f(n)))} = \sqrt{3}$$

(רמז: לא נתבקשת למצוא את f !).

שאלה 10. קבע, לגבי כל אחד מהטורים הבאים, האם ניתן לסדר את איבריו כך שסכום הטור המתקבל יהיה -5.

10.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n!)}{3^n}$

10.2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n+1)}$

10.3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n!$

שאלה 11. נתבונן בסידרה $a_n = \frac{(\sqrt{2})^{(-1)^{n+1}}}{n}$.

11.1) האם סידרה זאת יורדת?

11.2) האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס בהחלט? בתנאי? מתבדר? אם הטור מתכנס ־ מצא את סכומו. (רמז: הראה שסדרת הסכומים החלקיים S_{2n} היא מונוטונית.)

שאלה 12. הוכח שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ מתבדר.

שאלה 13. בדוק התכנסות/התבדרות של הטורים הבאים:

13.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right)$

13.2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$

שאלה 14. יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו, ונניח שהטורים הבאים, המתקבלים על ידי הוספת סוגריים בטור, מתכנסים:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\dots\end{aligned}$$

(14.1 נניח ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. האם שלושת הטורים מתכנסים לאותו גבול?

(14.2 נניח ש $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנסים לאותו גבול (ולא נתון ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). האם בהכרח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

(14.3 נניח ש $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנסים (לא בהכרח לאותו גבול). האם בהכרח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס? אם התשובה שלילית - תן דוגמא נגדית.

שאלה 15. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס. נתבונן בטענה הבאה: "אם נזרוק מספר סופי של איברים מהטור, אז גם הטור החדש שייתקבל מתכנס".

(15.1 האם הטענה נכונה רק עבור טור חיובי לבסוף)כלומר שהחל ממקום מסויים כל איבריו חיוביים(?

(15.2 האם הטענה נכונה עבור טור מתכנס בהחלט?

(15.3 האם הטענה נכונה עבור טור המתכנס בתנאי?

שאלה 16. בדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/6)}{\ln(n+1)}$ מתכנס בהחלט.

שאלה 17. יהי נתון טור המתכנס בתנאי.

(17.1 הוכח שהטור המורכב מהאיברים החיוביים שלו בלבד מתבדר, וכן הטור המורכב מהאיברים השליליים שלו בלבד מתבדר.

(17.2 נניח שאנו זורקים מספר אינסופי של איברים חיוביים וכן מספר אינסופי של איברים שליליים מהטור, כך שעדיין נשאר בטור מספר אינסופי של איברים חיוביים ומספר אינסופי של איברים שליליים. האם הטור החדש עדיין מתכנס בתנאי? חלק למקרים.

שאלה 18. לכל אחת מהסדרות הבאות, קבע האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט או בתנאי.

(18.1
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2k+1} & n = 2k+1 \\ \frac{-1}{(2k)^2} & n = 2k \end{cases}$$

(18.2
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\ln(2k+1)} & n = 2k+1 \\ \tan\frac{-7}{8k^3} & n = 2k \end{cases}$$

(שים לב שאם $-\pi/2 < x < 0$, אז $\tan(x) < 0$.)

(18.3
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(22k+11)^{7.5}} & n = 22k+11 \\ 1-\cos\frac{1}{\sqrt{4k}} & n = 4k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

שאלה 19. לפי משפט רימן, אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז ניתן לסדר את איבריו מחדש לטור שנסמנו $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, המתכנס לסכום S. נניח ש $S \neq \pm\infty$. האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי?

שאלה 20. לאילו ערכים של α ו k הטורים הבאים מתכנסים?

(20.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\alpha\right)^{n}$

(20.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{k}\alpha^{n}$

(20.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2\alpha-1)^{n}}{\sqrt{n}}$

פרק 6

גבולות של פונקציות

שאלה 1. הוכח (או מצא את הגבול) על פי ההגדרה.

1.1) $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-x-6}{x-8}=-36$

1.2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

1.3) $(a>0)\ \lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$

1.4) $\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2+1}{3+2x^2}$

1.5) $\lim_{x\to \infty}\frac{6x^2+1}{3x-1}$

שאלה 2. הוכח את הטענות הבאות.

2.1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ לא קיים.

2.2) $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ לא קיים.

שאלה 3. תהי $f(x)=\begin{cases}1-x & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

3.1) האם קיים a כך שהגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים?

3.2) כנ"ל עבור הפונקציה $g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

שאלה 4. מצא את הגבולות הבאים (בעזרת משפטים).

4.1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x-\sqrt{x^2+1})$

4.2) $\lim\limits_{x\to\alpha\neq0} \frac{\sin(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$

4.3) $\lim\limits_{x\to0}[x\sin\frac{1}{x}]$

4.4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$

4.5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)$

4.6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

4.7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}$

4.8) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$

4.9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

4.10) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\tan x}\right)$

4.11) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{\arctan(x+2)}$

שאלה 5. הוכח או הפרך: אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$, אז $\lim\limits_{x\to\infty}(f(2x)-f(x))=0$.

שאלה 6. כידוע, הגבול $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ לא קיים. האם ניתן להסיק מכך שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n)$ אינו קיים על ידי הצבת $\frac{1}{n}$ במקום x ושימוש בהגדרת הגבול על פי סדרות? מדוע?

פרק 7

רציפות, משפט ערך הביניים

שאלה 1. תהיינה f ו g פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה x_0. נניח כי f רציפה בסביבת x_0 וכן g אינה רציפה ב x_0.

1.1) הוכח שאם $f \cdot g$ רציפה ב x_0 אזי $f(x_0) = 0$.

1.2) הוכח שאם $f(x_0) = 0$ וכן g חסומה בסביבת x_0, אזי $f \cdot g$ רציפה ב x_0.

1.3) האם ניתן לוותר בסעיף הקודם על ההנחה ש g חסומה בסביבת x_0 ? הוכח את תשובתך.

שאלה 2. מצא את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וסווגן.

2.1) $f(x) = (x - [x])(x - 1)$

2.2) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\forall n \in \mathbb{N}) x \neq \frac{1}{2^n} \\ x & (\exists n \in \mathbb{N}) x = \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

2.3) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

2.4) $f(x) = (-1)^{[\frac{1}{x}]}$

(2.5
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\tan 2x}{5x} & x\neq 0\\ 3 & x=0\end{cases}$$

שאלה 3. מצא a ו b כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה.

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x & x\leq\frac{-\pi}{2}\\ a\sin x+b & \frac{-\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}\\ \cos x & \frac{\pi}{2}<x\end{cases}$$

שאלה 4. [ממבחן]

(4.1 נתון ש f רציפה ושלילית ב $[0,\infty)$, ומקיימת $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$. הוכח או הפרך: $\sup\{f(x):x\in[0,\infty)\}<0$.

(4.2 נתון כי f,g רציפות ב $[0,1]$, ולכל $x\in[0,1]$, $f(x)\leq g(x)$. בנוסף נתון $\sup\{f(x):x\in[0,1]\}=\sup\{g(x):x\in[0,1]\}$. הוכח שקיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ עבורה $f(x_0)^2-3f(x_0)=g(x_0)^2-3g(x_0)$.

שאלה 5. תהיינה f ו g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[0,1]$, המקיימות $g([0,1])=[0,1]$, $f([0,1])\subseteq[0,1]$. הוכח שקיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ שעבורה $f(x_0)=g(x_0)$.

שאלה 6. [ממבחן] תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ כך ש $f(2)=1$. הוכח שקיימת נקודה x_0 ב $[0,2]$ כך ש $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

שאלה 7. הוכח שלכל פולינום ממעלה איזוגית יש שורש ממשי.

שאלה 8.

8.1) **הוכח שלמשוואה** $x\sin x+\cos x=x^2$ **יש פתרון יחיד בקטע** $[0,\infty)$.

8.2) **תהי** $f(x)=\begin{cases}x\sin x+\cos x & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. **האם יש** $a>0$ **כך שהגבול** $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ קיים?

פרק 8

נגזרות

שאלה 1. ציין לאילו ערכי x הנגזרת קיימת, וחשב את ערכי הנגזרות שם.

1.1) $f(x) = \ln(|x+2|(x+3))$

1.2) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

1.3) $f(x) = (\log_{10}(x))^{\log_{10}(x)}$

1.4) $f(x) = x^{(x^x)}$

1.5) $f(x) = \log_x(x)$

1.6) $f(x) = 2^{x+\cos(x^2)}$

1.7) $f(x) = e^{\arccos(2x+1)} \cdot \arcsin(3x+5)$

1.8) $f(x) = (10x^3 + 2(x^4+4))^{10}$

1.9) $f(x) = \ln(\sin^2(3x+8))$

1.10) $f(x) = ((5x)^{10} + 8x^7 - 3)^{-\frac{2}{3}}$

1.11) $f(x) = 3^(x+1)(x+1)^3\ln(x^3+1)$

1.12) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

1.13) $f(x) = \frac{x\sin x}{1+\tan x}$

שאלה 2. תהי f מוגדרת בסביבת 0, אך לא בנקודה 0 עצמה. נניח שהגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושווה ל L.

2.1) הוכח שאי־הרציפות ב 0 היא סליקה.

2.2) הוכח שהפונקציה המתקבלת מ f על ידי סילוק אי־הרציפות ב 0 היא גזירה ב 0. חשב את נגזרתה.

שאלה 3. תהי f מוגדרת ב $\mathbb{R}$.

3.1) הוכח שאם f גזירה ב x_0 אזי $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

3.2) מצא דוגמא לפונקציה f *שאינה* גזירה ב x_0, ובכל זאת קיים גבול (סופי) לביטוי $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

שאלה 4. תהי f גזירה ב $\mathbb{R}$, כך שלכל x, y מתקיים

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

הוכח שלכל x, f גזירה פעמיים ב x ומקיימת $f''(x) = 2$.

שאלה 5. [ממבחן] תהי $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$. הוכח:

5.1) $f(x)$ בעלת אי־רציפות סליקה ב־0.

5.2) הפונקציה המתקבלת מ f על ידי סילוק אי הרציפות אינה גזירה ב־0.

פרק 9

נוסחת טיילור

שאלה 1. מצא נוסחת מקלורן של הפונקציות הבאות.

1.1) $f(x) = 2^x$ עד סדר 3.

1.2) $f(x) = \tan x$ עד סדר 5.

שאלה 2. חשב את הפולינום המקרב מסדר 2 עבור $f(x) = x^x - 1$, סביב $a = 1$.

שאלה 3. חשב:

3.1) $\sin(1^\circ)$ בדיוק של 10^{-8}.

3.2) $\log_{10}(11)$ בדיוק של 10^{-5}.

שאלה 4.

4.1) [ממבחן] מצא פונקציה $f(x)$ מוגדרת על $\mathbb{R}$ כך ש

$$f(3) = 2, f'(3) = 5, f''(3) = -4, f'''(3) = 7, f^{(4)}(3) = -1, f^{(5)}(3) = 6$$

(4.2 נתונים $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. מצא פונקציה f גזירה 10 פעמים ב $(-1, 1)$ ומקיימת

$$f(0) = a;\ f^{(4)}(0) = b;\ f^{(6)}(0) = c;\ f^{(9)}(0) = d$$

שאלה 5. [ממבחן] מצא את פיתוח טיילור סביב $x_0 = 2$ של הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$ עד סדר חמש ועד בכלל, והערך את השארית.

שאלה 6. [ממבחן] נניח ש f מוגדרת בסביבת x_0, גזירה 5 פעמים בסביבה, הנגזרת החמישית רציפה שם. עוד נניח ש $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = f^{(5)}(x_0) = 0$, וש $f^{(6)}(x_0) > 0$. הוכח ש x_0 היא נקודת מינימום מקומי עבור f.

שאלה 7.

(7.1 כמה שורשים יש למשוואה $\arctan x = x^2$ ב $\mathbb{R}$?

(7.2 מצא קירוב לכל שורש שונה מאפס, כך שהשגיאה לא תעלה על 0.07.

שאלה 8. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: תהא f גזירה k פעמים ב $[a, b]$, כך ש $f^{(k)}(x)$ רציפה ב x_0. יהא $n \leq k$. אזי:

1. $R_n(x)$ גזירה k פעמים ב $[a, b]$,
2. לכל $n + 1 \leq j \leq k$ מתקיים $R_n^{(j)}(x) = f^{(j)}(x)$,
3. $R_n^{(k)}(x)$ רציפה ב x_0.

שאלה 9. חשב, בעזרת הפונקציה $\ln \frac{1+x}{1-x}$, את $\ln 2$ ואת $\ln 4$ כך שהשגיאה לא תעלה על 10^{-3}.

שאלה 10. חשב את פיתוח טיילור מסדר n סביב x_0 עבור הפונקציות הבאות, והערך את השארית.

10.1) $n=3$, $x_0=\frac{1}{\pi}$, $f(x)=x^6\sin\frac{1}{x}$.

10.2) $n=4$, $x_0=0$, $f(x)=\ln(1+x)\sin x$.

פרק 10

משפט הערך הממוצע, כלל לופיטל

שאלה 1. מצא *בלי כלל לופיטל* את הגבולות הבאים:

1.1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{3^x-1}$

1.2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x^2-\pi^2}$

שאלה 2. מצא את הגבולות, או הוכח שאינם קיימים.

2.1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

2.2) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[x]{a}-1)$

2.3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2.4) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

2.5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^4e^{-x}$

2.6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

2.7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

2.8) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

שאלה 3. [ממבחן] חשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. נמק כל צעד בחישוב.

שאלה 4. הוכח על ידי משפט הערך הממוצע: $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{15}<\arcsin 0.6<\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$.

שאלה 5.

5.1) הוכח את *המשפט היסודי של האלגברה* : לכל פולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים שונים.

5.2) יהי $p(x)$ פולינום ממעלה n. הוכח שלפונקצית הנגזרת $p'(x)$ אין יותר מ $n-1$ שורשים שונים.

5.3) יהי $p(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. הוכח שלפונקציה $p'(x)$ יש לפחות 3 שורשים ממשיים. האם ייתכן שיש לה עוד שורשים?

שאלה 6. תהי f גזירה ב $\mathbb{R}$ ומקיימת $f(1)=0$. הוכח שהפונקציה $g(x)=x\cdot f(x)$ גזירה ב $\mathbb{R}$ וכי יש פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

שאלה 7. הוכח שלכל $1\le a<b\le 2$ מתקיים $2(\ln b-\ln a)<b^2-a^2$.

שאלה 8. [ממבחן] הוכח שלמשוואה $2x=\cos x$ יש פתרון, והפתרון יחיד.

שאלה 9. [ממבחן] תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$, כך ש f' קיימת ורציפה שם. הוכח שקיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le M\cdot|x-y|$.

שאלה 10. האם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$ מתכנס?

פרק 11

רציפות במידה שווה

שאלה 1. הוכח ישירות על פי ההגדרה, שהפונקציה $g(x) = x^3 + x$ רציפה במידה שווה בקטע $[-4, 3]$.

שאלה 2. תהיינה f ו g רציפות במידה שווה בקטע I. הוכח שהפונקציה $f + g$ רציפה במידה שווה שם.

שאלה 3. תהי f רציפה במידה שווה בקבוצה A, ותהי $B \subseteq A$. הוכח כי f רציפה במידה שווה ב B.

שאלה 4. תהיינה f, g רציפות במידה שווה וחסומות ב $\mathbb{R}$. הוכח ש $f \cdot g$ רציפה במידה שווה שם.

שאלה 5. הוכח או הפרך:

5.1) f רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R} \Leftarrow$ f^2 רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$.

5.2) f רציפה במידה שווה בקטע $I \Leftarrow$ f חסומה שם.

5.3) f רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$ ויש $M>0$ כך שלכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $|f(x)|\geq M$, אזי הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$.

שאלה 6. האם הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ רציפה במידה שווה בקטע $[-5,2]$?

שאלה 7. [ממבחן] הוכח או הפרך: אם $f(X)$ רציפה במידה שווה בכל קטע מהצורה $[0,M]$, אזי $f(x)$ רציפה במידה שווה ב $(0,\infty)$.

שאלה 8. [ממבחן] האם הפונקציה x^x רציפה במידה שווה בקטע $(0,5]$?

פרק 12

נקודות אקסטרמום, חקירת פונקציות

שאלה 1. מצא נקודות מינימום ומקסימום מקומיים של הפונקציות הבאות.

$$f(x) = x + \tan x; \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}; \quad h(x) = x^x$$

שאלה 2.

(2.1) מצא נקודות מינימום ומקסימום מקומיים של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

בקטע $(-\pi, \pi)$.

(2.2) האם קיימת לפונקציה f פונקציה הופכית בקטע $(-\pi/2, 0)$?

שאלה 3. תהי $f(x) = 2\sin x - x\cos x - \frac{x^3}{3} + 5$.

(3.1) האם יש ל $f(x)$ נקודות מינימום, מקסימום או פיתול?

(3.2) האם $f(x)$ הפיכה בקטע (π, ∞)?

שאלה 4. מצא מינימום ומקסימום גלובליים של הפונקציה

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$$

שאלה 5. חקור את הפונקציות הבאות, וצייר את הגרף שלהן.

(5.1 $f(x) = xe^{-x}$ ב $\mathbb{R}$.

(5.2 [ממבחן] $y = \frac{\ln x}{x}$ ב $\mathbb{R}$.

(5.3 [ממבחן] $y = x^{2/3} - x^{-1/3}$ ב $\mathbb{R}$.

(5.4 [ממבחן] $y = x + \sin 2x$ ב $[-2\pi, 2\pi]$.

שאלה 6.

(6.1 חקור את הפונקציה $y = x^x$ בתחום $(0, \infty)$.

(6.2 האם הפונקציה רציפה במידה שווה בתחום $(0, 5]$?

שאלה 7. הוכח.

(7.1 $x < \tan x$ בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$.

(7.2 $e^x > 1 + x$ לכל $x \neq 0$.

שאלה 8. שטחה של כרזת פרסומת הוא 18 מ״ר. השוליים העליונים והתחתונים הם ברוחב 75 ס״מ ובצדדים השוליים 50 ס״מ. מהם מימדי הכרזה, אם ידוע שהשטח המודפס הוא מקסימלי ?

שאלה 9. מצא משוואת ישר העובר דרך הנקודה $(3, 4)$, אשר יוצר ברביע הראשון משולש בעל שטח מינימלי.

שאלה 10. [ממבחן] בשעה $t = 0$ יוצא אדם מנקודה 0 בכביש ישר. בשעה $t \geq 0$ מהירותו שווה ל $4 - t^2$ קמ״ש (כאשר מהירות חיובית מציינת תנועה ימינה ומהירות שלילית מציינת תנועה שמאלה). מצא את מרחקו המקסימלי מנקודה 0 בין השעות 0 ו 3. הצדק את תשובתך. (תזכורת: העתק שווה לאינטגרל של מהירות).

שאלה 11. [ממבחן] תהי f פונקציה גזירה ב $[0, \infty)$, וקיים קבוע $c > 0$ כך שלכל $x \in [0, \infty)$, $f'(x) \geq c$. הוכח כי $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

שאלה 12. הוכח או הפרך: תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a, b]$, כך שקיימות לה שתי נקודות קיצון $x_1, x_2 \in (a, b)$. אזי בהכרח יש ל f נקודת פיתול בין x_1 ל x_2.

פרק 13

אינטגרלים לא מסויימים

שאלה 1. מצא את האינטגרלים הבאים.

1.1) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$

1.2) $\int (e^x - 2^{3x})^2 dx$

1.3) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

1.4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} dx$

1.5) $\int \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx$

1.6) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1.7) $\int e^{2x} \cos(3x) dx$

1.8) $\int x \tan^2 x dx$

1.9) $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$

1.10) $\int (\ln x)^2 dx$

1.11) $\int \tan x \ln(\cos x) dx$

1.12) $\int \frac{3x}{x^2+2x+6}dx$

1.13) $\int \frac{2x+4}{9x^2+24x+7}dx$

1.14) $\int \frac{x^2+3x+4}{4x^2-12x+14}dx$

1.15) $\int \frac{3x+4}{x^2+3x-4}dx$

1.16) $\int \frac{1}{(2x+4)(x-1)(x^2+3)}dx$

1.17) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

1.18) $\int \sin^4 x dx$

1.19) $\int \cos^6 x dx$

1.20) $\int \sin^3 2x \cos^2 x dx$

1.21) $\int \sin 4x \cos 5x dx$

1.22) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

1.23) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

1.24) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$

1.25) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2-4x}}dx$

1.26) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$

1.27) $\int \sqrt{2-x-x^2}dx$

1.28) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$

1.29) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

1.30) $\int x^2 e^{\sqrt{x}}dx$

1.31) $\int \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}dx$

1.32) $\int \frac{1}{x(\ln x)^3}dx$

1.33) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

1.34) $\int \arctan x dx$

שאלה 2. מצא נוסחת נסיגה עבור האינטגרלים הבאים.

$$\int x^\alpha(\ln x)^n dx; \quad \int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}dx$$

פרק 14

שימושים של אינטגרלים

שאלה 1.

1.1) מצא את השטח החסום על ידי האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.2) נתונות הפונקציות $f(x) = \sin(x)$ ו־

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi/2 \\ -x + \pi & \pi/2 \le x < 3\pi/2 \\ x - 2\pi & 3\pi/2 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

מצא את השטח הכלוא ביניהן בתחום $[0, 2\pi]$.

שאלה 2.

2.1) הוכח שלכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[n]{\sin^m x}}{\sqrt[n]{\sin^m x} + \sqrt[n]{\cos^m x}} dx = \frac{\pi}{4}$. (רמז: התבונן מה קורה כאשר מציבים $t = \frac{\pi}{2} - x$).

2.2) הוכח ש־ $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\tan^4 x} = \pi$.

שאלה 3. מצא את אורך הגרף של הפונקציה $y = \ln(\sin x)$ בקטע $[\pi/3, \pi/2]$.

שאלה 4.

(4.1) חשב את האורך של גרף הפונקציה $y = 10 + \sin(7x)$ בתחום $[0, \pi/2]$.

(4.2) יהי $a \in [0, \pi/2]$. מצא את שטח הפנים של הצורה המתקבלת על ידי סיבוב הגרף $y = \sin x$ סביב ציר x בתחום $[a, a + \pi/2]$ (בלי המכסים).

(4.3) מצא את ה־a כך ששטח הפנים המתקבל הוא מקסימלי.

(4.4) חזור על שני הסעיפים הקודמים כאשר שטח הפנים כולל את המכסים.

שאלה 5. מצא את הצורה החסכונית ביותר, מבחינת שטח פנים, של קופסת שימורים גלילית, כאשר הנפח שלה צריך להיות V.

שאלה 6. במשתה האחרון שערך אחשוורוש (לא כתוב במגילה), השתמשו בכוסות המתקבלות ע"י סיבוב המשואה $y = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{5}x + 2$ סביב ציר x, בתחום $[5, 10]$ ס"מ. היהודים הציבו תנאי השתתפות: על אחשוורוש למצוא עבורם את הפונקציה המתארת את נפח הנוזל בתלות בגובהו בתוך הכוס (כדי שיוכלו לדעת מתי לברך ברכה אחרונה). עיזרו לאחשוורוש למצוא את הפונקציה, וחשבו את נפח הנוזל בסמ"ק.

פרק 15

פונקציות קדומות והגדרת האינטגרל המסויים

שאלה 1. הוכח, על פי הגדרת האינטגרל, שהפונקציה $g(x) = x^3$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, ומצא (על פי ההגדרה) את האינטגרל.

שאלה 2. בכל אחד מהמקרים הבאים, חשב את האינטגרל (אפשר להיעזר במשפטים), וציין האם קיימת פונקציה קדומה.

2.1) $f(x) = \begin{cases} sinx & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x} & 1 \le x < 2 \\ x^2 - [x^2] & 2 \le x \le 3 \end{cases}$. $\int\limits_0^3 f(x)dx$.

2.2) $f(x) = |1+x|$. $\int\limits_0^2 f(x)dx$.

2.3) $g(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 \le x < 1 \\ x^2+3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$. $\int\limits_0^2 g(x)dx$.

שאלה 3. הוכח (ללא חישוב ישיר של האינטגרל) כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int\limits_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$.

שאלה 4. חשב בעזרת הגדרת האינטגרל המסוים:

4.1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2^2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n^2)^2}\right)$

4.2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

4.3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$

4.4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n^2}}+\frac{2}{n^2}e^{\frac{4}{n^2}}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}e^{\frac{(n-1)^2}{n^2}}\right)$

שאלה 5. האם הפונקציות הבאות אינטגרביליות על $[0,1]$? אם כן, מצא את ערך האינטגרל.

5.1) $f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

5.2) $f(x)=\begin{cases}-x & x\in\mathbb{Q}\\ x & \text{אחרת}\end{cases}$.

(רמז: בדוק האם f אינטגרבילית בתת־קטע $[a,1]$ עבור $0<a$ שאתה בוחר, והסבר כיצד ניתן להשתמש בכך כדי לענות על השאלה..)

5.3) $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ \frac{1}{2} & \text{אחרת}\end{cases}$.

(רמז: בדוק אינטגרביליות בקטע $[0,a]$ עבור $0<a<\frac{1}{2}$ שאתה בוחר.)

שאלה 6. תהי f אינטגרבילית ב $[a,b]$ כך שמתקיים $0\leq f(x)$ לכל $a\leq x\leq b$. נניח ש f רציפה ב $x_0\in(a,b)$ וכן $0<f(x_0)$. הוכח ש $0<\int_a^b f(x)dx$.

שאלה 7. תהא f אינטגרבילית ב $[0,1]$ כך ש $0 < M < f(x)$ לכל x בקטע, ונסמן $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$. הוכח שקיים $c \in [0,1]$ כך ש $F(c) = \alpha$

פרק 16

נגזרות של אינטגרלים

שאלה 1.

1.1) יהיו h ו־g פונקציות גזירות ב־$\mathbb{R}$; f רציפה ב־$\mathbb{R}$. הוכח:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

1.2) חשב: $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2+3x}\sqrt{1+t^2}dt$; $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\int_{-1}^{\cos(x)} e^{t^2}dt}{(x-\pi)^2}$.

שאלה 2. תהי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$ ומקיימת $\int_a^b f(t)dt > 1$. הוכח שקיים $x_0 \in [a,b]$ עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$, וכן קיים $x_1 \in [a,b]$ עבורו $\int_a^{x_1} f(t)dt = 1$.

שאלה 3. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, כך שקיימות נקודות $a < x_1 < x_2 < b$ כך ש $\int_a^{x_1} f(x)dx = \int_a^{x_2} f(x)dx$. הוכח שקיימת נקודה c בקטע כך ש $f(c) = 0$.

פרק 17

אינטגרלים לא אמיתיים

שאלה 1. חשב את האינטגרלים הבאים, או הוכח שאינם קיימים:

1.1) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

1.2) $\int_0^\infty e^x dx$

1.3) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx$

1.4) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x} dx$

1.5) $\int_{-\infty}^\infty x\sin x^2 dx$

1.6) $\int_{-5}^\infty e^{-x}\sin x dx$

1.7) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$

1.8) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

שאלה 2. כמו השאלה הקודמת, עבור:

2.1) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^2}}$

(2.2 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(2.3 $\int_{-3}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx$

(2.4 $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{\ln|x||}}$

שאלה 3. בדוק האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

(3.1 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx$

(3.2 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)-\arctan x}$

(3.3 $\int_1^{\infty} x^{-x}dx$

(3.4 $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x\ln^2(x+1)}dx$

(3.5 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+[x]^2}$

שאלה 4. כמו השאלה הקודמת, עבור:

(4.1 $\int_0^4 \frac{x}{(x-2)^2}dx$

(4.2 $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$

(4.3 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos(2x)}$

שאלה 5. לאילו ערכי $\alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס האינטגרל $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)^{\alpha}dx$? (רמז: מבחן השוואה גבולי עם הפונקציות $g_1(x) = (x+\frac{\pi}{2})^{\alpha}$ ו- $g_2(x) = (\frac{\pi}{2}-x)^{\alpha}$).

פרק 18

סדרות של פונקציות וטורי פונקציות

שאלה 1. תהיינה

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{|x|}\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(1.1) מצא את פונקצית הגבול $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ בתחום $\mathbb{R}$.

(1.2) האם לכל n, $f_n(x)$ רציפה? האם $f(x)$ רציפה בתחום הנ"ל?

(1.3) האם ההתכנסות היא במידה שווה בתחום?

(1.4) האם ההתכנסות היא במידה שווה בכל קטע סגור שאינו כולל את 0?

שאלה 2. תהי $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sin(2^n x)$.

(2.1) הוכח כי f רציפה וגזירה מכל סדר ב $\mathbb{R}$.

(2.2) חשב את $f^{(k)}(x)$ ומצא את טור מקלורן של f.

(2.3) מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקיבלת.

שאלה 3. אותה שאלה, אבל עם טור טיילור סביב $x_0=\pi$ במקום $x_0=0$.

שאלה 4. נתון הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

(4.1 מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור R.

(4.2 בדוק התכנסות בקצוות $x=\pm R$.

(4.3 מצא תחום התכנסות במידה שווה של הטור.

שאלה 5. תהי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\text{arccot}\frac{x}{n}$.

(5.1 מצא את תחום ההגדרה של f.

(5.2 מצא את התחום שבו f רציפה.

(5.3 מצא את התחום שבו f' קיימת ורציפה.

שאלה 6. עבור טורי הפונקציות הבאים, מצא תחומי התכנסות, התכנסות בהחלט והתכנסות במידה שווה.

(6.1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}+\pi+\arcsin x}$

(6.2 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\arctan x}$

שאלה 7. נתבונן בטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$ בקטע $[\frac{2}{e},2]$.

(7.1 האם הטור מתכנס נקודתית? לאיזו פונקציה? האם ההתכנסות היא במידה שווה?

(7.2 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(\ln x)^n=?$.

שאלה 8. מצא תחום התכנסות והתכנסות בהחלט של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{n!}{n^n}\right)^4-(-1)^n\left(1-\frac{x+1}{n}\right)^{n^2}\right)$$

שאלה 9. מצא את הגבול: $\left(9\lim_{n\to\infty}\int_{1/\pi}^{1}\sqrt[n]{x}\sin\frac{1}{x}dx\right)$ –. נמק כל צעד בחישוב.

שאלה 10. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ מתכנסת נקודתית בקטעים $(0,1)$ ו $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$? האם ההתכנסות היא במידה שווה?

שאלה 11. תן דוגמא לסידרת פונקציות שאינן רציפות בקטע $[0,1]$, אך מתכנסות שם במידה שווה לפונקציה רציפה.

שאלה 12. תהי f_n סידרת פונקציות המוגדרות על הקטע I, כך ש $f_n\to f$ נקודתית בקטע I. הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, את הטענות הבאות:

12.1) f רציפה בקטע I.

12.2) אם ההתכנסות היא במידה שווה בקטע I, אז f רציפה במידה שווה בקטע I.

12.3) אם ההתכנסות היא במידה שווה בקטע I, אז f רציפה בקטע I.

12.4) אם ההתכנסות היא במידה שווה בקטע I וכן f גזירה בקטע I, אז f' חסומה ב I.

שאלה 13. לגבי כל אחת מסדרות הפונקציות הבאות, מצא את פונקציות הגבול ובדוק האם ההתכנסות היא במידה שווה בקטע I הנתון:

13.1) $f_n(x)=\begin{cases}n^2x & 0\le x\le\frac{1}{n}\\ 2n-n^2x & \frac{1}{n}\le x\le\frac{2}{n}\\ 0 & \frac{2}{n}\le x\le 1\end{cases}$, $I=[0,1]$.

(13.2 $f_n(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ -x + \frac{2}{n} & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 10^6 \end{cases}$, $I = [0, 10^6]$.

(13.3 $f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n}x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{n}x + \frac{2}{n} & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$, $I = [0, 1]$.

שאלה 14. הוכח שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ מתכנס במידה שווה בכל קטע חסום, אבל אינו מתכנס בהחלט לאף ערך של x.

שאלה 15. [ממבחן] נתונה סידרת הפונקציות $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$ בקטע $(0, 1)$.

(15.1 מצא את פונקצית הגבול $f(x)$.

(15.2 האם ההתכנסות היא במידה שווה בקטע?

(15.3 האם $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x f(t)dt$?

(15.4 האם $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$?

פרק 19

טורי חזקות

שאלה 1. חשב את סכום הטורים הבאים:

1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ כאשר $|x| < 1$.

1.2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ כאשר $1 < x$.

שאלה 2. פתח לטור מקלורן את הפונקציות הבאות

2.1) $f(x) = \arctan \frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$

2.2) $g(x) = \sin^2 x$

2.3) $h(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$

שאלה 3. מצא את רדיוס ההתכנסות של טורי החזקות הבאים. אם ניתן, בדוק גם בנקודות $x = \pm R$:

3.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

3.2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \qquad (p \in \mathbb{R})$

(3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} a^{(n^2)} x^n \qquad (0 < a < 1)$

(3.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^{n+1}}$

(3.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n x^n \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

פרק 20

פונקציות של שני משתנים

שאלה 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות, והצג אותו באופן גראפי:

1.1) $f(x,y)=\sqrt{\frac{x+y-1}{x^2+y^2-1}}$

1.2) $f(x,y)=\ln(x+y)$

1.3) $f(x,y)=\cos(x^2+y^2-2)$

1.4) $f(x)=\ln(4-x^2-y^2)$

שאלה 2. מצא את הגבולות הבאים, או הוכח שאינם קיימים.

2.1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x-2y}{2x-3y}$

2.2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

2.3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

2.4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

2.5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2.6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,1^-)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$

שאלה 3. תהי $f(x,y) = (x-y)\sin(3x+2y)$. חשב את f_x ואת f_y היכן שהן קיימות.

שאלה 4. נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

חשב את $f_x(0,0)$ ואת $f_y(0,0)$.

שאלה 5. נתונה הפונקציה $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

5.1) בדוק נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$.

5.2) האם f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$? הוכח טענתך.

שאלה 6. תהי f פונקציה גזירה של משתנה אחד. נגדיר $g(x,y) = f(x^2y)$. הוכח כי $x \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

שאלה 7. חשב ישירות על פי ההגדרה את הדיפרנציאל של $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, וקרב בעזרתו את $f(-1.01, -1.98)$.

שאלה 8. תהי $F(x) = f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, כאשר $y = e^x$. חשב את $F'(x)$ על פי כלל השרשרת.

שאלה 9. הוכח שהפונקציות הבאות רציפות:

9.1) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

9.2) $$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

שאלה 10. אילו מהפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$? אילו מהן רציפות לפי x? לפי y?

10.1) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

10.2) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & |x|+|y|\neq 0\\ 1 & x=y=0\end{cases}$$

שאלה 11. חשבו את כל הנגזרות החלקיות מסדר 2 של הפונקציות הבאות:

11.1) $f(x,y)=xy+\frac{x}{y}$

11.2) $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$

11.3) $f(x,y)=x^y$

11.4) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$