משפטים על מטריצה הפיכה, בסיסים ומימדים וטרנספורמציות לינאריות

(1

משפט: תהא A מטריצה ריבועית מעל שדה F אזי A הפיכה אם ורק אם A מכפלה של מטריצה יסודית.

הוכחה: ראינו כבר שמכפלת יסודיות היא הפיכה.

נוכיח כי כל מטריצה הפיכה, היא מכפלת יסודיות.

A הפיכה, A שקולה שורתית ל I, קיימות מטריצות יסודיות $E_1, E_2, \dots E_k$, כך שאם ניקח את $E_k \cdots E_2 E_1 \cdot A = I$.

ומאחר נכפול ב A^{-1} $\quad E_k \cdots E_2 E_1 \cdot I = A^{-1}$

נכפיל את I

$E_k \cdots E_2 E_1 = A^{-1}$

הפכי בשני אגפים

$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1} = A$

מכפלת הפכיים של יסודיות

■

מסקנה: אם A, B הן שקולות שורה $\Leftrightarrow$ קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PB$. (מכפלת אלמנטריות ~ הפיכה).

מסקנה: אם A הפיכה אז $r(AB) = r(B)$.

הוכחה: AB ו B שקולות שורה כי A הפיכה, A גוררת פעולה על שורה ולכן היא לא משנה את הדרגה של B.

הגדרה: אם יש דרך לינארי. של איברי S השווה לאפס כך שלא כל המקדמים שווים לאפס אז S נקראת קבוצה תלויה לינארית, אחרת הקבוצה נקראת בלתי תלויה לינארית.

משפט: V מ"ו כל קבוצה ב V שמכילה 0 היא תלויה לינארית.

הוכחה: $v_1, v_2, \dots, v_k, 0, v_{k+1}, \dots, v_n$

$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k + 1 \cdot 0 + 0 \cdot v_{k+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$

(מקדם $\neq 0$)

לאחר שיש לנו איבר שהוא 0 שווה לאפס אפשר לקח כל המקדמים לאפס, מלבד מלאותו מקדם.

משפט: 1) ט"ו מעל שדה F וכל קבוצה המכילה 0 היא תלויה.
(הוכחה בספר)

2) קבוצה המכילה קבוצה תלויה גם היא תלויה.

3) קבוצה המוכלת בקבוצת בת"ל גם היא בת"ל.

4) בקבוצה תלויה קיים לפחות איבר אחד שהיא צירוף לינארי של האחרים.

5) נניח ש $v_1 \dots v_n$ תלויה לינארית
אז קיים v_i שהוא צירוף לינארי של קודמיו.

6) קבוצה היא בת"ל $\iff$ אחד מאבריה הוא צירוף לינארי של האחרים.

הוכחה: 2: נניח ש S בת"ל, $S = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$
$S_i = \{v_1, v_2 \dots v_n, v_{n+1} \dots v_k\}$ (קבוצה המכילה את הקבוצה הקודמת ועוד איברים)
נתון S בת"ל $\Leftarrow$ $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$
בשביל לראות כולם אפס כך ש

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + 0 \cdot v_{n+1} + 0 \cdot v_{n+2} + \dots + 0 \cdot v_k = 0$$

כיוון שיש $\alpha_i \neq 0$ אז גם S_i היא תלויה לינארית.

3 נניח ש S בת"ל ו $S_2 \subseteq S$, גם S_2 בת"ל
כי אם S_2 תלויה לינארית אז לפי משפט 2 גם S תלויה לינארית בניגוד לנתון.

6 נניח ש S תלויה לינארית.
$\Leftarrow$
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$
ויש i כך ש $\alpha_i \neq 0$.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} \cdot v_2 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot v_{i-1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \cdot v_n$$

v_i הוא צירוף לינארי של אחרים.

$\Rightarrow$ נניח ש v_j הוא צירוף לינארי של אחרים

$$v_j = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_{j+1} v_{j+1} + \dots + \beta_n v_n$$

$$0 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + (-1) v_j + \dots + \beta_n v_n$$

ולא לפחות מקדם אחד שונה מאפס (-1) לכן $v_1, v_2 \dots v_n$ בת"ל.

4 כלול ב 5

5 נתון
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$
ויהי i האינדקס הגדול ביותר כך ש $\alpha_i \neq 0$.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_i v_i = 0$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} \cdot v_2 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot v_{i-1} = v_i$$

v_i = צירוף לינארי של הקודמים.

משפט: 1. A ו B מטריצות שקולות שורה אז שורות A תק"ל $\Leftrightarrow$ השורות של B תק"ל.

2. שורות שונות מאפס של מטריצה מקודמת הן בת"ל.

הוכחה: נניח ש C מתקבלת מ A ע"י פעולה יסודית אחת על שורות ונראה שאם השורות של A ת"ל אז גם השורות של C ת"ל.

(אלו הם הרבה פעמים C כדי להעביר ל B מ-A) נה ורוצים אחת 1 כי כל פעם שנפעיל פעולה אם שורות נקבל מטריצה עם שורות ת"ל עם אינדקס ל B, לכן גם השורות של B ת"ל. כיוון שניתן להגיע מ B ל-A אז אם שורות B ת"ל $\Leftarrow$ שורות A ת"ל.

נסמן שורה i של A ב S_i, ושורה j של A ב S_2 ושאר השורות $S_3 \dots S_m$.

נתבונן בצירוף לינארי של $S_1, S_2 \dots S_m$ שווה לאפס, כל המקדמים שווים לאפס.

$$A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} C \quad =$$

שורות C

$S_2, S_1, S_3, \dots, S_m$

בחלפנו בקווים

כל צירוף לינארי של שורות C הוא צירוף לינארי של שורות A לכן $S_1, S_2 \dots S_m$ ת"ל.

$$A \xrightarrow[\alpha \neq 0]{R_i \to \alpha R_i} C$$

אם נסתכל על שורות C גם ע"י $\alpha S_1, S_2, \dots S_m$

נניח שאלו ת"ל

$$\beta_1(\alpha S_1) + \beta_2 S_2 + \dots + \beta_m S_m = 0$$

כיוון ש $S_1, S_2 \dots S_m$ ת"ל

$$\beta_1 \alpha = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$$

כיוון ש $\alpha \neq 0$ $\beta_1 = 0$

לכן שורות C הם ת"ל.

אם אפשרות לקבל את C

$A \xrightarrow{R_i \to R_i + \alpha R_j} C$

שורות C

$S_1 + \alpha S_2,\ S_2,\ S_3,\ \dots,\ S_n$

אלו בת"ל כי $\beta_1(S_1+\alpha S_2) + \beta_2 S_2 + \dots + \beta_n S_n = 0$

$\beta_1 S_1 + (\beta_1\alpha + \beta_2) S_2 + \beta_3 S_3 + \dots + \beta_n S_n = 0$

עכשיו ש $S_1, S_2, \dots, S_n$ בת"ל

$\beta_1 = \beta\alpha + \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0$

$\beta_1 = 0 \quad \beta_1\alpha + \beta_2 = 0 \longrightarrow \beta_2 = 0.$

2 נניח ש D מטריצה מדורגת עם r שורות שונות מאפס.

נניח ש n שורות אלו הן בלתי תלויות, ונראה סתירה לזה שהן אינן בת"ל.

אם $r=1$ שורה שונה מאפס היחיד בת"ל כי $\alpha_1 R_1 = 0$

$\to R_1 \neq 0 \to \alpha_1 = 0$

הנחת האינדוקציה r-1 שורות שונות מאפס ש מטריצה מדורגת הן בת"ל.

$$D = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & d_{1i_1} & & \\ 0 \cdots & 0 & d_{2i_2} & \\ \vdots & & & \\ 0 \cdots & & \cdots & d_{ri_r} \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ \\ R_r \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \quad ; R_{r+1}$$

$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_r R_r = 0$

בת"ל - $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$\alpha_1(0 \cdots 0\ d_{1i_1} \longrightarrow +$

$\alpha_2(0 \cdots\ 0\ d_{2i_2} \longrightarrow +$

$\alpha_r(0 \cdots \cdots 0 \cdots \alpha_{ri_r} \longrightarrow +$

רכיב הראשון שונה מאפס רכיב i_1 $(d_{i_1} \neq 0)$ $\alpha_1 d_{1i_1} = 0$

$\downarrow$

$\alpha_1 = 0$

נקבל $\alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \alpha_n R_r = 0$

זה דירוג לינארי ל r-1 שורות שונות מאפס ולכן הנחת האינדוקציה הן בת"ל.

$\blacksquare$

הערה: v_1, v_2 בת"ל $\Longleftarrow$ אחד מהם הוא כפולה בסקלר של האחר.

הגדרה: V מ"ו, קבוצה סופית של V תקרא בסיס אם B פורשת ובת"ל. V יקרא מרחב ממימד סופי.

משפט: V מ"ו, מספר האיברים בכל קבוצה פורשת של V גדול או שווה למספר האיברים בכל קבוצה בת"ל.

(מוכח בקלף נפרד)

משפט: יהא V מרחב ממימד סופי, אז בכל הבסיסים יש אותו מספר איברים.

הוכחה: יהיו B_1, B_2 שני בסיסים ב β_1, a_1 איברים, ו B_2, a_2 איברים.

ת"ל $a_1 = a_2$.

β_1 פורשת, β_2 בת"ל $\longrightarrow$ $a_2 \le a_1$

β_2 בת"ל, β_1 פורשת $\longrightarrow$ $a_1 \le a_2$

לכן $a_1 = a_2$.

הגדרה: מימד של מ"ו V = מספר האיברים בבסיס סופי(ת) מוגדר.

משפט: V מ"ו $B = \{v_1 \dots v_n\}$ בסיס, אז כל איבר במרחב הוא צירוף לינארי של איברי B באופן יחיד.

הוכחה: $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$

ת"ל: $\forall i \quad \alpha_i = \beta_i$

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$$

כיוון ש $v_1, v_2 \dots v_n$ בת"ל כל המקדמים שווים לאפס ולכן

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1$$

∎

הגדרה: V מ"ו B בסיס $B=\{v_1,v_2\dots v_n\}$

ונקח $v\in V$ ונרשום

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n$$

$\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_n$ נקראים הקואורדינטות של v בבסיס B.

סימון:

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

משפט: יהי V מ"ו B קבוצה בלקוחת אז התנאים הבאים שקולים.

1. B בסיס
2. B קבוצה בת"ל מקסימלית (איננה מוכלת ממש בבת"ל).
3. פורשת מינימלית (לא מכילה ממש קבוצה פורשת).

הוכחה: נראה $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow 1$ $B=\{v_1,v_2\dots v_n\}$

$1\Rightarrow 2$ נתון: B בת"ל + פורשת. צ"ל B בת"ל + מקסימלית

$v_1,v_2\dots v_n$ בת"ל ובנוסף: נניח v_{n+1} אז קיימים $v_1,v_2\dots v_n,v_{n+1}$ ל הנוספים הם צירופים לינאריים של B שוונן שהם פורשים לכן $v_1\dots v_n,v_{n+1}$ הם תל"ל ולכן B בת"ל מקסימלית

$2\Rightarrow 3$ נתון: בת"ל + מקסימלית צ"ל: פורשת + מינימלית

שנות B פורשת. ברור שכל איבר ב B הוא צ"ל של איברי B לכן נקח $v\in V$, $v\notin B$

בגלל שיש לינאריות כי B בת"ל מקסימלית $T=\{v_1,v_2\dots v_n,v\}$

לכן יש ב T איבר שהוא צירוף לינארי של קודמיו

אבל זה הוא לא יכול כי ב-V גם הם בת"ל ולכן

v צ"ל של $v_1,v_2\dots v_n$ שבסה B ולכן B פורשת

אם B אינה פורשת מינימלית, אז יש בה איבר מיותר בלעדיו הקבוצה תפרוש ואז איבר זה והיה צ"ל של האחרים, בניגוד לכך

ש B בת"ל ולכן B פורשת מינימלית.

$3\Rightarrow 1$ נתון פורשת מינימלית צ"ל בסיס.

אם B תלויה לינארית אז יש בה איבר שהוא צירוף לינארי של האחרים ואז B תפרוש גם בלעדיו זה סותר את "פורשת מינימלית". ולכן B בסיס.

משפט: 1) יהי V מרחב וקטורי ממימד n, כל n וקטורים בV הם בס"ל.

2) כל n וקטורים בת"ל הם בסיס.

3) כל n וקטורים פורשים הם בסיס.

4) כל קבוצה בת"ל ניתן להשלימה לבסיס.

הוכחה: 1) נתון שוט בסיס B בגודל n וקטורים. כיוון ש B פורשת בדיוק n וקטורים, לא יתכן $n+1$ וקטורים ת"ל לפי המשפט.

2) תהי A בת"ל בת n וקטורים, בשלילה אם A אינה בסיס אז A אינה בת"ל מקסימלית לכן נוכל להוסיף לה וקטור כך שנקבל קבוצה בת"ל בת $n+1$ וקטורים וזו סתירה ולכן היא בסיס.

3) תהי G קבוצה פורשת בת n וקטורים (צריך להראות פורשת מינימלית) אם היא לא פורשת מינימלית אפשר להוציא ממנה וקטור והיא עדיין תפרוש אם G אינה בסיס היא אינה פורשת מינימלית ולכן תוכל להוציא בם פלו אחד מאיבריה ולכן נקבל קבוצה בת"ל בת n וקטורים וזה סתירה לכן כל קבוצה פורשת = קבוצה בת"ל.

4) נניח $B=\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ בת"ל. אם $n=k$ אז B בסיס, אם $n>k$ אז B אינה בסיס ולכן B אינה בת"ל מקסימלית ולכן נוכל להוסיף לה וקטור ונקבל

$$B_1=\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}\}$$

אם $n=k+1$ ← B_1 בסיס

אם $n>k+1$ ← B_1 לא בסיס ולכן לא בת"ל מקסימלית לכן נוכל להוסיף ל B_1 וקטור כך $B_2=\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}\}$ ונמשיך כך עד שנקבל קבוצה בת"ל מקסימלית בת n איברים. ∎

משפט: יהי V מ"ו ו W, U תתי מרחב אז

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

בפרט אם $W+U$ הוא סכום ישר אז $\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)$

הוכחה סימון:

$\dim(U) = m$

$\dim(W) = n$

$\dim(U \cap W) = k$

$\dim(U+W) = m+n-k$ צ"ל

נבחר בסיס ל $U \cap W$

$v_1, v_2, \dots, v_k$

$v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+m}$ נשלים לבסיס ל U

$v_1, v_2, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ נשלים לבסיס ל W

$$B = \{ v_1, v_2, \dots, \underbrace{v_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_m}_{\text{משלים לבסיס ל } U}, \underbrace{w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n}_{\text{משלים לבסיס ל } W} \}$$

נסמן

כמה איברים ב B. $k + (m-k) + (n-k) = m+n-k$

אם נוכיח ש B בסיס סיימנו את ההוכחה.

שלם אי B פורש את $U+W$, איבר ב $U+W$ הוא מהצורה

שבו $u \in U$, ו $w \in W$ צירוף לינארי של איברי בסיס של U $= u = v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m$

$w =$ צירוף לינארי של איברי בסיס של W $= v_1, v_2, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$

צירוף לינארי של ה v_i-ים ה נשים $= U+W$

ו w-ים ונה צירוף לינארי של איברי B.

שלב ב'

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_m u_m = \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_n w_n$$

צ"ל

$\alpha_i = \beta_j = \gamma_r = 0$

$$(*) \quad \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_m u_m}_{u} = \underbrace{-\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots}_{w}$$

כן אבל נמצאים ב $U \cap W$

$w \in U \cap W$ $\quad \gamma_n w_n - \dots - \gamma_{k+1} w_{k+1} =$

צירוף לינארי של $v_1, v_2, \dots, v_k$ שהם בסיס ל $U \cap W$

$$-\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots - \gamma_n w_n = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \dots + \delta_k v_k$$

צירוף לינארי של איברי הבסיס בגלל שהוא בהיקון

$$\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_n w_n + \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \dots + \delta_k v_k = 0$$

איברי של בסיס ל W

מרחב שורות של מטריצה

משפט: D, C מטריצות מעל שדה כלשהו.

1. השורות של CD הם צירופים לינאריים של השורות של D.
2. העמודות של CD הם הם צירופים לינאריים של העמודות של C

הוכחה: 1

$C_{m\times n}, D_{n\times r}$

$C=(c_{ij})$ $D=d_{ij}$

שורה i של CD

$$\begin{pmatrix} c_{i1}, c_{i2} \dots c_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{1r} \\ d_{21} & d_{2r} \\ \vdots & \\ d_{n1} & d_{nr} \end{pmatrix}$$

$(c_{i1}d_{11}+c_{i2}d_{21}\dots c_{in}d_{n1}, \dots, c_{i1}d_{1r}+c_{i2}d_{2r}+\dots+c_{in}d_{nr})$

עמודה ראשונה עמודה אחרונה

$= (d_{11},d_{21},\dots,d_{n1})c_{i1} + \dots + (d_{1r},d_{2r},\dots,d_{nr})c_{in} = c_{i1}(d_{11},d_{21},\dots,d_{n1}) + c_{i2}(d_{12},d_{22},\dots,d_{n2}) + \dots + c_{in}(d_{1r},d_{2r},\dots,d_{nr})$

צירוף לינארי של השורות של D.

2 עמודות של CD = צירוף לינארי של עמודות של C

$(CD)^t = D^tC^t$

הגדרה: A מטריצה. המרחב הנפרש ע"י השורות של A נקרא מרחב השורות של A.

מרחב העמודות של A = מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה

משפט: למטריצות שקולות שורה יש אותו מרחב שורות.

הוכחה: A שקולה שורה ל B פירושו שיש מטריצה הפיכה P ש $B=PA$ לפי המשפט הקודם השורות של B (הן השורות של PA) הן צירופים לינאריים של השורות של A.

לכן גם צירופים לינאריים של שורות A הם צירופים לינאריים של שורות B לכן מרחב השורות מוכל במרחב השורות של A.

אבל $A=P^{-1}B$ ← שורות של A ← הם צירופים לינאריים של השורות של B ← מרחב שורות A מוכל במרחב שורות B לכן הם אותו מרחב שורות.

משפט: D, C מטריצות מעל שדה כלשהו.

1. השורות של CD הם צירופים לינאריים של השורות של D.
2. העמודות של CD הם הם צירופים לינאריים של העמודות של C

הוכחה: 1

$C_{m\times n}$, $D_{n\times r}$

$C=(c_{ij})$ $D=(d_{ij})$

שורה i של CD

$$\begin{pmatrix} c_{i1}, c_{i2} \dots c_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & & d_{1r} \\ d_{21} & & d_{2r} \\ \vdots & & \\ d_{n1} & & d_{nr} \end{pmatrix}$$

$(c_{i1}d_{11}+c_{i2}d_{21}+\dots c_{in}d_{n1}, \dots, c_{i1}d_{1r}+c_{i2}d_{2r}+\dots c_{in}d_{nr})$

עמודה הראשונה עמודה אחרונה

$= c_{i1}(d_{11},d_{21},\dots d_{n1}) + c_{i2}(d_{12},d_{22},\dots d_{n2}) + \dots + c_{in}(d_{1n},d_{2n},\dots d_{nn})$

צירוף לינארי של השורות של D.

2 עמודות של CD = $(CD)^t = D^t C^t$

צירוף לינארי של עמודות של C^t

הגדרה: A מטריצה המרחב הנפרש ע"י השורות של A (קרא) מרחב השורות של A.

מרחב העמודות של A = מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה

משפט: למטריצות שקולות שורה יש אותו מרחב שורות.

הוכחה: A שקולה שורות ל B פירושו שיש מטריצה הפיכה P ש $B=PA$ לפי המשפט הקודם השורות של B (הן השורות של PA) הן צירופים לינאריים של השורות של A.

לכן גם צירופים לינאריים של שורות A הם צירופים לינאריים של שורות B לכן מרחב השורות מוכל במרחב השורות של A.

אבל $A=P^{-1}B$ ← שורות של A ← הם צירופים לינאריים של השורות של B ← מרחב שורות A מוכל במרחב שורות B לכן הם אותו מרחב שורות.

משפט: מימד מרחב השורות של מטריצה הוא $r(A)$

הוכחה: $A \to \to \to$ מטריצה מדרגית $= d$

d יש בדיוק r שורות כלתי תלויות

נסמן ב $d_1, d_2, \dots, d_r$ ← השורות התלויות מאפס של d

$d_1, d_2, \dots, d_r$ בת"ל

מרחב השורות של A = מרחב השורות של d כל שורה של A היא

צירוף לינארי של $d_1, d_2, \dots, d_r$

לכן $d_1, d_2, \dots, d_r$ בת"ל ופורשת את מרחב השורות של d (ושל A).

$d_1, d_2, \dots, d_r$ בסיס למרחב השורות של A.

מימד מרחב השורות של A שווה ל $r(A) = r$

משפט: $r(A) = r(A^t)$ מימד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות.

הוכחה: תהא B מטריצה מדרגת r. ו r שורות

$s_1, s_2, \dots, s_r$ בת"ל כל שורה של B היא צירוף לינארי של $s_1 \dots s_r$

כל שורה של $B = B_{m \times n}$

$R_1, R_2, \dots, R_m$

$R_1 = \alpha_{11} s_1 + \alpha_{12} s_2 + \dots + \alpha_{1r} s_r$

$R_2 = \alpha_{21} s_1 + \alpha_{22} s_2 + \dots + \alpha_{2r} s_r$

$\vdots$

$R_m = \alpha_{m1} s_1 + \alpha_{m2} s_2 + \dots + \alpha_{mr} s_r$

סימון:

$s_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n})$

$s_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n})$

$\vdots$

$s_m = (s_{r1}, s_{r2}, \dots, s_{rn})$

הלמה הבסיסית

$(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) = \alpha_{11}(s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}) + \dots + \alpha_{1r}(s_{r1}, s_{r2}, \dots, s_{rn})$

$\vdots$

$(b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mn}) = \alpha_{m1}(s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}) + \dots + \alpha_{mr}(s_{r1}, s_{r2}, \dots, s_{rn})$

$$\begin{matrix} \text{יוצא} \\ b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} s_{11} + \alpha_{12} s_{21} + \dots + \alpha_{1r} s_{r1} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} s_{11} + \alpha_{m2} s_{21} + \dots + \alpha_{mr} s_{r1} \end{pmatrix}$$

$$s_{11}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+s_{21}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\dots+s_{n}\begin{pmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{mr}\end{pmatrix}=C_1$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_r$

$C_1 = v_1, v_2, \dots, v_r$ בלתי תלויים לינארי

המשוואה המצומצמת של B

$$\begin{pmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{m2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}s_{12}+a_{12}s_{12}+\dots+a_{1r}s_{r2}\\\vdots\\a_{m1}s_{12}+a_{m2}s_{22}+\dots+a_{mr}s_{r2}\end{pmatrix}$$

$$s_{12}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+s_{22}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\dots+s_{n}\begin{pmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{mr}\end{pmatrix}$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_r$

$C_2 = (v_1, v_2 \dots v_n)$ בלתי תלויים לינארי

בעזרתו אנחנו יכולים לראות שמערכת B היא בלתי תלויים לינארי $(v_1, v_2 \dots v_r)$

$\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ פורשת את מרחב העמודות של B.

מימד מרחב העמודות $\geq r$.

$$r = r(B) \geq r(B^t)$$

$$r(A) \geq r(A^t) \leftarrow B=A$$

$$r(A^t) \geq r(A) \leftarrow r(A^t) \geq r(A^{tt}) \leftarrow B=A^t$$

לכן $r(A) = r(A^t)$

מסקנה: A, B מטריצות $m\times n$, $n\times k$ אזי

1. $r(AB) \leq r(B)$
2. $r(AB) \leq r(A)$
3. אם A הפיכה אז $r(AB)=r(B)$
   אם B הפיכה אז $r(AB)=r(A)$

הוכחה: 1 ראינו שהשורות של AB כן צירופים לינאריים של מרחב השורות של B ⇐ מרחב השורות של AB

לכן מימד מרחב שורות של $AB \geq$ מימד מרחב השורות של B

$$r(B) \geq r(AB)$$

משפט: V מרחב וקטורי. אם מספר ~~האברים~~ האברים בקבוצה פורשת גדול יותר ממספר האברים בקבוצה בלתי תלויה לינארית

פורשת > בלתי תלויה

"הוכחה" - נניח ש

קבוצה פורשת $\{v_1, v_2, v_3\}$

קבוצה בלתי תלויה $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

רוצים להראות לסתירה

w_1 הוא צ.ל. של v_1, v_2, v_3 והקבוצה הפורשת

$$\text{קבוצה פורשת ותלויה} = \{w_1, v_1, v_2, v_3\}$$

אם יש קבוצה תלויה אז יש מקום אחד שהוא פירוש לינארי של קודמיו.

ברור שזה לא w_1. נניח ש v_2 הוא פירוש לינארי של שני ה vים האחרים

ולכן גם כן קבוצה פורשת $\{w_1, v_1, v_3\}$

פורשת ותלויה: $\{w_2, w_1, v_1, v_3\}$

בלתי תלויה אותם בגלל כי הם היו בקבוצה בלתי תלויה

אבל יש איבר שהוא פירוש לינארי של קודמיו וזה לא w_1, w_2

נניח שזה v_3

פורשת $\{w_2, w_1, v_1\}$

פורשת ותלויה - $\{w_3, w_2, w_1, \cancel{v_1}\}$

$\{w_3, w_2, w_1\}$

פורשת.

ולכן w_4 הוא צ.ל. של $\{w_1, w_2, w_3\}$

בנוסף לכך שזה שניים הם בלתי תלויה

טרנספורמציות לינאריות

הגדרה: V, W שני מ"ו מעל שדה F פונקציה $T: V \to W$

נקראת טרנספורמציה לינארית אם.

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

$+$ ב מרחב V $\quad$ $+$ ב מרחב W

לכל $v_1, v_2 \in V$

2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ $\quad$ $v \in V$

משפט: $T: V \to W$ ט"ל אז:

1. $T(0) = 0$
2. $T(-v) = -T(v)$

הוכחה: 1 $\quad$ $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ $\quad$ תחת הנחה ש ט"ל

נציב $\alpha = 0$ $\leftarrow$

$T(0v) = 0\,T(v)$

$T(0) = 0$

2 $\quad$ $\alpha = -1$ $\quad$ $T(-v) = -T(v)$.

הגדרה: A מטריצה מגודל $m \times n$ מעל F.

$T: F^n \to F^m$ ט"ל $\quad$ $T(v) = Av$

אז T ט"ל

$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 \implies T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

$A(\alpha v) = \alpha A v \qquad T(\alpha v) = \alpha T(v)$

הגדרה: $T: V \to W$ ט"ל הגרעין של T $\ker(T)$

מוגדר כ $\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$

כל האיברים שאם אתה שולח לפה ד אתה מקבל את איבר האפס

התמונה של T (קבוצה חלקית של W) $\quad$ $Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$

משפט: נתונה ט"ל $T: V \to W$ אז.

1. $\ker(T)$ תת מרחב של V.
2. $Im(T)$ תת מרחב של W.
3. T הוא על $\iff$ $Im(T) = W$.
4. T הוא חח"ע $\iff$ $\ker(T) = \{0\}$.
5. אם $v_1, v_2, \dots, v_k$ מרחיב את V אז $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)$ פורשים את $Im(T)$.

הוכחה: 1 לא ריקה. $0\in\ker(T) \Rightarrow \ker(T)\neq\emptyset$

• חיבור $v_1,v_2\in\ker(T)$, נרצה ל $v_1+v_2\in\ker(T)$

נתון: $T(v_1)=T(v_2)=0$

צ"ל $T(v_1+v_2)=0$

ואכן $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)=0+0=0$

• כפל בסקלר $v\in\ker(T)$, α סקלר נרצה $\alpha v\in\ker(T)$

נתון $T(v)=0$, צ"ל $T(\alpha v)=0$, ואכן $T(\alpha v)=\alpha T(v)=\alpha\cdot 0=0$

סקלר כפול איבר האפס
ל מטריצה = 0

2 לא ריקה: $0\in Im(T)$ כי $0=T(0)$ לכן $Im(T)\neq\emptyset$.

חיבור $T(v_1),T(v_2)\in Im(T)$

צ"ל $T(v_1)+T(v_2)\in Im(T)$

ואכן $T(v_1)+T(v_2)=T(v_1+v_2)\in Im(T)$

כפל בסקלר $T(v)\in Im(T)$ צ"ל $\alpha T(v)\in Im(T)$ (α סקלר)

ואכן $\alpha T(v)=T(\alpha v)\in Im(T)$.

3 הוכחה על עצמו.

4 $\Leftarrow$ נניח T חח"ע ונרצה ל $\ker(T)=\{0\}$, ניקח v כלשהו מהגרעין

$T(v)=0=T(0)$

כיוון ל T חח"ע $v=0$.

$\Rightarrow$ נניח $\ker(T)=\{0\}$ ונרצה ל T חח"ע.

ניקח $T(v_1)=T(v_2)$ ונרצה $v_1=v_2$

$T(v_1)-T(v_2)=0 \longrightarrow T(v_1)+T(-v_2)\longrightarrow T(v_1-v_2)=0$ הוכרת אופרטור

הלינאריות מאפשרת

$v_1-v_2\in\ker(T)=\{0\}$

לכן $v_1=v_2$.

5 נתון $v_1,v_2,\dots,v_k$ פורשת את v ניקח $T(v)\in Im(T)$

צ"ל ל $T(v)$ יש פירוק לינארי ל $T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_k)$

$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_kv_k$ כל איבר ב V הוא צ"ל ל $v_1\dots v_k$

$T(v)=T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_kv_k)=$ (בגלל T מתנהגת כטרנספורמציה)

$T(\alpha_1v_1)+T(\alpha_2v_2)+\dots+T(\alpha_kv_k)=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)\dots\alpha_kT(v_k)$

$T^{-1}(\alpha v) = \alpha T^{-1}(v)$

$T^{-1}(v) = w \iff T(w) = v$

$\alpha v = \alpha T(w) = T(\alpha w)$

$T^{-1}(\alpha v) = \alpha w = \alpha T^{-1}(v)$. הוכחה ב

משפט: אם $T: V \to V$ ל"ל אז התנאים הבאים שקולים.

1. חח"ע
2. על
3. T הפיכה.

(אין הוכחה כרגע)

וקטור עצמי מקור אינטואיציה ע"י מטריצות

באופן כללי $T: V \to W$ ל"ל נבחר בסיס e עבור V ו f עבור W מתקיים $v \in V$ מטריצה (?)

$$(?)\begin{pmatrix} \text{קואורדינטות} \\ v \text{ של} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{קואורדינטות} \\ T(v) \text{ של} \end{pmatrix} = (?)[v]_e = [T(v)]_f$$

ראינו באופן מתמטי $T: V \to W$

$e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ בסיס ל V

$f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ בסיס ל W

$M[v]_e = [T(v)]_f$ M מתקיים מטריצה

אלגוריתם

$T(e_1) = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1m}f_m$

$T(e_2) = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{2m}f_m$

$\vdots$

$T(e_n) = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nm}f_m$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^t = [T]_e^f$$

המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיסים e, f.

משפט: $T: V \to W$ e בסיס ל V, f בסיס ל W אז

$$[T]_e^f [v]_e = [T(v)]_f$$

(מטריצה) מכפיל (קואורדינטות) של המקדמות שלו — קואורדינטות אחרי הצגה

משפט הממדים: יהי $T: V \to W$

אז $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$

הוכחה: נסמן $n = \dim(V)$ $\quad k = \dim(\ker(T))$

צ"ל: $\dim(\operatorname{Im}(T)) = n-k$

נבחר $v_1, v_2, \dots, v_k$ בסיס לגרעין נשלים אותו לבסיס

של V $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ בסיס של V.

לכן $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k), T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)$ פורשת את התמונה

0 כי $v_1, v_2, \dots, v_k$ בגרעין

לכן $B = \{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), \dots, T(v_k)\}$

פורשת את $\operatorname{Im}(T)$.

בגלל ש B יש $n-k$ איברים אם נוכיח ש B בת"ל

אז B תהיה בסיס של $\operatorname{Im}(T)$, ואז מתקיים התמונה יהיה $n-k$.

נוכיח ש B בת"ל

$$\alpha_{k+1} T(v_{k+1}) + \alpha_{k+2} T(v_{k+2}) + \dots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

צ"ל $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$

תכונות של ט. הנסמן לינאריות

$$T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) + T(\alpha_{k+2} v_{k+2}) + \dots + T(\alpha_n v_n) = 0$$

$$T(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n \in \ker(T)$$

$\Downarrow$

נפרש לפי $v_1, v_2, \dots, v_k$

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

נמצאים בגרעין $\quad$ בסיס לגרעין

$$\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ בסיס של V, לכן כל $\alpha_i = 0$

הגדרה: $\dim(Im(T)) = rank(T) \rightarrow$ דרגת T של

משפט: תהא A מטריצה מעל שדה F נגדיר

$T: F^n \to F^m$

ע"י $T(v) = Av$

אז: 1) $Im(T)$ הוא מרחב העמודות של A.

2) $r(T) = r(A)$

הוכחה: 1

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

פורשים את F^n

לכן $T(e_1), T(e_2), \dots T(e_n)$ פורשים את התמונה.

$T(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

$T(e_n) = A \cdot e_n \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

לכן $T(e_1), T(e_2) \dots T(e_n)$ נפרשת ע"י העמודות של A.

הן העמודות של A, $Im(T)$

2 מרחב העמודות $= Im(T)$.

מימד מרחב העמודות $= Im(T)$

מימד מרחב השורות

$\boxed{r(T) = r(A)}$

הערה: $T: V \to W$ $T(v) = 0$ נקראת הגרעין של T והיא תת מרחב של V.

משפט: V, W מ"ו מעל אותו שדה יהא $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס ל V ! $A = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ קבוצה כלשהי של W.

נגדיר: $T: V \to W$

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$

1 אז T ח"ל.

2 אם A בס' קטיס אז T היא חח"ע ועל

3 T הוא ה"ל המוגדר על המקרים $T(v_1)=w_1$, $T(v_2)=w_2$, ..., $T(v_n)=w_n$

הוכחה 1

$T[(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n)+(\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\dots+\beta_n v_n)]=$

מימין

$T[(\alpha_1+\beta_1)v_1+(\alpha_2+\beta_2)v_2+\dots+(\alpha_n+\beta_n)v_n]=$

$(\alpha_1+\beta_1)w_1+(\alpha_2+\beta_2)w_2+\dots+(\alpha_n+\beta_n)w_n=$

$(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_n w_n)+(\beta_1 w_1+\beta_2 w_2+\dots+\beta_n w_n)$

$\downarrow$

$T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n)+T(\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\dots+\beta_n v_n)$

$T(\alpha(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n))=T(\alpha\alpha_1 v_1+\alpha\alpha_2 v_2+\dots+\alpha\alpha_n v_n)=$ כפל בסקלר

$\alpha\alpha_1 w_1+\alpha\alpha_2 w_2+\dots+\alpha\alpha_n w_n=\alpha(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_n w_n)=$

$\alpha T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n)$

2 נניח ש A בסיס. יהי $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n\in Ker(T)$

ונראה ש $v=0$ כלומר ש T חח"ע.

$T(v)=0=T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n)=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_n w_n=0$

A בסיס לכן $w_1, w_2, \dots, w_n$ בת"ל

לכן $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n=0$

מהגדרת α

לכן T חח"ע.

נראה ש T על.

בל איבר ב W נראה כך $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_n w_n$

כי A בסיס.

$\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_n w_n=T(?)$

$?=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n$

3 נתון

$T: V \to W$

$T(v_1) = w_1$

$T(v_2) = w_2$

$\vdots$

$T(v_n) = w_n$

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + \dots + T(\alpha_n v_n) =$

$\alpha_1 T_1(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$

נת ההגדרה ע"י ליניאריות ו ע"י טרנסלציה מאוחדת ותוקפה שלושה נאמר.

משפט 1 יהיו V, W שני מ"ו מאותו מימד מעל אותו שדה.

תהא $T: V \to W$ ל"ל.

אז התנאים הבאים שקולים.

1) T חח"ע

2) T על.

הוכחה: משפט המימדים אומר לנו $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(Im(T))$

$\downarrow$ $\dim(W)$ נתון

T חח"ע $\iff \ker(T) = \{0\} \iff \dim(\ker(T)) = 0$

$\iff \dim(Im(T)) = \dim(V) = \dim W$

$\iff W = Im(T)$ על.

$\left(\begin{array}{l} Im(T) \subseteq W \\ Im(T) = W \end{array} \right)$

הגדרה: V, W שני מ"ו מעל אותו שדה. אז V, W נקראים איזומורפיים אם ו"ל $T: V \to W$ ל"ל הינו חח"ע ועל.

סימון: $V \cong W$.

משפט: V, W שני מ"ו מעל שדה F. אז $V \cong W \iff \dim(V) = \dim(W)$

הוכחה: נניח ש $\dim(V) = \dim(W)$, נבחר בסיסים $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

ונקבע $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

לפי המשפט שראינו T חח"ע ועל ו ל"ל ולכן $V \cong W$.

נניח $V \cong W$ ונראה $\dim(V) = \dim(W)$, נבחר בסיס $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ל V, פיוון ש $V \cong W$ יש $T: V \to W$ ל"ל חח"ע ועל.

נסמן $A = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$

כיוון ש T חח"ע יש ב A, n איברים.

נראה ש A הינו בסיס ל W ואז $\dim(W) = n = \dim(V)$

אז B פורשת את V. לכן A (ה T של האיברים ל B) פורשת את התמונה של T $(Im\, T) = W$ כי T על.

3 נרכן A פורשת את W.

A בת"ל - $\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)+\dots+\alpha_n T(v_n)=0$

ת"ל $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

$T(\alpha_1 v_1)+T(\alpha_2 v_2)+\dots+T(\alpha_n v_n)=0$

$T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n)=0$

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n \in \ker(T)$ ל"ס { ל"ס

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n=0$

נתון כי וקטורי הבסיס בלתי תלויים, ולכן כל המקדמים שווים לאפס ($\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$)

הגדרה: חיבור ת"ל $T,S: V\to W$ שתי ת"ל נגדיר $T+S: V\to W$

$(T+S)(v)=T(v)+S(v)$

כפל בסקלר $\alpha T: V\to W$

$(\alpha T)(v)=\alpha T(v)$

כפל ת"ל V,V,W מ"ו מעל שדה F.

T,S ת"ל $V\xrightarrow{S}U\xrightarrow{T}W$

נגדיר $TS: V\to W$

הרכבה של פונקציות $(TS)(w)=T(S(v))$

הגדרה: V מ"ו הפונקציה $I: V\to V$ שמוגדרת על ידי $I(v)=v$ היא ת"ל, היא נקראת טרנספורמציית הזהות.

אם $T: V\to V$ ת"ל תח"ל ועל קיימת פונקציה הפוכה T^{-1} $T^{-1}: V\to V$ כלומר $T\cdot T^{-1}=T^{-1}\cdot T=I$.

הגדרה: T^{-1} היא ת"ל.

ת"ל

1. $T^{-1}(v_1+v_2)=T^{-1}(v_1)+T^{-1}(v_2)$
2. $T^{-1}(\alpha v)=\alpha T^{-1}(v)$

הוכחה: $w_1=T^{-1}(v_1)$, $w_2=T^{-1}(v_2)$ { תכונות של פונקציה הפוכה

$v_1=T(w_1)$, $v_2=T(w_2)$

$v_1+v_2=T(w_1)+T(w_2)=T(w_1+w_2)$

$T^{-1}(v_1+v_2)=w_1+w_2=T^{-1}(v_1)+T^{-1}(v_2)$

מלק אד

הוכחה:

$v \in V$

$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$

$$[v]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$[T]_e^f [v]_e$ (לפי הגדרה 13)

$$[T]_e^f [v]_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_n a_{n1} \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{n2} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{1m} + \alpha_2 a_{2m} + \dots + \alpha_n a_{nm} \end{pmatrix}$$

$[T(v)]_f$ (לפי הגדרה 13)

$T(v) = T(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2) + \dots + \alpha_n T(e_n) =$

$\alpha_1 (a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + \dots + a_{1m} f_m)$

$\alpha_2 (a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + \dots + a_{2m} f_m) +$

$\vdots$

$\alpha_n (a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + \dots + a_{nm} f_m)$

$$[T(v)]_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_n a_{n1} \\ \alpha_2 a_{12} + \alpha_2 a_{22} \dots + \alpha_n a_{n2} \\ \vdots \\ \alpha_m a_{1m} + \alpha_2 a_{2m} \dots + \alpha_n a_{nm} \end{pmatrix} = [T]_e^f [v]_e$$

משפט: V מ"ו B בסיס אז: 1. $[v_1+v_2]_B=[v_1]_B+[v_2]_B$

2. $[\alpha v]_B=\alpha[v]_B$

(הנורמה היא $v\to[v]_B$ היא טרנספורמציה לינארית).

הוכחה:

$B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$

$v_1=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$

$v_2=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\dots+\beta_nu_n$

$$[v_1]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\qquad [v_2]_B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

$$[v_1]_B+[v_2]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

$v_1+v_2=(\alpha_1+\beta_1)u_1+(\alpha_2+\beta_2)u_2+\dots+(\alpha_n+\beta_n)u_n$

$$[v_1+v_2]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

הוכחנו אם 1

$\alpha v=?$

$v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n$

$\alpha v=\alpha\alpha_1u_1+\dots+\alpha\alpha_nu_n$

$$[\alpha v]_B=\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1\\ \alpha\alpha_2\\ \vdots\\ \alpha\alpha_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\alpha[v]_B$$

הוכחנו אם 2

משפט: $T,S:V\to W$ ל"ו, e בסיס ל V, f בסיס ל W. אזי: 1. $[T+S]_e^f=[T]_e^f+[S]_e^f$

2. $[\alpha T]_e^f=\alpha[T]_e^f$

הוכחה: נבחר v שרירותי ונרשום

$$[T+S]_e^f[v]_e=\left([T]_e^f+[S]_e^f\right)[v]_e$$

$[T+S]_e^f [v]_e = [(T+S)(v)]_f =$ ← לפי מטריצה שבורחנו קודם

$[T(v)+S(v)]_f = [T(v)]_f + [S(v)]_f = [T]_e^f [v]_e + [S]_e^f [v]_e =$

$([T]_e^f + [S]_e^f)[v]_e$

הורחנו את 1

2 נרוים

$[\alpha T]_e^f [v]_e = \alpha [T]_e^f [v]_e$

$[\alpha T]_e^f = [(\alpha T)(v)]_f = [\alpha T(v)]_f = \alpha [T(v)]_f =$

$\alpha [T]_e^f \cdot [v]_e$

משפט 1 מ"ו מעל אותו שדה V, U, W

$V \xrightarrow{S} U \xrightarrow{T} W$

נתבונן בבסיס e עבור V, f עבור U, g עבור W.

אזי $[TS]_e^g = [T]_f^g [S]_e^f$

הוכחה: נרוים ל $[TS]_e^g [v]_e = [T]_f^g [S]_e^f [v]_e$

$[TS]_e^g [v]_e = [(TS)(v)]_g = [T(S(v))]_g = [T]_f^g [S(v)]_f =$

$[T]_f^g [S]_e^f [v]_e$

הורחנו

השתמשנו בכך הנמן בנוסקה

$[T]_e^f [v]_e = [T(v)]_f$

משפט: $I: V \to V$ הוא.

e בסיס ל V אז $[I]_e = I$

הוכחה:

$I(e_1) = e_1 \qquad e = \{e_1, e_2 .. e_n\}$

$I(e_2) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n$

$\vdots$

$I(e_n) = e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_n$

$$[I]_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 \end{pmatrix}^t = I$$

מסקנה! $T: V \to V$ הפיכה e בסיס ל V.

אז גם $[T]_e$ הפיכה ! $[T^{-1}] = ([T]_e)^{-1}$

הוכחה!

$$T \cdot T^{-1} = I$$

$$[T \cdot T^{-1}]_e = [I]_e = I$$

$$\downarrow$$

$$[T]_e \cdot [T^{-1}]_e = I \implies$$

ב מטריצות שמכפלת I אז יותר היא הפיכה של הטנייה

שינוי בסיסים

V מ"ו e, f שני בסיסים

$$e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

$$f_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \dots a_{1n} e_n$$

$$f_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + \dots a_{2n} e_n$$

$$\vdots$$

$$f_n = a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \dots a_{nn} e_n$$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^t$$

מטריצת המעבר מ e ל f

(תבוך מתה מאוטום בבוא)

משפט! V מ"ו e, f שני בסיסים ל V, P מטריצת המעבר מ e ל f.

אז. 1. $P[V]_f = [V]_e$

2. P הפיכה ! $P^{-1}[V]_e = [V]_f$

הוכחה! 1

$$I(f_1) = f_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \dots + a_{1n} e_n$$

$$I(f_2) = f_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{2n} e_n$$

$$\vdots$$

$$I(f_n) = f_n = a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \dots + a_{nn} e_n$$

$$P = [I]_f^e \implies P[V]_f = [I]_f^e [V]_f = [I(v)]_e = [V]_e$$

2. נסמן Q את מטריצת המעבר מ f ל e

$$Q[V]_e = [V]_f$$

"ג"ל $Q = P^{-1}$

$$pq[v]_e = p[v]_f = [v]_e$$

$$\downarrow$$

$$pq[v]_e = I \cdot [v]_e \qquad v \in V$$

$$\boxed{pq = I}$$

$\blacksquare$