

חלק א'

ענה על כל השאלות. ערך כל חלק 5 נק'. על ניחוש לא נכון לשאלה כן / לא תופחת נק' אחת .

1. נתונה המערכת הבאה מעל $\mathbb{R}$.

$$x_1 + a^2 x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + a^2 x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + (2a^2 - a^4)x_3 = 1 + a$$

(א) אין למערכת פתרון עבור $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(ב) יש למערכת יותר מפתרון אחד עבור $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. נתונה מערכת משוואות $A\vec{x} = \vec{0}$ כאשר A היא מטריצה עם רכיבים משדה F , ועם 7 עמודות. $r(A) = 5$.

(א) מימד מרחב הפתרונות של המערכת הוא $\underline{\hspace{2cm}}$.

(ב) אם $F = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ אזי מס' הפתרונות למערכת הוא $\underline{\hspace{2cm}}$.

$$3. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} i & 3 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

(א) מצא את A^{-1} .

(ב) בעזרת A^{-1} פתור את מערכת המשוואות $A\vec{x} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$4. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$$

(א) מצא בסיס עבור מרחב השורות של A . $\underline{\hspace{4cm}}$.

(ב) רשום את כל הפתרונות של המערכת $A\vec{x} = \vec{0}$. $\underline{\hspace{4cm}}$.

5. $U = \{a + bx + (a+b)x^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$, $W = \{ax + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{R}[x]$ הם תת-מרחבים של

(א) $\underline{\hspace{2cm}} = \dim(U + W)$

(ב) $\underline{\hspace{2cm}} = \dim(U \cap W)$

6. יהיו

$$B = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}, B' = \{v'_1 = (1, 0, 1), v'_2 = (2, -1, 2), v'_3 = (1, 1, 0)\}$$

שני בסיסים עבור $\mathbb{R}^3$.

(א) מצא את מטריצת המעבר $M_{B'}^B$ מ- B ל- B' . $M_{B'}^B$ מסומן גם $M_{B' \rightarrow B}$.

(ב) יהי $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, מצא וקטור הקואורדינטות $[v]_{B'}$ בעזרת חלק א).

חלק ב'

ענה על שתי השאלות. ערך כל שאלה 20 נק'.

1. המשפט הבא הוא נתון: אם $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ היא קבוצה פורשת עבור מרחב וקטורי V ואם $C = \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq V$ כאשר $m > n$, אזי C היא קבוצה תלויה ליניארית. הוכח בעזרת משפט זה כי לכל מטריצה A , מימד מרחב השורות של A שווה למימד מרחב העמודות של A .

2. תהי $A \in M_{m \times n}(F)$ ויהי $\vec{b} \in F^m$. תהי A' המטריצה המתקבלת מ- A ע"י הוספת $\vec{b}$ כעמוד אחרון, עמוד מס' $n+1$. הוכח כי קיים פתרון למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ אם ורק אם $r(A') = r(A)$, ז"א קיים פתרון אם ורק אם דרגת מטריצה המורחבת שווה לדרגת מטריצת המקדמים.

בהצלחה!