

חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132-07)

מרצה: ד"ר שמחה הורוביץ

תשע"א סמסטר א'

מבחן מסכם, מועד א'

יש לענות על כל השאלות. יש לנמק באופן מלא את כל הטענות שלך. משך הבחינה: שעתיים. ערך כל שאלה: 18 נקודות.

1. הוכח או הפרך: הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת אם ורק אם לכל תת-סדרה $\{a_{n_k}\}$ יש תת-סדרה מתכנסת.

2. תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות על כל הישר. נניח שכל אחת מהן חד-חד-ערכית. נניח שהערכים של $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ בנקודות מסוימות הם כדלקמן:

x	1	2	7
$f(x)$	7	4	2
$f'(x)$	-3	-2	-1
$g(x)$	-2	0	7
$g'(x)$	2	2	7

חשב את הקירוב הליניארי לפונקציה $f^{-1} \circ g^{-1}$ בנקודה $x_0 = 2$.

3. תהי $g(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בקטע $(0, 1)$. נניח שקיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $g(x) > \varepsilon$ לכל $x \in (0, 1)$. הוכח שהפונקציה $\frac{1}{g}$ רציפה במ"ש בקטע $(0, 1)$.

4. זהה וסווג את נקודות אי-הרציפות של הפונקציות הבאות:

(א) e^{-1/x^3}

(ב) $\frac{\sin x^2}{|\sin x^2|}$

(ג) כאשר $f'(x) = |x^2 - 1|$.

5. בדוק את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים הבאים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n^3}}{(n!)^n}$

(ב) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{n}}{(\ln n)^2}$

(ג) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^n}{\binom{2n}{n}}$

6. תהי $f(x)$ פונקציה בעלת חמש נגזרות רציפות על $\mathbb{R}$. נניח ש-

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(4)}(0) = 0$$

וגם $f^{(5)}(0) > 0$. עוד נניח שלכל $x \neq 0$ מתקיים $f'(x) \neq 0$. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים $f(x) > 0$.

88-132 סמסטר א' תשעא/ פתרון מועד א'

תוכן עניינים

- 1 המבחן של פרופ' זלצמן
 - 1.1 שאלה 1
 - 1.1.1 הפרכה
 - 1.2 שאלה 2
 - 1.2.1 א
 - 1.2.2 ב
 - 1.2.3 ג
 - 1.3 שאלה 4
 - 1.3.1 א
 - 1.3.2 ב
 - 1.3.3 ג
 - 1.4 שאלה 5
 - 1.4.1 א
 - 1.4.2 ב
 - 1.4.3 ג
 - 1.5 שאלה 7
 - 2 המבחן של דר' שמחה הורוביץ
 - 2.1 שאלה 3
 - 2.1.1 הוכחה
 - 2.2 שאלה 6
 - 2.2.1 הוכחה

המבחן של פרופ' זלצמן

שאלה 1

הוכח/הפוך: הסדרה a_n מתכנסת אם"ם לכל תת-סדרה a_{n_k} יש-תת סדרה מתכנסת.

הפרכה

כל סדרה חסומה שאינה מתכנסת מהווה דוגמא נגדית, מכיון שכל תת-סדרה חסומה גם היא ולפי משפט בולצאנו-ויירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת. (למשל $a_n = (-1)^n$)

שאלה 2

בדוק התכנסות של הטורים הבאים:

א

$$\sum (-1)^n \frac{2^{n^3}}{(n!)^n}$$

נבדוק התכנסות בהחלט, נפעיל מבחן קושי, לקבלת:

$$b_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2^{n^2}}{n!}$$

קל לראות ש- $\infty \rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ולכן $\infty \rightarrow b_n$. לכן $|a_n| \rightarrow \infty$ ולכן הטור **מתבדר לחלוטין**.

ב

$$\sum (-1)^n \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\log^2(n)}$$

נבדוק התכנסות בהחלט. קל לראות ש-

$$\frac{\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\log^2(n)}}{\frac{1}{n\cdot\log^2(n)}} \rightarrow 1$$

ולכן הטורים חברים. נוכיח שהשני מתכנס בעזרת מבחן העיבוי (מותר כי זו סדרה מונוטונית יורדת ל- 0):

$$\frac{2^n}{2^n \cdot \log^2(2^n)} = \frac{1}{n^2 \cdot \log^2(2)}$$

זה קבוע כפול טור שידוע כמתכנס, לכן סה"כ הטור **מתכנס בהחלט**.

ג

$$\sum (-1)^n \frac{\pi^n}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \pi \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{\pi}{4} < 1 \text{ לקבל דלאמבר מבחן נפעיל את מבחן דלאמבר לקבל } \frac{\pi}{4} < 1$$

ולכן הטור **מתכנס בהחלט**.

שאלה 4

זהה וסווג את נקודות אי-הרציפות.

א

$$e^{-\frac{1}{x^3}}$$

נקודת אי-הרציפות היא 0 . הגבול משמאל הנו ∞ ולכן זה **מין שני**.

ב

$$\frac{\sin(x^2)}{|\sin(x^2)|}$$

כמו שלמדנו, הפונקציה הזו מקבלת 1 כאשר $\sin(x^2)$ חיובי, ו-1 כאשר הוא שלילי, ב- 0 היא לא-מוגדרת ולכן זו נקודת אי-רציפות. לכן סה"כ נקודות אי-הרציפות הנן $\pm\sqrt{\pi k}$ כאשר $k \geq 0$. פרט ל- 0 , הן כולן **מין ראשון** מכיון שמצד אחד הסינוס שלילי, ומהצד השני חיובי (מימין לנקודת אי-הרציפות או משמאלה).

ב- 0, אנחנו מתקרבים אליו רק מהצד החיובי שם הסינוס חיובי ולכן הוא נקודת אי-רציפות **סליקה**.

ג

$$f'(x) = |x^2 - 1| \text{ כאשר } f(x) = |x^2 - 1|$$

נחלק לתחומים. בתחום $x < -1$, $x > 1$ מתקיים $f(x) = x^2 - 1$ ולכן $f'(x) = 2x$.

בתחום $-1 < x < 1$ מתקיים $f(x) = 1 - x^2$ ולכן $f'(x) = -2x$.

קל איפוא לראות שבנקודות ± 1 יש אי-רציפות ממין ראשון (שם הנגזרת מתקרבת ל-2 מצד אחד ו-2- מצד שני).

שאלה 5

אילו מהפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים המסומנים?

א

$x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ בתחום $(0, \infty)$.

קל לראות שהפונקציה רציפה בקטע, נבדוק גבולות בקצות הקטע:

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ אפס כפול חסומה

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0$

שני הגבולות סופיים ולכן הפונקציה **רציפה במ"ש**.

ב

$\frac{1}{1 + \ln(x)}$ בתחום $(0, \infty)$.

קל לראות שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה e^{-1} שנמצאת בתחום ולכן **אינה רציפה במ"ש** שם.

ג

$\sqrt{|\cos(\pi x)|}$ בתחום $(-\infty, \infty)$.

זו הרכבה של פונקציה רציפות במ"ש: $\cos(x)$, $|x|$, $\sqrt{x}$ ולכן **רציפה במ"ש** בתחום.

שאלה 7

חשב את הקירוב הלינארי של $f^{-1} \circ g^{-1}$ ב- $x_0 = 2$.

הקירוב הלינארי של $h(x)$ באזור הנקודה x_0 , הנו $h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$

במקרה שלנו $= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(f^{-1}(2)))} = \left[\frac{d}{dx} f^{-1}(2)\right] \cdot \left[\frac{d}{dx} g^{-1}\left(f^{-1}(2)\right)\right] = (g^{-1} \circ f^{-1})'(2) = h'(2)$

ולכן סה"כ $h(x) = 7 - \frac{x-2}{7}$

המבחן של דר' שמחה הורוביץ

שאלה 3

תהי g פונקציה רציפה במ"ש בקטע $(0, 1)$. נניח שקיים $\epsilon > 0$ כך שמתקיים $g(x) > \epsilon$ לכל $x \in (0, 1)$. הוכח שהפונקציה $\frac{1}{g}$ רציפה במ"ש בקטע $(0, 1)$.

הוכחה

לפי הנתון, לכל $\alpha > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|g(x_1) - g(x_2)| < \alpha \cdot \epsilon^2$.

לכן, מתקיים $\alpha = \frac{\alpha \cdot \epsilon^2}{\epsilon^2} < \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{g(x_1) \cdot g(x_2)} \right| = \left| \frac{1}{g(x_1)} - \frac{1}{g(x_2)} \right|$

כפי שרצינו. ■

שאלה 6

תהי f פונקציה בעלת חמש נגזרות רציפות על הממשיים. נניח ש- $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(4)}(0) = 0$ וגם $f^{(5)}(0) > 0$. עוד נניח שלכל $x \neq 0$ מתקיים $f'(x) \neq 0$. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים $f(x) > 0$.

הוכחה

מכיון שהפונקציה f נגזרתיה מתאפסות באפס, פולינום טיילור מסדר 4 בסביבת הנקודה 0 שווה זהותית ל- 0 . השארית היא מהצורה $\frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5$ כאשר $0 < c < x$.

מכיון ש- $f^{(5)}(0) > 0$ והנגזרת החמישית רציפה, אז קיימת סביבה של 0 בה $f^{(5)} > 0$. לכן בסביבה ימנית של 0 מתקיים $\frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5 > 0$. $f(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5$

נותר להוכיח ש- $f(x) > 0$ עבור $x > 0$ גם מחוץ לסביבה הימנית הזו. נניח בשלילה ש- $f(x) \leq 0$ אזי לפי משפט ערך הביניים $f(x) = 0$ עבור איזה $x > 0$. אבל גם $f(0) = 0$ ולכן לפי משפט רול הנגזרת מתאפסת עבור נקודה גדולה מ- 0 בסתירה.