

שאלון בחינה בקורס: חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132)
 שם המרצה: ד"ר ראובן כהן, ד"ר שחר נבו
 סמסטר א', מועד ב': א' באייר תש"ע (15.4.2010)
 משך הבחינה: שעה אחת וחצי.
ללא חומר עזר מלבד דף נוסחאות מצורף.
 ענה על 6 מתוך 8 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.

1. א. הגדר חסם מלעיל של קבוצה A . מהי תכונתו של חסם עליון $(\sup A)$?
 ב. תהיינה A, B קבוצות ב- $\mathbb{R}$ כך שלכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ מתקיים $a \leq b$.
 הראה כי $\sup A \leq \inf B$.
2. לכל n טבעי נגדיר $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n}$. הראה כי $\{a_n\}_1^\infty$ מתכנסת וכי גבולה a
 מקיים $\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$.
3. א. נסח קריטריון קושי להתכנסות סדרות.
 ב. נגדיר $a_1 = 1$ ולכל $n > 1$ נגדיר אם n מתחלק ב-3.

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + \frac{1}{n^2} \\ a_{n-1} - \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

 הראה כי אחרת $\{a_n\}_1^\infty$ מתכנסת.
4. א. חשב סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(2n-1)}$.
 ב. הראה כי עבור $0 < \alpha < 1$ מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\sqrt{n}}$.
 רמז: קריטריון העיבוי.
5. א. תהי $f(x)$ מוגדרת ב- $[a, \infty)$. הגדר קיום הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (בלשון $\varepsilon, \dots$).
 ב. חשב $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^4 + e^x)}{\ln(x^2 + e^{2x})}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^4 + e^x)}{\ln(x^2 + e^{2x})}$.
6. א. הראה כי פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ שמקבלת רק ערכים רציונליים היא קבועה.
 ב. תהי $f(x)$ פונקציה מונטונית בקטע $[a, b]$ ומקיימת תנאי ערך הביניים. כלומר,
 לכל a_1, a_2 $a \leq a_1 < a_2 \leq b$ מקבלת כל ערך בין $f(a_1)$ ל- $f(a_2)$. הראה כי f
 רציפה.
7. תהיינה u, v פונקציות גזירות ב- x_0 הראה כי פונקציית המכפלה $f = u - v$ גזירה אף
 היא ב- x_0 ומתקיים $f'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$.
8. א. גזור $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$. הסבר התוצאה.
 ב. מצא $(x^2 \cos x)^{(50)}$.

בהצלחה!!!