

סמסטר קיץ תשס"ב

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי I (88-132-15) – מועד א'
חלק א' מתוך שני חלקים

מרצה: שמואל קפלן.
חומר עזר מותר: מחשבון מדעי, לא גראפי ולא מתכנת.
משך הבחינה: שעה וחצי לכל חלק.

ענו על **3** שאלות מתוך 4 השאלות בבחלק זה.

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו כי אינם קיימים:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(3\theta) - 1}{\theta^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{x - 4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n + 10}$$

א.

ב.

ג.

שאלה 2

עבור כל אחד מהטורים הבאים קבעו האם הוא מתבדר / מתכנס בהחלט / מתכנס בתנאי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n^{3n}}{2(3n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

א.

ב.

ג.

שאלה 3

נתון כי המשפט הבא נכון: לכל סדרה מתכנסת יש תת סדרה מונוטונית **(אין צורך להוכיח את משפט זה).**

הוכיחו כי אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת מספרים כך שכל תת סדרה מונוטונית שלה מתכנסת ל- L אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

שאלה 4

נתון כי $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[0, \infty)$ המקיימות כי:

- א. $f(0) = -10, g(0) = -2$
- ב. $g(x) < 0$ לכל x בקטע.
- ג. $f(x) + g(x)$ היא פונקציה חסומה
- ד. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- מה ידוע לכך על $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?
- הוכיחו כי קיימת נקודה $x \in [0, \infty)$ שבה $f(x) = g(x)$.

בהצלחה!

סמסטר קיץ תשס"ב

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי I (88-132-15) – מועד א'
חלק ב' מתוך שני חלקים

מרצה: שמואל קפלן.
חומר עזר מותר: מחשבון מדעי, לא גראפי ולא מתכנת.
משך הבחינה: שעה וחצי לכל חלק.

ענו על **3** שאלות מתוך 4 השאלות בבחלק זה.

שאלה 5

- א. קבעו האם הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במ"ש בקטע $[0,\infty)$.
- ב. תהי $f:R\rightarrow R$ פונקציה רציפה במ"ש וכן $g:R\rightarrow R$ רציפה במ"ש. הוכיחו כי ההרכבה $f\circ g:R\rightarrow R$ רציפה במ"ש ב- R .

שאלה 6

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

- א. $f(x)=[\cos x]x$ (ערך שלם)
- ב. $f''(x)$ באשר $f(x)=\begin{cases} 3x & x\leq 2 \\ 3x^2-x & 2<x \end{cases}$ (מדובר בנקודות אי הרציפות של הנגזרת השניה)

שאלה 7

גזרו את הפונקציות הבאות:

- א. $f(x)=e^{\left(x^{e^x}\right)}$
- ב. $f(x)=x^2e^{4x}-e^x\sin x$
- ג. $f(x)=\arctan(\ln x^x)$

שאלה 8

יהיו $(a_n)_{n=1}^\infty$ ו $(b_n)_{n=1}^\infty$ שתי סדרות חיוביות $0\leq a_n,0<b_n$. הוכיחו כי אם נתון ש $\sum_{n=1}^\infty b_n$ הוא טור מתכנס, וכן הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ היא מונטונית לא עולה, אזי הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

בהצלחה!

סמסטר קיץ תשס"ב

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי I (88-132-15) – מועד ב'
חלק א' מתוך שני חלקים

מרצה: שמואל קפלן.
חומר עזר מותר: מחשבון מדעי, לא גראפי ולא מתכנת.
משך הבחינה: שעה וחצי לכל חלק.

ענו על **3** שאלות מתוך 4 השאלות בבחלק זה.

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו כי אינם קיימים:

א. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שמתקיים כי $a_1 = 1$ וכן $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3^n}$. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(אין להשתמש בעובדה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ מתכנס).

ב. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$. לא בעזרת לופיטל! ג. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

שאלה 2

עבור כל אחד מהטורים הבאים קבעו האם הוא מתבדר / מתכנס בהחלט / מתכנס בתנאי:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[n^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$ (ערך שלם) ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n n^{2n}}{(2n)!}$

שאלה 3

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, כך שקיים $0 < \varepsilon$ עבורו קיים n_0 כך שאם $n_0 < m, n$ אזי $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$.
הוכיחו כי כל תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

שאלה 4

א. נסחו את משפט הערך הממוצע המוכלל (אין צורך להוכיח אותו).
ב. השתמשו במשפט הערך הממוצע כדי להוכיח כי $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ בקטע $(0, \pi)$.

בהצלחה!

סמסטר קיץ תשס"ב

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי I (88-132-15) – מועד ב'
חלק ב' מתוך שני חלקים

מרצה: שמואל קפלן.
חומר עזר מותר: מחשבון מדעי, לא גראפי ולא מתכנת.
משך הבחינה: שעה וחצי לכל חלק.

ענו על **3** שאלות מתוך 4 השאלות בבחלק זה.

שאלה 5

א. הוכיחו כי $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ אינה רציפה במ"ש בקטע $(0,1)$ למרות שהיא רציפה שם.

ב. הוכיחו כי פונקציה מונוטונית חסומה ורציפה ב- R רציפה שם במ"ש.

שאלה 6

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{\sin(\tan x)}{x}$

ב. $f(x) = (x - [x]) \sin \frac{1}{x}$ (ערך שלם)

שאלה 7

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = a^{\left(e^{(x^x)} \right)}$

ב. $f(x) = \arcsin \left(\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right)$

ג. $f(x) = \arctan \left(\frac{x-1}{2x} \right)$

שאלה 8

נתון כי $f(x)$ פונקציה מונוטונית המוגדרת בכל נקודה של הקטע $[a, b]$. הוכיחו כי כל נקודות אי הרציפות של $f(x)$ חייבות להיות מסוג I .

בהצלחה!