



EBER

GEOMETRIA DESCRITIVA

EBER NUNES FERREIRA

INTRODUÇÃO

SISTEMAS DE PROJEÇÃO

GEOMETRIA DESCRITIVA

ESTUDO DO PONTO

- A - COORDENADAS
- B - SINAIS
- C- REPRESENTAÇÃO EM ÉPURA
- D- TERCEIRA PROJEÇÃO (VISTA DE PERFIL)

ESTUDO DA RETA

- A - DETERMINAÇÃO DE RETAS
- B - POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E PLANOS
- C- CLASSIFICAÇÃO DAS RETAS
- D- PARTICULARIDADES
- E- PERTINÊNCIA DE PONTO A RETA
- F- PONTOS NOTÁVEIS DA RETA
- G- POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS
- H- POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS DE PERFIL

ESTUDO DO PLANO

- A - DETERMINAÇÃO DE PLANOS
- B - POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DOIS PLANOS
- C- CLASSIFICAÇÃO DOS PLANOS
- D- RETAS DOS PLANOS
- E- PERTINÊNCIA DE RETA A PLANO EM ÉPURA
- F- QUADRO SÍNTESE DE PERTINÊNCIA DE RETA A PLANO
- G- RETAS DE MÁXIMO DECLIVE E MÁXIMA INCLINAÇÃO
- H- QUADRO SÍNTESE DE RETAS DE MÁXIMO DECLIVE E MÁXIMA INCLINAÇÃO

INTRODUÇÃO



Vive-se em um mundo tridimensional, onde os objetos são descritos esquematicamente, fazendo-se referência à altura, largura e profundidade.

Durante muitos séculos, desde quando o homem pré-histórico esboçava suas caças nas paredes das cavernas procurou-se a forma de como representar objetos de um universo tridimensional em superfícies bidimensionais.

Este questionamento se dá, inicialmente, ao nível da representação dos objetos já existentes, mas em se tratando de elementos que ainda estão na mente do seu criador, o fato se agrava, e ainda mais quando um é o que concebe e outro é o que materializa. Nesse caso, torna-se imprescindível uma maneira de transmitir a idéia do projetista ao seu realizador.

Com o advento da Revolução Industrial, esta necessidade tornou-se ainda mais imperativa, pois o sistema produtivo até então, utilizava-se de mão-de-obra artesanal, onde a "comunicação técnica" ainda não requeria um maior grau de complexidade. A partir do momento em que objetos passam a ser produzidos em quantidade considerável, fez-se necessário o uso de uma representação projetiva baseada não mais no "olhar humano" que sabidamente vê e interpreta os objetos deformando suas medidas, ângulos e formas, mas, uma representação que contemplasse as reais medidas do objeto, para que sua confecção fosse precisa e confiável.

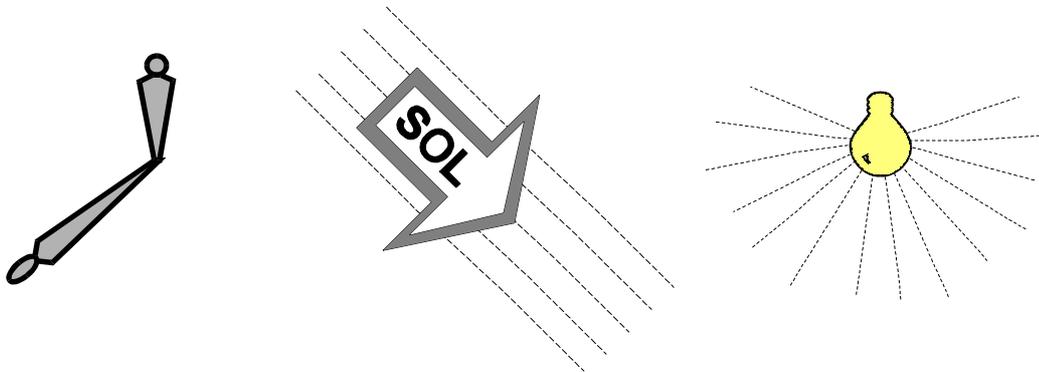
Em sua genialidade, Gaspar Monge, com uma idéia "escandalosamente simples", revoluciona a representação de objetos tridimensionais, imprimindo-lhe um caráter técnico e de precisão. Nascido no ano de 1746, com 16 anos já revelava a diversidade de suas aptidões técnicas e intelectuais, mostrando sua habilidade como desenhista e inventor. Era possuidor de "dedos capazes de traduzir com fidelidade geométrica seus pensamentos".

SISTEMAS DE PROJEÇÃO

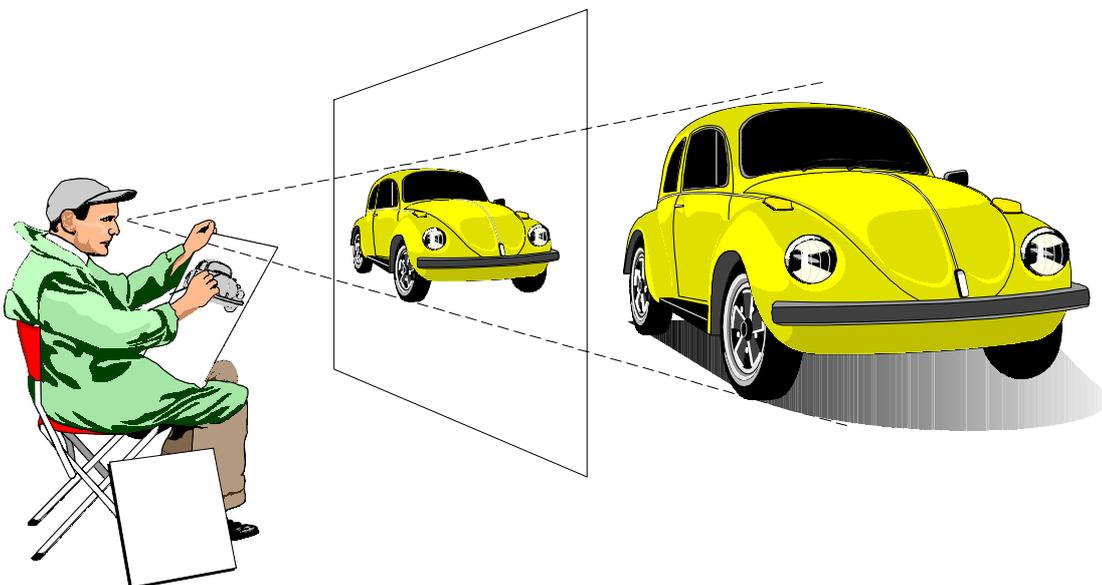
Ao olharmos ao nosso redor, podemos perceber que estamos envolvidos por diferentes sistemas projetivos. Uma sessão de cinema, ou a simples sombra de um objeto que varia em função da direção dos raios luminosos, são suficientes para fazermos uma analogia com os diferentes sistemas projetivos.

As diversas sombras ou imagens formadas se devem, entre outros fatores, a relação de distância com a superfície onde a sombra é projetada, à direção dos raios, e ao tipo de fonte luminosa, quer seja solar ou artificial.

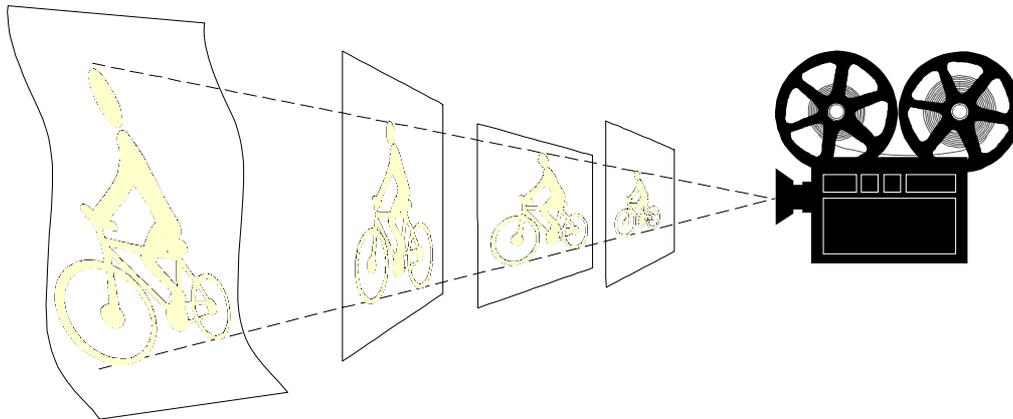
Em função da grandeza do Sol, quando comparada a Terra, e de sua distância para com a mesma, podemos considerar seus raios paralelos entre si. Já a iluminação artificial é considerada puntiforme e sua emissão de raios luminosos se dá de forma radial. Tudo isto, determina diferentes resultados.



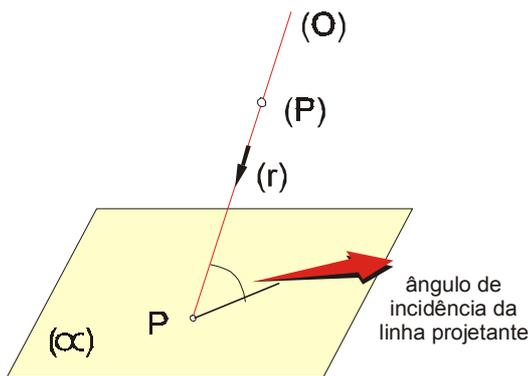
Consideremos um ponto qualquer no espaço, posicionado no finito ou no infinito, como sendo o olho de um observador. Se fosse possível interceptarmos com um plano, os raios visuais que chegam ao olho observador, teríamos uma imagem correspondente ao objeto observado. Esta imagem recebe o nome técnico de projeção.



Também, ao colocarmos uma tela móvel diante dos raios luminosos de um projetor de cinema, obteremos distintas projeções (imagens) de acordo com a posição e o tipo de superfície da tela.



Analisando os exemplos anteriores, podemos fazer uma analogia com os elementos de um sistema de projeção. Um sistema de projeção é constituído por cinco elementos básicos. São eles: Centro de Projeção; Linha Projetante; Objeto; Projeção e o Plano de Projeção.



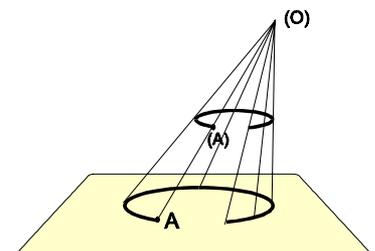
Do centro de projeção (O) parte uma linha projetante (r) que, cortada pelo plano (a), determina a projeção P, do ponto (P).

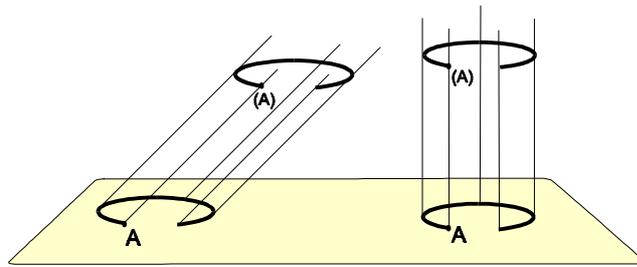
Assim podemos estabelecer a seguinte relação

- (O) - Centro de Projeção Fonte de Luz / Olho do observador
- (r) - Linha Projetante Raio Luminoso / Raio Visual
- (P) - Ponto Objetivo (Objeto)..... Objeto
- P - Projeção do Ponto (P) Sombra / Imagem
- (α) - Plano de Projeção Superfície / Tela / Anteparo

O centro de Projeção (P) é o ponto ou local de onde partem as linhas projetantes, podendo localizar-se no **Finito ou Infinito**, denominando-se centro **Próprio** ou **Impróprio**, respectivamente.

A - Quando consideramos o centro de projeção **PRÓPRIO**, as linhas projetantes partem divergentes em direção ao plano de projeção, correspondendo assim aos raios de uma lâmpada incandescente. Desta forma, temos o **Sistema Cônico de Projeção**.



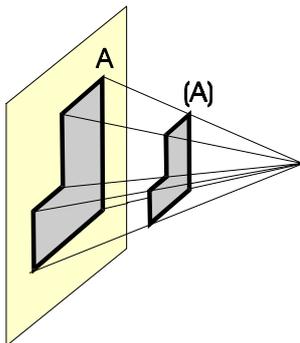


B - Quando consideramos o centro de projeção **IMPRÓPRIO**, as linhas projetantes partem paralelas em direção ao plano de projeção, correspondendo assim aos raios do sol. Desta forma, temos o **Sistema Cilíndrico de Projeção**, que se subdivide em **oblíquo e ortogonal**.

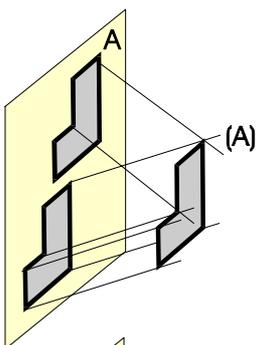
Observe que no sistema **Cilíndrico** o **ângulo de incidência** de todas as linhas projetantes **são iguais** para uma mesma direção, e o centro de projeção não é percebido por se encontrar no infinito.

Estudaremos agora cada um dos sistemas, percebendo suas características e particularidades.

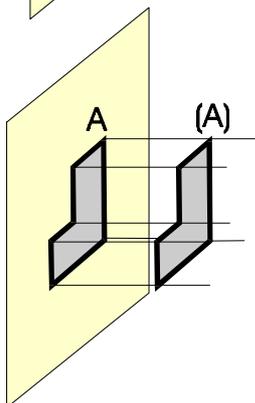
Atenção: Inicialmente, consideraremos o objeto (bidimensional) em uma **posição fixa no espaço equidistante (paralelo) ao plano de projeção**.



No **Sistema Cônico** a projeção **não registra** as reais dimensões do objeto, ou seja, ele **NÃO É** representado em sua **verdadeira grandeza (VG)**. Observe que no exemplo da figura ao lado ocorre uma ampliação do objeto projetado. Neste sistema, o centro de projeção pode ocupar várias posições, o que interferirá no resultado da projeção.

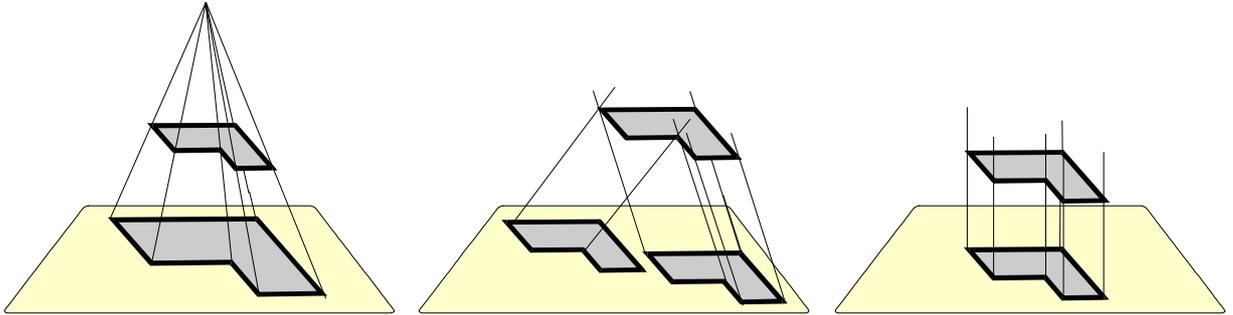


No **Sistema Cilíndrico Oblíquo** o objeto é representado em **VERDADEIRA GRANDEZA**, mas devido aos diferentes valores que o ângulo de incidência pode assumir (em função da direção das linhas projetantes) teremos **várias opções** para a localização da projeção sobre o plano.

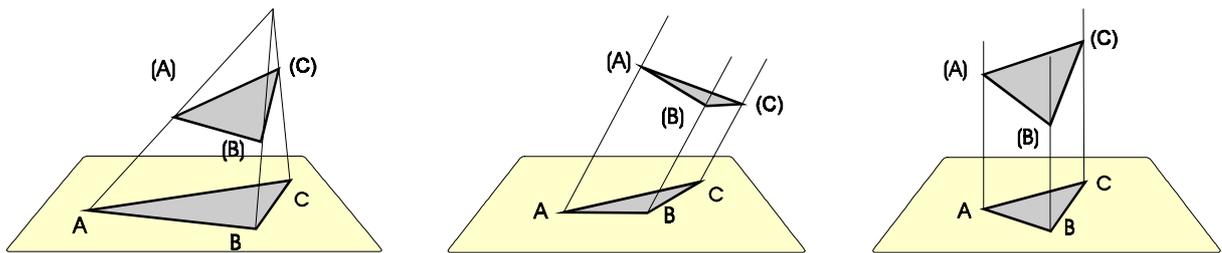


Já no **Sistema Cilíndrico Ortogonal**, o objeto está expresso em sua **V.G.**, mas, ao contrário dos sistemas anteriores, existe uma **única projeção** que o representa, pois a direção também é única.

No **sistema cônico**, quando o objeto (bidimensional) **não está paralelo** ao plano, a projeção deixa de estar **semelhante** ao objeto no espaço.



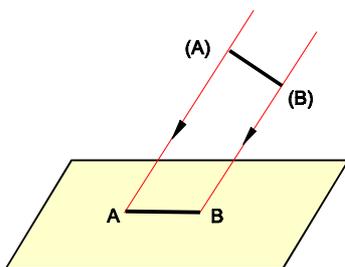
Já no **sistema cilíndrico** a projeção deixa de estar **congruente** ao objeto.



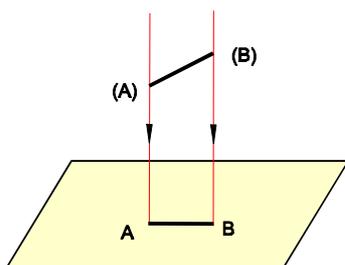
Conhecendo melhor o Sistema Cilíndrico Ortogonal

A classificação **oblíquo e ortogonal** dentro do **sistema cilíndrico** não está em função do ângulo que a linha projetante forma com o objeto, e sim com o plano de projeção.

Esta observação se faz necessária, pois até agora temos considerado o **objeto paralelo** ao plano, onde os **ângulos que a linha projetante forma com o objeto e com o plano de projeção são iguais**, no entanto serão diferentes quando não houver tal paralelismo.



Na figura ao lado, o sistema de projeção é o **cilíndrico oblíquo**; cilíndrico porque as linhas projetantes são paralelas entre si, e oblíquo porque o ângulo de incidência das linhas projetantes com o plano não é reto.

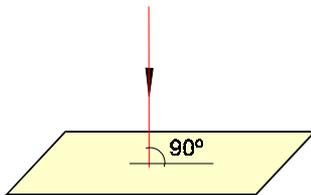


Na figura ao lado, o sistema de projeção é o cilíndrico ortogonal. Em ambas figuras o sistema é cilíndrico, classificação esta que está em função do paralelismo entre as projetantes. Quanto à classificação de oblíquo ou ortogonal, depende do ângulo de incidência da projetante com o plano de projeção. Neste caso, sendo o referido ângulo, reto, este recebe a classificação de ortogonal.

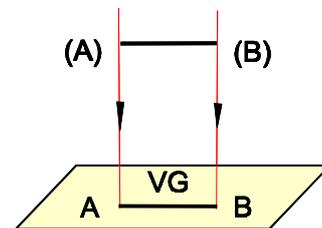
Um bom observador já terá percebido que nos desenhos anteriores o objeto não é projetado em suas dimensões reais, pois no Sistema Cilíndrico o **paralelismo** é a condição exigida para a obtenção da projeção em **verdadeira grandeza**.

Veja a síntese do Sistema Cilíndrico Ortogonal de Projeção que é o sistema que fundamenta a Geometria Descritiva.

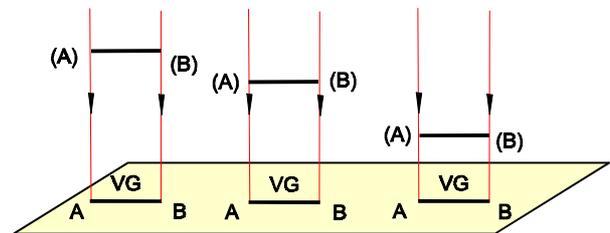
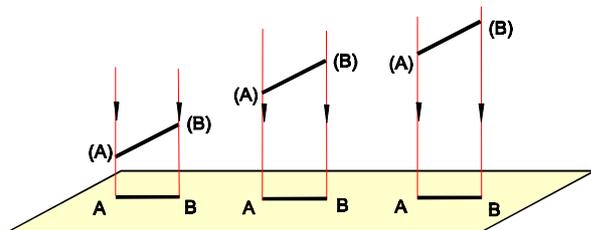
1 - A linha projetante sempre será perpendicular ao plano de projeção.



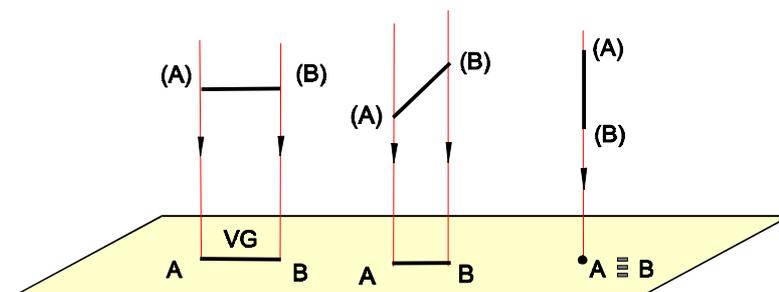
2 - O objeto somente será representado em sua VG quando estiver paralelo ao plano de projeção.



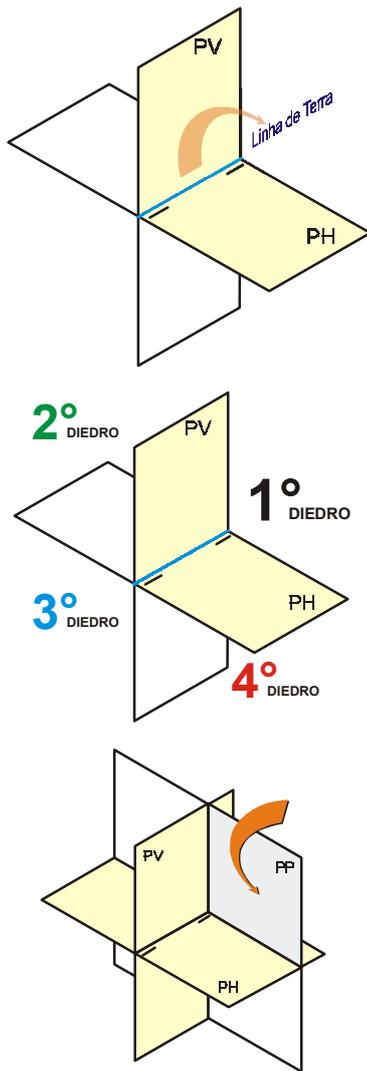
3 - A distância do objeto ao plano de projeção não interfere na dimensão da projeção, pois as linhas projetantes são paralelas, possuindo, portanto, um mesmo ângulo de incidência.



4 - O fator que altera as dimensões da projeção em relação ao objeto é a angulação do mesmo em relação ao plano de projeção.



GEOMETRIA DESCRITIVA



A geometria descritiva (GD) promove o estudo dos objetos através de suas projeções ortoédricas sobre planos perpendiculares entre si. Inicialmente utiliza-se de um plano horizontal e outro vertical. À partir destes dois elementos, Gaspar Monge cria um sistema projetivo que permite registrar a tridimensionalidade dos objetos.

A interseção dos planos horizontal e vertical determina uma reta denominada de **Linha de Terra** que os divide em semiplanos e estes, por sua vez, delimitam o espaço em quatro regiões denominados de "diedros".

A linha de terra recebe duas barrinhas paralelas em suas extremidades posicionadas sobre o PH. Assim, o simples reconhecimento da linha de terra permite identificar a posição do PV e PH.

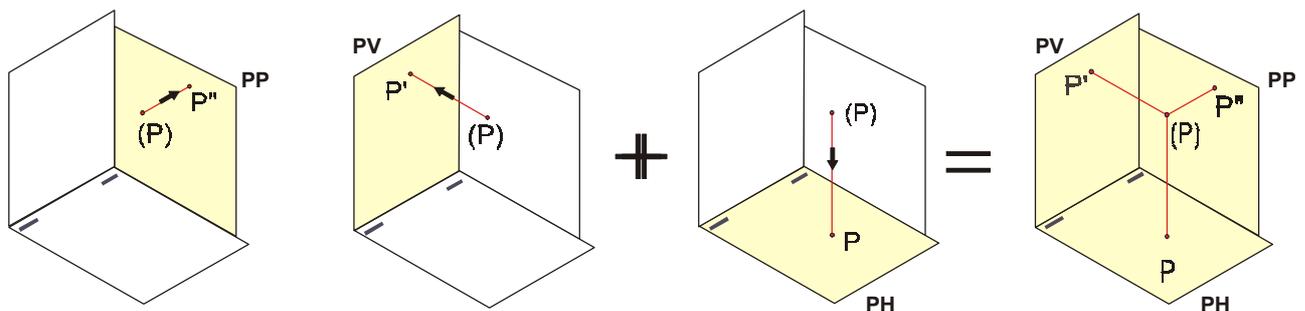
Posteriormente, cabe ao geômetra italiano, Gino Lória, o recurso de introduzir no sistema mongeano de projeção o terceiro plano, perpendicular aos dois primeiros, plano este que recebe o nome de PP - plano de perfil.

Embora o estudo da Geometria Descritiva contemple quatro diedros, este curso dará um enfoque quase que exclusivo ao primeiro diedro. Isto objetivará significativamente a disciplina e facilitará a transição entre o desenho técnico e o desenho arquitetônico.

ESTUDO DO PONTO

Um ponto situado no espaço estabelece uma relação de distância com os planos de projeção. Portanto, cada ponto é definido por 3 coordenadas que são registradas através das projeções sobre os planos. Vale salientar que a Geometria Descritiva faz uso do Sistema Cilíndrico Ortogonal de Projeção, fato este que determina uma única projeção em cada plano de projeção.

Antes de apresentarmos as coordenadas vamos estabelecer uma convenção para distinguirmos as diferentes projeções de um mesmo objeto em cada plano.

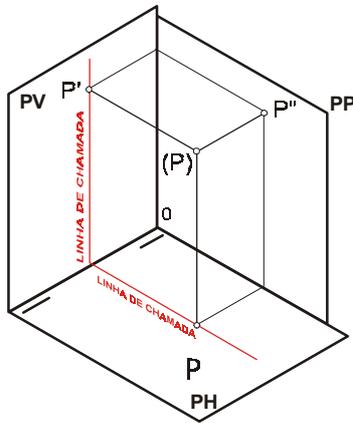


A projeção do ponto (P) sobre o PP é denominada projeção de perfil ou terceira projeção **P''**.

A projeção do ponto (P) sobre o PV é denominada projeção vertical **P'**.

A projeção do ponto (P) sobre o PH é denominada projeção horizontal **P**.

A notação do ponto será feita com letras maiúsculas ou números do alfabeto arábico, que deverão estar entre parênteses. A expressão "Ponto" deve ser empregada somente para o objeto.



IMPORTANTE : quando representarmos um objeto **no diedro**, estaremos utilizando somente o planos Horizontal e Vertical de projeção, conseqüentemente o objeto será representado através de duas projeções; mas quando a representação for feita **no triedro**, estaremos inserindo o plano de Perfil que também é conhecido por Terceiro Plano.

A linha imaginária, que contém as projeções P e P', é denominada **LINHA DE CHAMADA**.

A - COORDENADAS

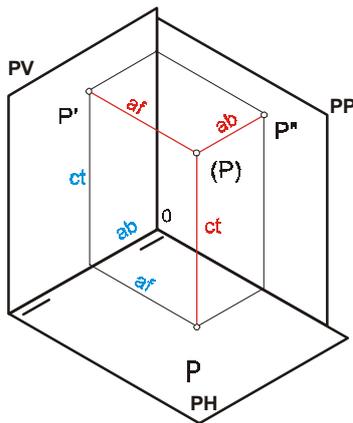
Para que possamos situar um objeto no espaço, precisamos conhecer as distâncias de seus pontos para com os planos de projeção. Assim, cada ponto é definido por um trio ordenado composto por **x, y e z**, denominados **abscissa, afastamento e cota**, respectivamente, onde:

Abscissa (ab) : é a distância do ponto ao PP.

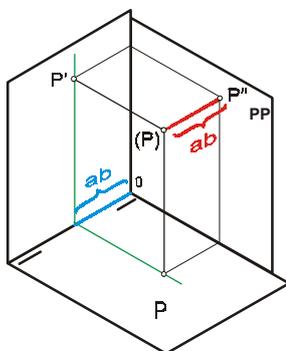
Afastamento (af) : é a distância do ponto ao PV

Cota (ct) : é a distância do ponto ao plano PH

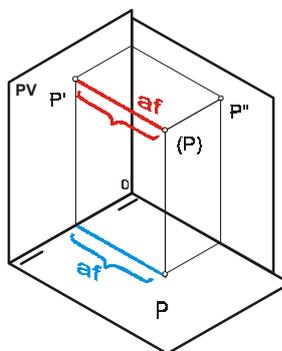
Está implícito que a "distância" é a menor possível, ou seja, medida sobre um alinhamento perpendicular ao plano.



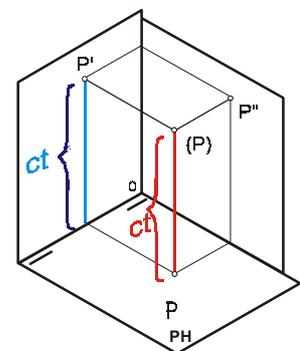
IDENTIFIQUEMOS ALGUMAS IGUALDADES



A distância do ponto (P) ao PP é igual à distância da Linha de Chamada à **origem** (intersecção dos três planos); portanto ambas traduzem a **abscissa**.



A distância do ponto (P) ao PV é igual à distância da projeção horizontal P à **LT**, portanto ambas traduzem o **afastamento**.



A distância do ponto (P) ao PH é igual à distância da projeção vertical P' à **LT**, portanto ambas traduzem a **cota**.

Logo, podemos ter duas definições para as coordenadas: uma ao nível **espacial**, relacionando o objeto ao plano, e outra ao nível **projetivo**, relacionando as projeções à Linha de Terra.

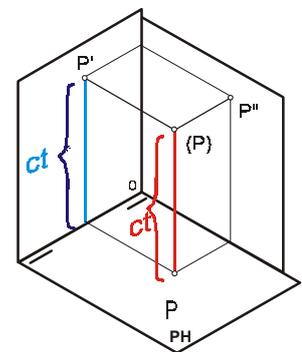
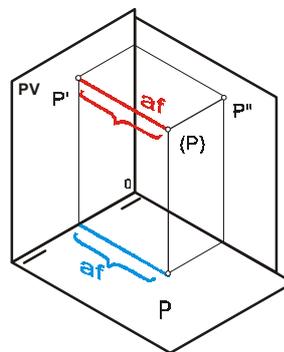
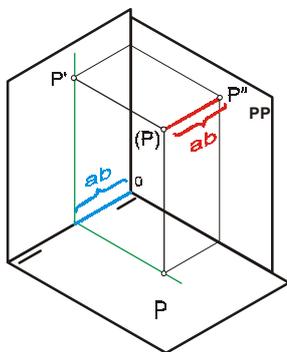
É muito importante esta dupla conceituação das coordenadas, pois é objetivo da Geometria Descritiva registrar os objetos através de suas projeções, e isto exige que desenhemos usando o "conceito projetivo", mas que visualizemos o "conceito espacial", ou seja, se tivermos um objeto no espaço seremos capazes de desenhá-lo, e se nos depararmos com o seu desenho seremos capazes de concebê-lo.

CONCEITO ESPACIAL

Abcissa (ab) : é a distância do ponto ao PP.
Afastamento (af) : é a distância do ponto ao PV.
Cota (ct) : é a distância do ponto ao PH.

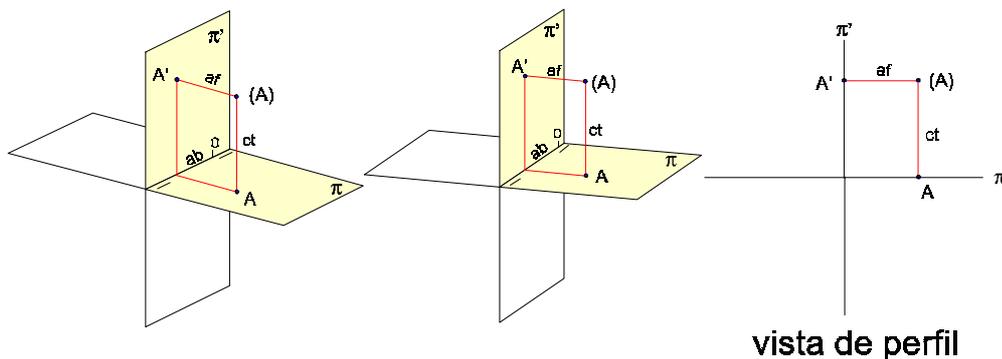
CONCEITO PROJETIVO

Abcissa: é a distância da Linha de Chamada à origem.
Afastamento: é a distância da projeção horizontal à Linha de Terra.
Cota: é a distância da projeção vertical à linha de terra.



B - SINAIS

Os planos de projeção, quando observados lateralmente, reduzem suas superfícies à linhas retas, e assemelham-se ao plano cartesiano da matemática, assumindo os mesmos valores (positivo e negativo), tanto para cota, quanto para o afastamento. Já a abcissa terá como referencial a origem marcada sobre a linha de terra.

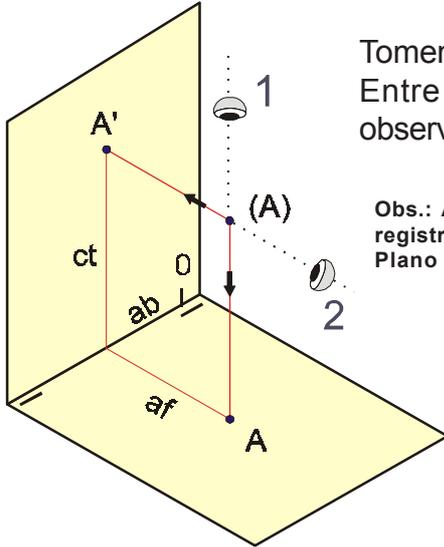


Então, **os pontos** situados :
 à **direita** da origem possuem..... **ABCISSAS POSITIVAS;**
 à **esquerda** da origem possuem..... **ABCISSAS NEGATIVAS;**
acima do plano horizontal possuem **COTAS POSITIVAS;**
abaixo do plano horizontal possuem **COTAS NEGATIVAS;**
anteriores ao plano vertical possuem **AFASTAMENTOS POSITIVOS e**
posteriores ao plano vertical possuem **AFASTAMENTOS NEGATIVOS.**

Visto que estaremos priorizando o Primeiro Diedro, estaremos excllulindo os sinais negativos para afastamento e cota.

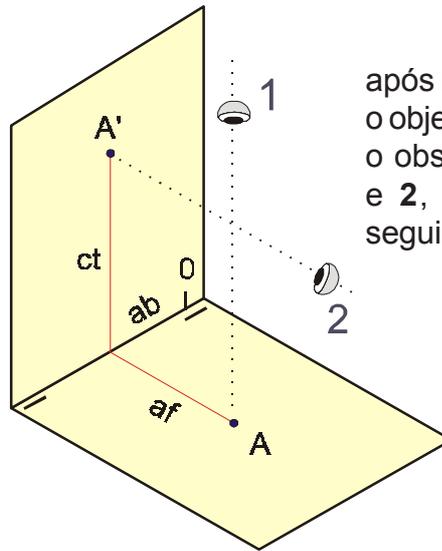
C - REPRESENTAÇÃO EM ÉPURA

Até agora, temos utilizado a perspectiva, que não é baseada no sistema cilíndrico ortogonal, para apresentação e compreensão da geometria descritiva. À partir deste momento, começaremos a caminhar no sentido de nos valer dela própria, para a análise de figuras e objetos no espaço.

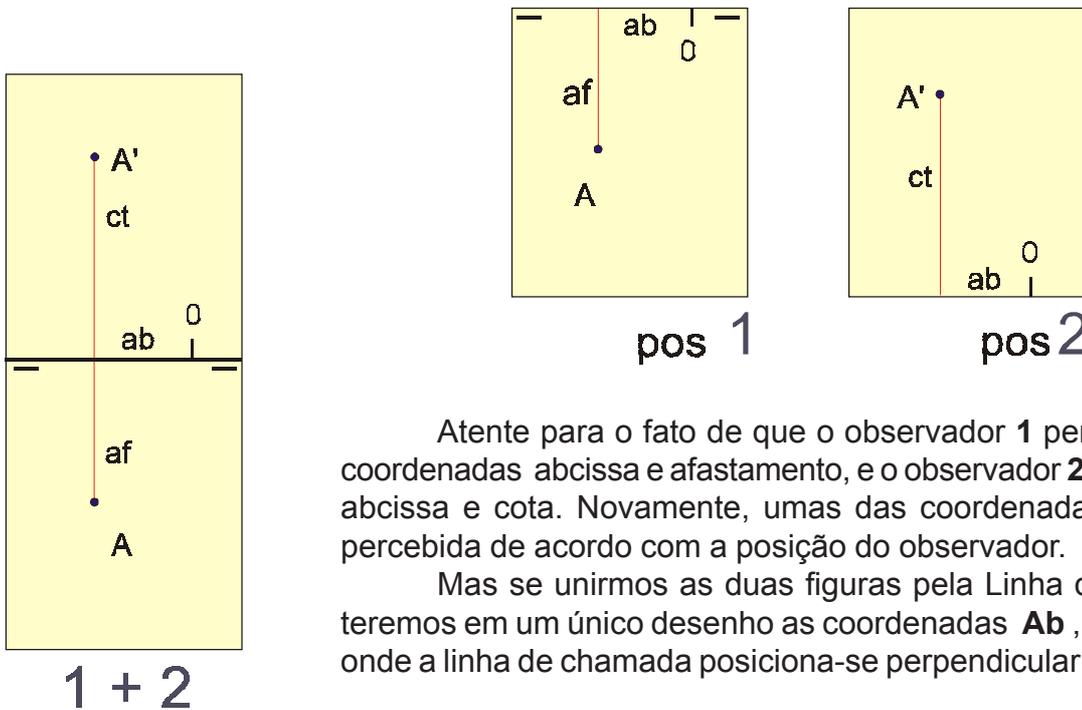


Tomemos um ponto com coordenadas genéricas: **(A) (Ab ; Af ; Ct)**. Entre o centro de projeção e o objeto, posicionaremos um observador que enxergue com "olhos do sistema cilíndrico ortogonal".

Obs.: A origem sobre a linha de terra registra a posição a ser ocupada pelo Plano de Perfil oportunamente.



Consideremos que, após o registro das projeções, o objeto seja retirado; com isto, o observador nas posições **1** e **2**, estaria recebendo as seguintes imagens.

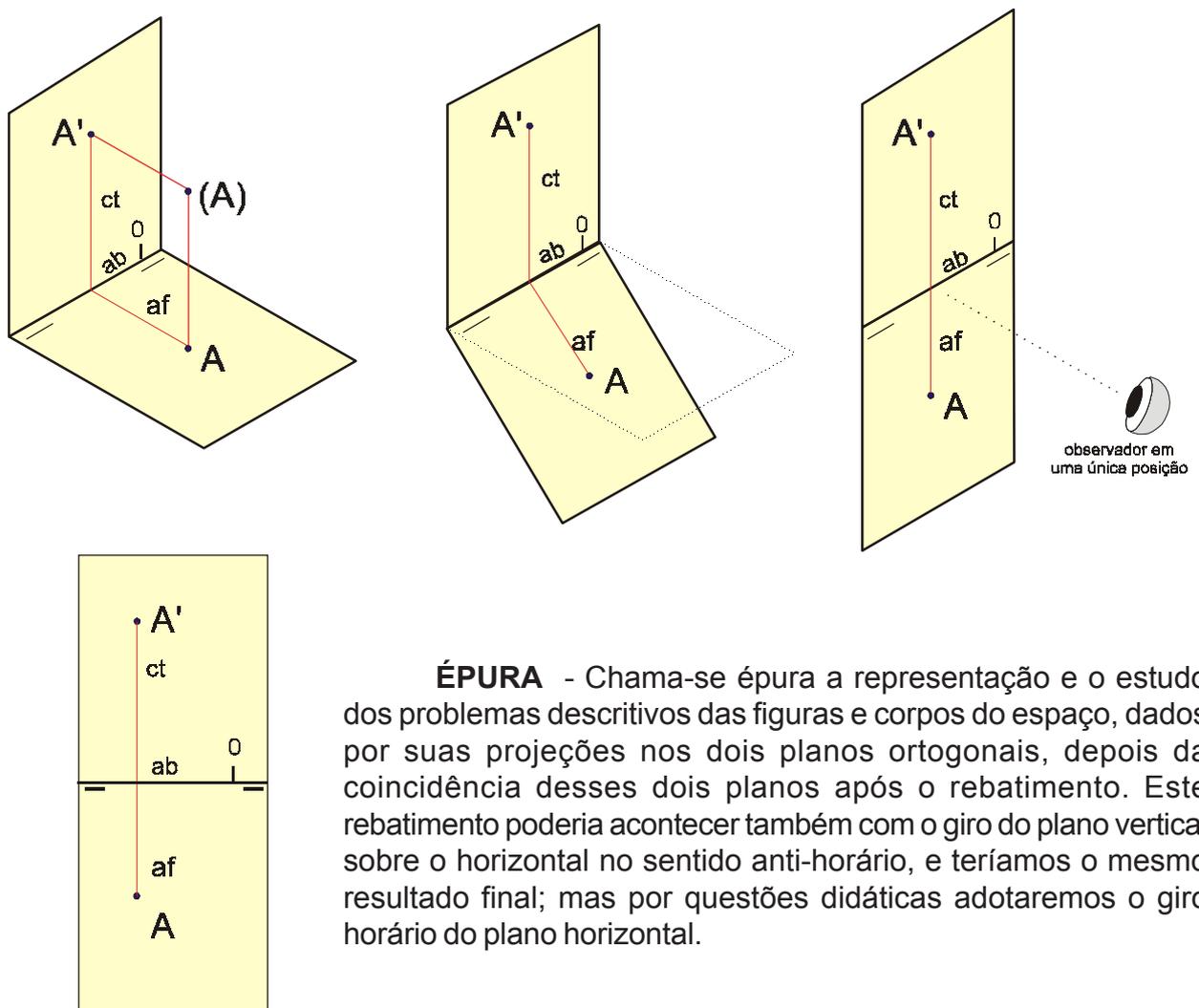


Atente para o fato de que o observador **1** percebe as coordenadas abcissa e afastamento, e o observador **2** percebe abcissa e cota. Novamente, umas das coordenadas não é percebida de acordo com a posição do observador.

Mas se unirmos as duas figuras pela Linha de Terra, teremos em um único desenho as coordenadas **Ab**, **Af** e **Ct**, onde a linha de chamada posiciona-se perpendicular à **LT**.

Imaginemos o Plano Horizontal submeter-se a um giro de 90° no sentido horário. Esta operação denomina-se **REBATIMENTO**. Desta forma, o observador faz "leitura" de todas as coordenadas em uma única posição. Esta forma de representação denomina-se **ÉPURA**.

Observe que o resultado é exatamente o mesmo quando da junção das imagens vistas separadamente pelo observador nas posições **1** e **2** na página anterior.



ÉPURA - Chama-se épure a representação e o estudo dos problemas descritivos das figuras e corpos do espaço, dados por suas projeções nos dois planos ortogonais, depois da coincidência desses dois planos após o rebatimento. Este rebatimento poderia acontecer também com o giro do plano vertical sobre o horizontal no sentido anti-horário, e teríamos o mesmo resultado final; mas por questões didáticas adotaremos o giro horário do plano horizontal.

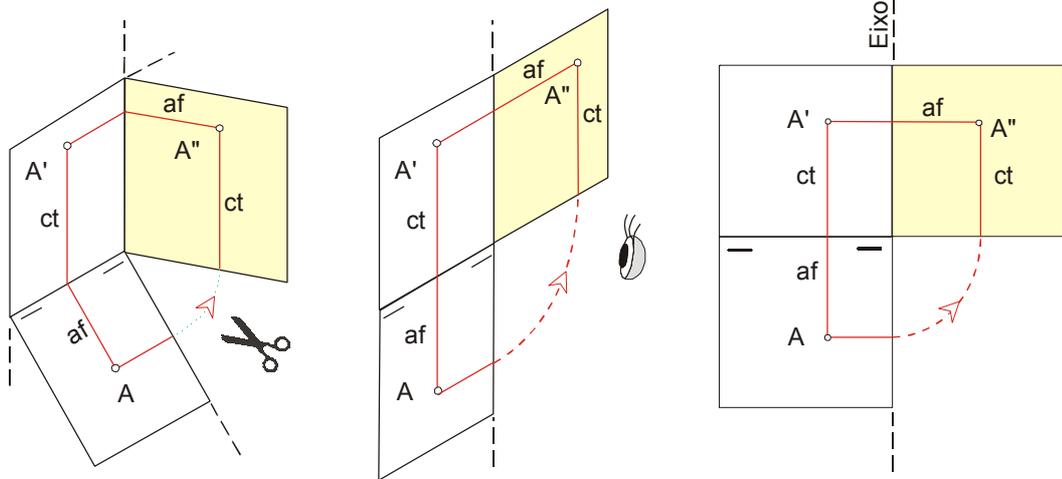
Desta maneira, as projeções horizontais positivas, na representação em épure, após o rebatimento, passam a ser registradas abaixo da LT, respeitando, assim, o rebatimento.

Como o plano vertical permanece fixo no espaço, as projeções verticais com cotas positivas continuam a ser registradas acima da LT.

De igual maneira, as abcissas não sofrem alterações em face ao rebatimento, continuando positivas à direita da origem e negativas à esquerda.

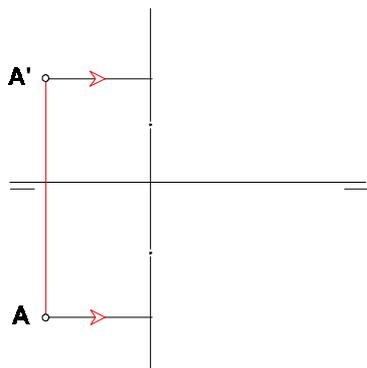
Devido ao fato dos planos horizontal e vertical receberem as três coordenadas necessárias ao estudo dos sólidos durante anos procurou-se desenvolver todos os estudos espaciais apenas com duas vistas ortogonais. No entanto, o uso sistemático do Plano de Perfil tornou a GD mais fácil. Então, o que acontece quando o Plano de Perfil está presente?

Para que tenhamos um único observador com capacidade de leitura em épura dos três planos simultaneamente, faz-se necessário um segundo rebatimento, agora do plano Plano de Perfil que sofrerá um giro de 90° para a direita conforme a figura a seguir.

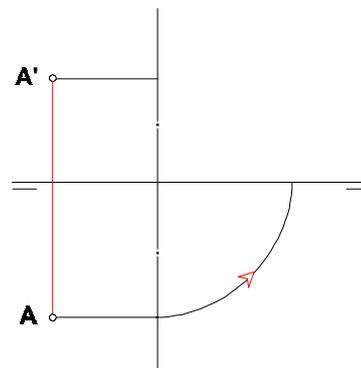


Neste exemplo, os planos foram rebatidos após o registro das três projeções, ou seja, a terceira projeção já existe. Mas como seria obter a terceira projeção à partir das projeções representadas apenas no diedro? Observe que a projeção sobre o Plano de Perfil é composta apenas pelas coordenadas afastamento e da cota.

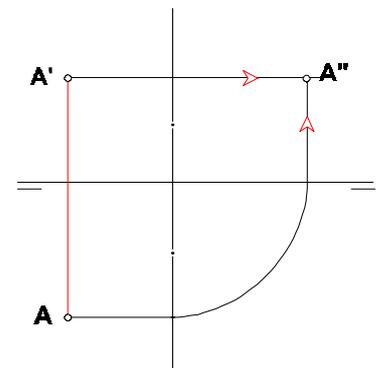
D - TERCEIRA PROJEÇÃO



1º PASSO
Levar as informações (af e ct) ao eixo.

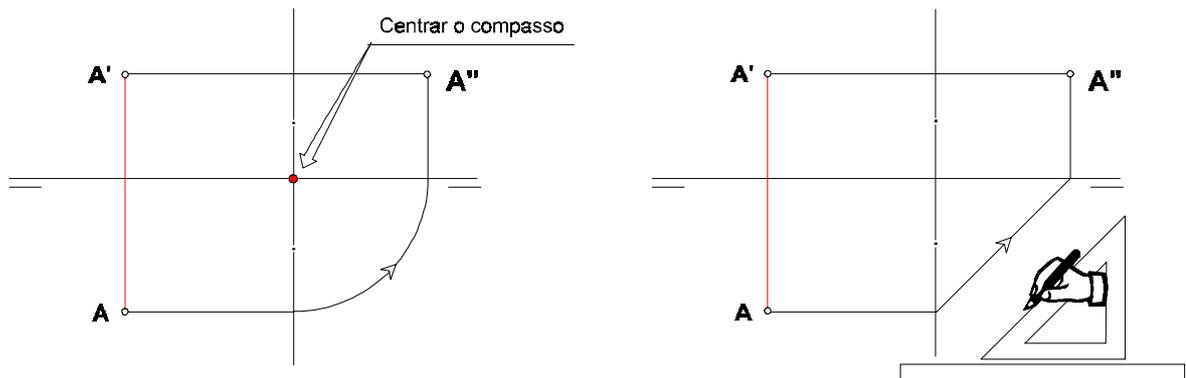


2º PASSO
Alçar a distância correspondente ao afastamento até a LT.

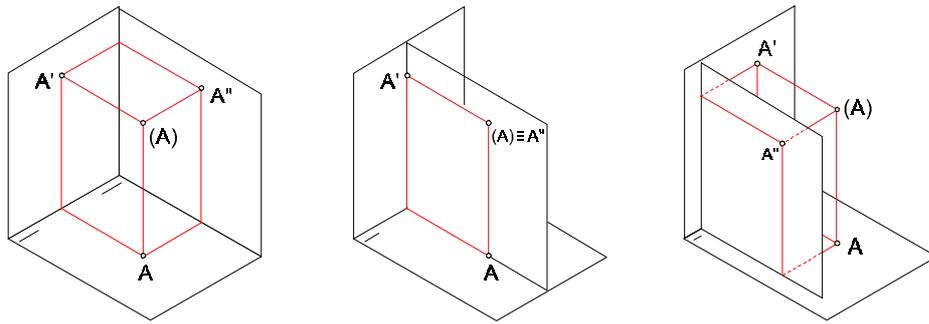


3º PASSO
Cruzar as informações e obter a 3ª projeção.

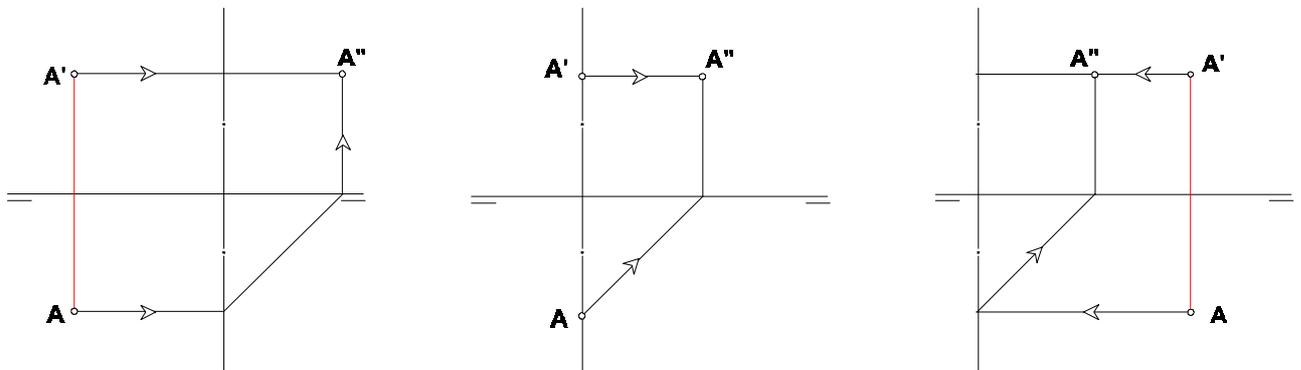
A operação alçamento deve ser feita de maneira a manter inalterada a medida da informação que está sendo transportada. Para isto é necessário o uso do compasso ou do esquadro de 45°, apoiado na régua paralela.



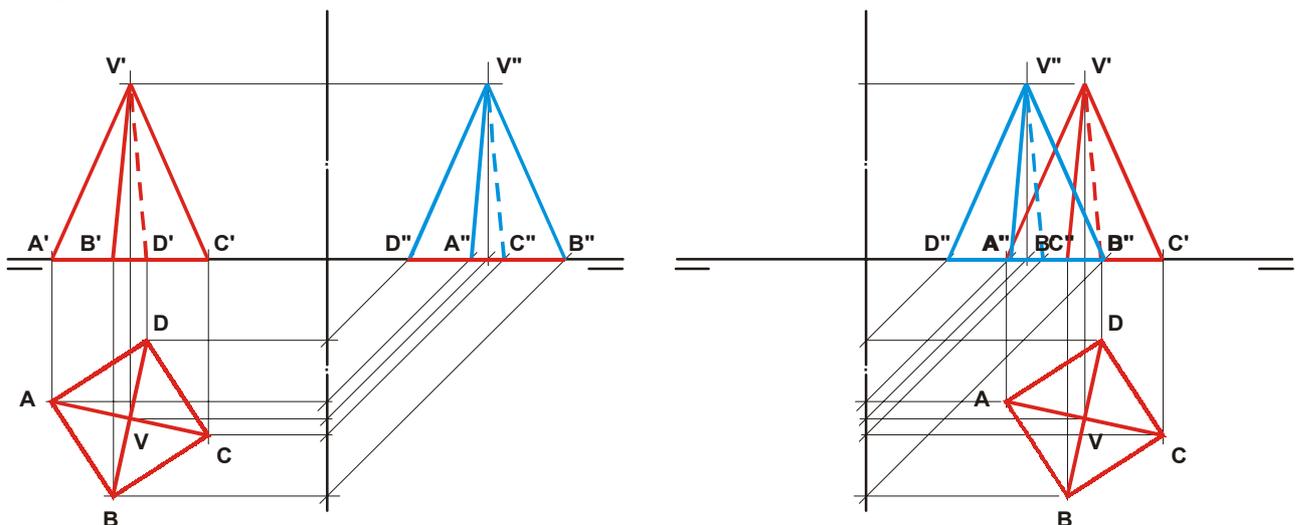
A posição primitiva do plano PP é na abcissa "zero", por isto o eixo encontra-se junto à origem. No entanto um objeto pode possuir pontos que podem ficar à direita, à esquerda ou mesmo sobre o PP.



Em épura, isto implica no posicionamento da linha de chamada do ponto em relação ao eixo. Isto em nada modifica os procedimentos para a obtenção da 3ª projeção, apenas muda a direção no momento de levarmos as informações até o eixo; daí em diante é tudo igual. Observe estes desenhos.



Podemos concluir que em relação ao eixo, os resultados são iguais. No entanto, podemos nos deparar com situações em que utilizar o eixo sobre a origem pode causar um congestionamento de projeções.



Um dos exemplos acima mostra um congestionamento causado pela sobreposição das projeções, embora ambos estejam tecnicamente corretos. Visto que o objetivo deste material didático é facilitar o ensino da GD, estaremos, sempre que for conveniente, permitindo o deslocamento do eixo para uma abcissa diferente de zero ou ainda, utilizando um plano de perfil auxiliar.

Observe que em todos os casos a terceira projeção está na mesma altura da projeção vertical. **Tome isto como regra.**

ESTUDO DA RETA

Chama-se projeção de uma reta sobre um plano ao lugar geométrico das projeções de todos os seus pontos sobre esse plano.

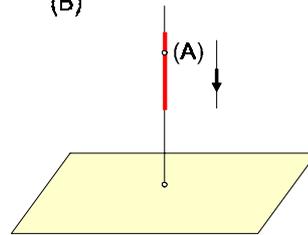
A - DETERMINAÇÃO DE RETAS.

Uma reta pode ser determinada por:

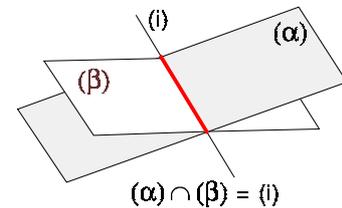
a - dois pontos distintos;



b - um ponto e uma direção;



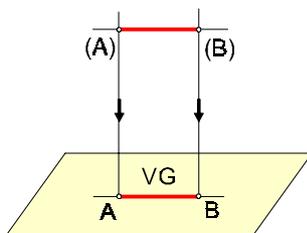
c - dois planos secantes



B - POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

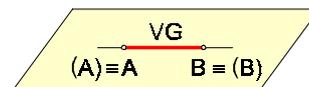
a - Equidistante:

1 - paralela



nenhum ponto no plano

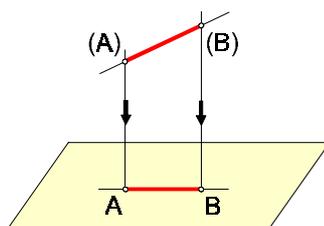
2 - pertencente



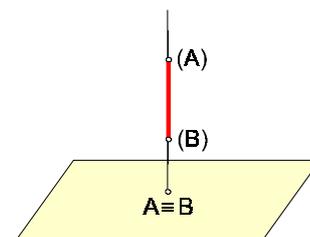
todos os pontos no plano

b - Concorrente

1- oblíqua



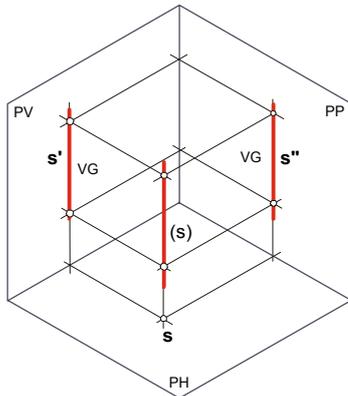
2 - perpendicular



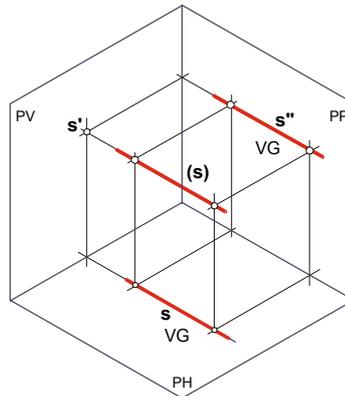
C - CLASSIFICAÇÃO DAS RETAS

Dois pontos distintos no espaço podem definir sete tipos genéricos de retas. Primeiramente estaremos reunindo-as em três grupos.

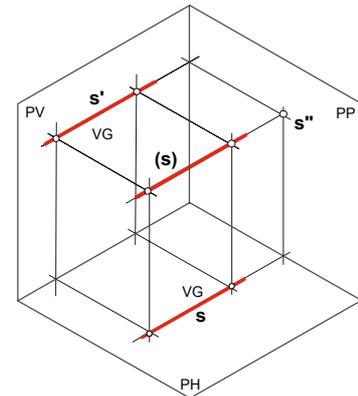
Grupo 1 - Grupo das retas que estão perpendiculares a um dos planos de projeção e consequentemente paralelas aos outros dois. Assim possuem uma projeção pontual e duas projeções em verdadeira grandeza. São denominadas retas PROJETANTES.



RETA VERTICAL

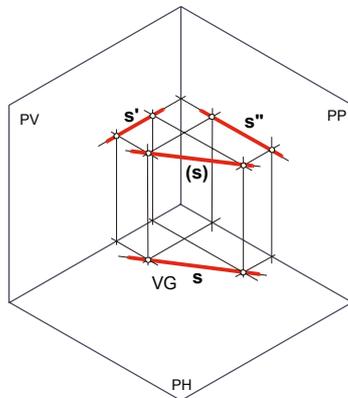


RETA DE TOPO

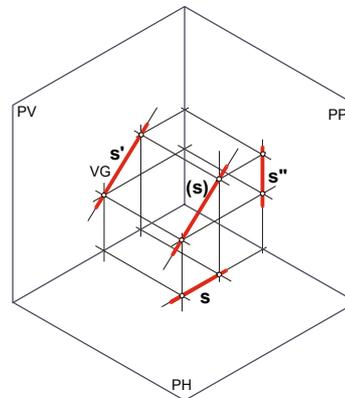


RETA FRONTO-HORIZONTAL

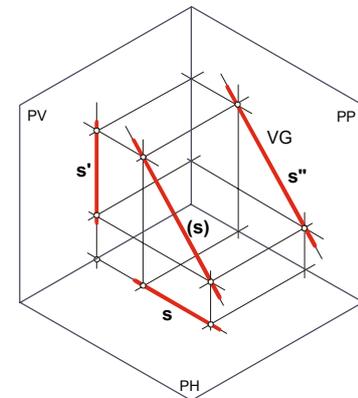
Grupo 2 - Grupo das retas que estão paralelas a somente um dos planos de projeção, consequentemente oblíqua aos outros dois. Assim possuem apenas uma projeção em verdadeira grandeza.



RETA HORIZONTAL

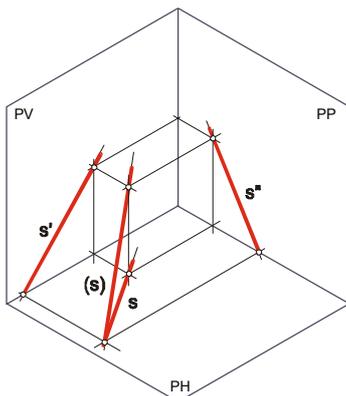


RETA FRONTAL



RETA DE PERFIL

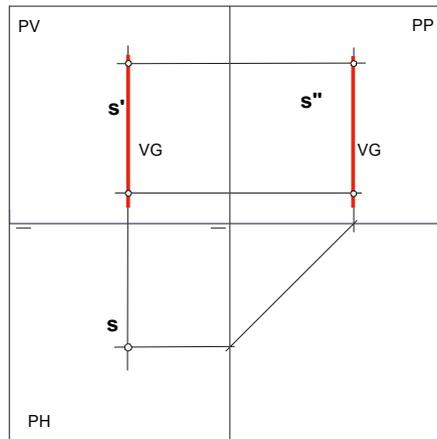
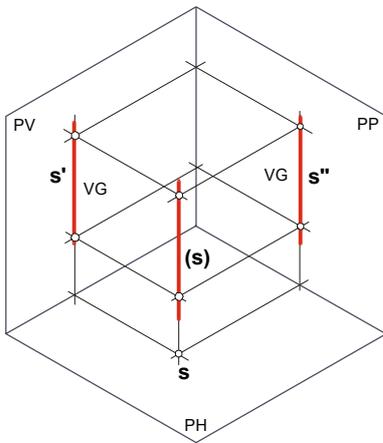
Grupo 3 - Grupo das retas que estão oblíquas aos três planos de projeção, consequentemente nenhuma de suas projeções possuem verdadeira grandeza.



RETA QUALQUER

Agora estudaremos, uma a uma, as retas. . Você deverá utilizar a maquete do triedro para analisar a reta que será apresentada por sua perspectiva e épura.

a - RETA VERTICAL



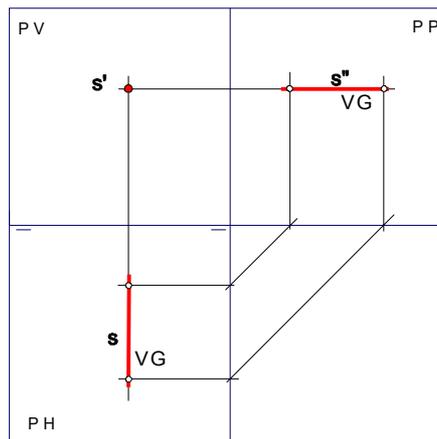
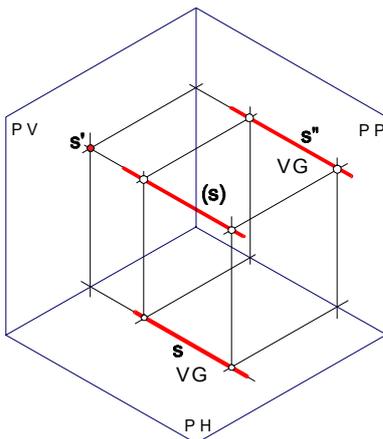
CARACTERÍSTICAS

NO ESPAÇO a reta é:
perpendicular ao PH;
paralela ao PV;
paralela ao PP.

OS PONTOS da reta possuem:
abscissas iguais;
afastamentos iguais;
cotas diferentes.

EM ÉPURA a projeção:
horizontal é pontual;
vertical é perpendicular à LT.

a - RETA DE TOPO



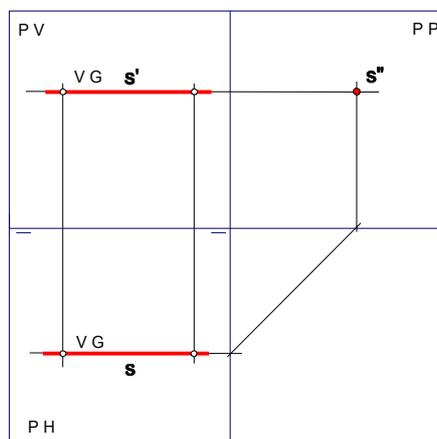
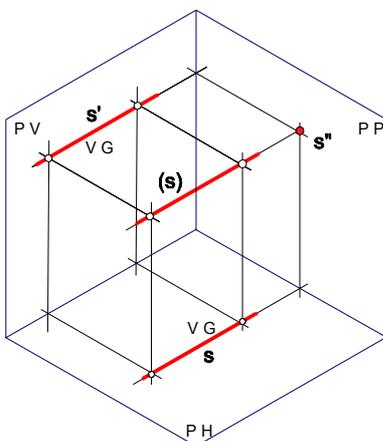
CARACTERÍSTICAS

NO ESPAÇO a reta é:
paralela ao PH;
perpendicular ao PV;
paralela ao PP.

OS PONTOS da reta possuem:
abscissas iguais;
afastamentos diferentes;
cotas iguais.

EM ÉPURA a projeção:
horizontal é perpendicular à LT;
vertical é pontual.

c - RETA FRONTO-HORIZONTAL



CARACTERÍSTICAS

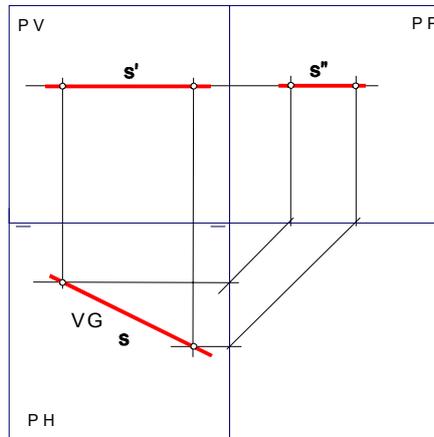
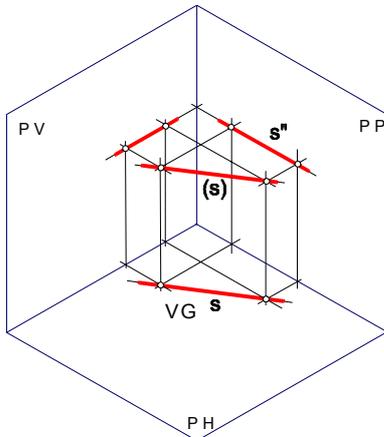
NO ESPAÇO a reta é:
paralela ao PH;
paralela ao PV;
perpendicular ao PP.

OS PONTOS da reta possuem:
abscissas diferentes
afastamentos iguais
cotas iguais

EM ÉPURA a projeção:
horizontal é paralela à LT
vertical é paralela à LT
a terceira projeção é pontual

RETAS PARALELAS A SOMENTE UM DOS PLANOS DE PROJEÇÃO

d - RETA HORIZONTAL



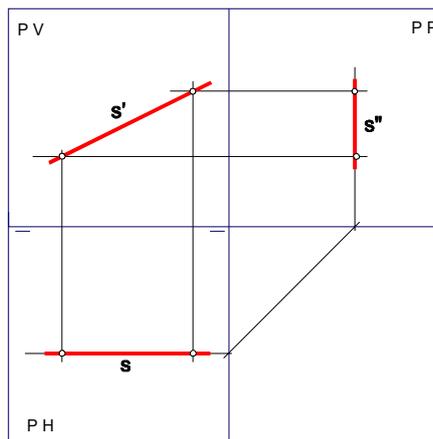
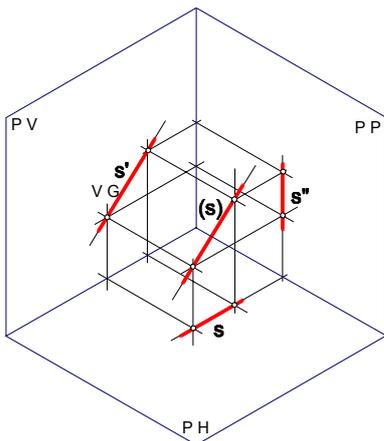
CARACTERÍSTICAS

No espaço a reta é:
paralela ao PH;
oblíqua ao PV;
oblíqua ao PP.

Os pontos da reta possuem:
abscissas diferentes;
afastamentos diferentes;
cotas iguais.

EM ÉPURA a projeção:
horizontal é oblíqua à LT;
vertical é paralela à LT.

e - RETA FRONTAL



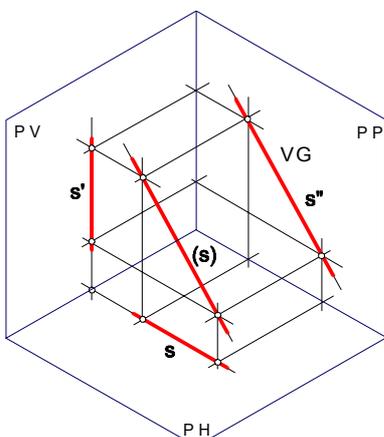
CARACTERÍSTICAS

NO ESPAÇO a reta é:
oblíqua ao PH;
paralela ao PV;
oblíqua ao PP.

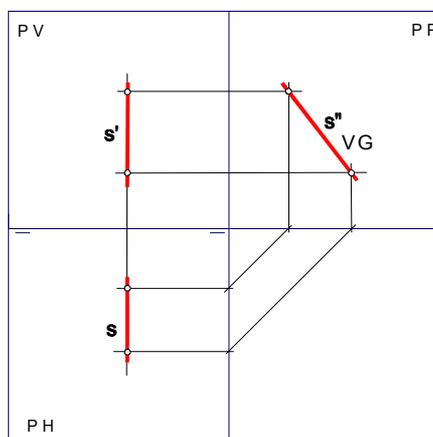
OS PONTOS da reta possuem:
abscissas diferentes;
afastamentos iguais;
cotas diferentes.

EM ÉPURA a projeção:
horizontal é paralela à LT;
vertical é oblíqua à LT.

f - RETA DE PERFIL



ORTOGONAL A LINHA DE TERRA

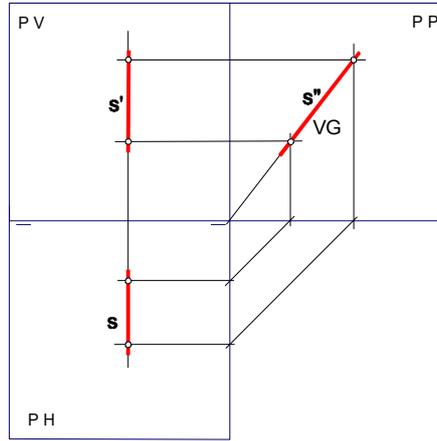
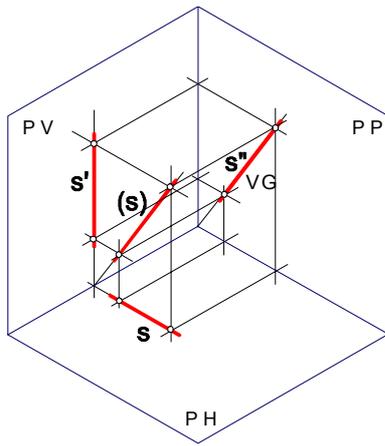


CARACTERÍSTICAS

NO ESPAÇO a reta é:
oblíqua ao PH;
oblíqua ao PV;
paralela ao PP.

OS PONTOS da reta possuem:
abscissas iguais
afastamentos diferentes
cotas diferentes

EM ÉPURA a projeção:
horizontal é perpendicular à LT
vertical é perpendicular à LT
possui VG na terceira projeção.

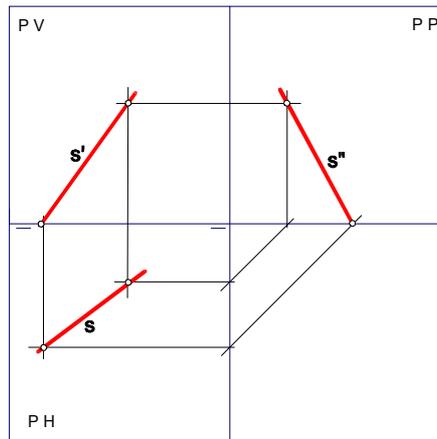
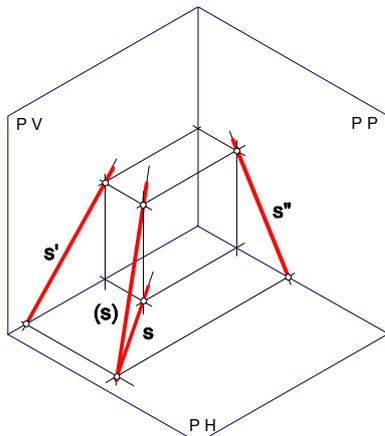


PERPENDICULAR A LINHA DE TERRA

Esta é a única reta que possui **verdadeira grandeza** somente na terceira projeção, daí alguns autores tratarem do assunto terceira projeção, voltados quase que exclusivamente para a reta de perfil.

A reta de perfil pode espacialmente tocar ou não a Linha de Terra, isto se reflete em é pura através de suas projeções. Observe as terceiras projeções destas retas de perfil, e compare-as. A última delas, possui afastamento nulo no mesmo ponto em que a cota também é nula, portanto é uma reta de perfil perpendicular à LT. A outra portanto será ortogonal à LT.

f - RETA QUALQUER



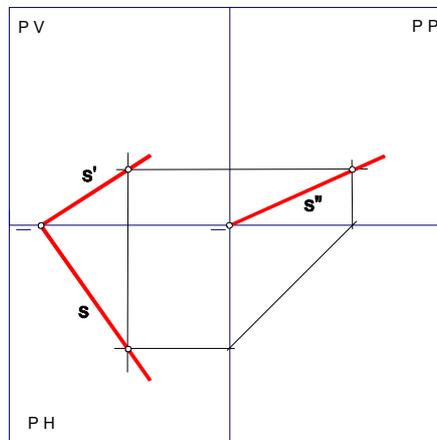
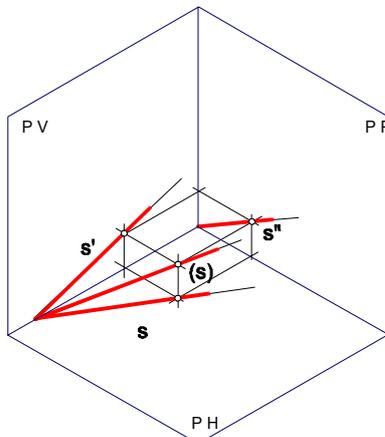
CARACTERÍSTICAS

NO ESPAÇO a reta é:
obliqua ao PH;
obliqua ao PV;
obliqua ao PP.

OS PONTOS da reta possuem:
abscissas diferentes;
afastamentos diferentes;
cotas diferentes.

EM É PURA a projeção:
horizontal é oblíqua à LT;
vertical é oblíqua à LT.

REVERSA À LINHA DE TERRA



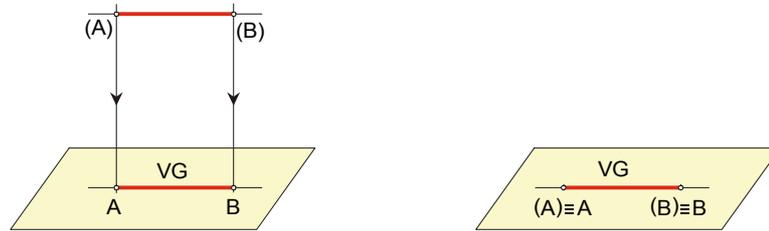
CONCORRENTE À LINHA DE TERRA

Da mesma forma que a reta de perfil, a reta qualquer também poderá tocar ou não a LT sendo classificada de concorrente ou reversa à LT respectivamente. Faça com elas a mesma comparação que foi feita entre as retas de perfil.

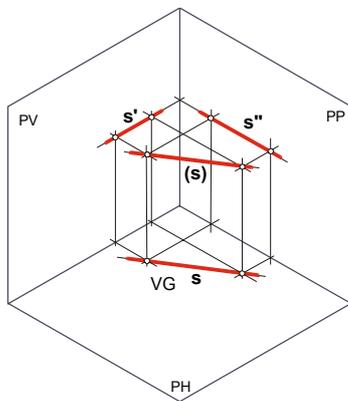
D - PARTICULARIDADES

O estudo das retas envolvem algumas particularidades, que destacaremos a seguir.

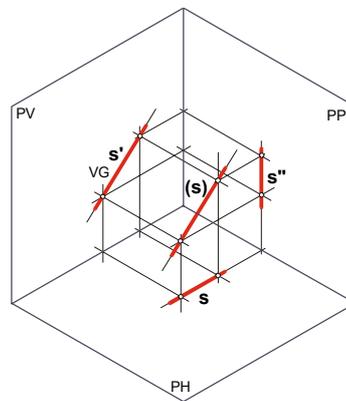
Toda a reta paralela a um plano de projeção, pode pertencer a ele, bastando que a coordenada correspondente seja nula. Isto implica que, espacialmente, a reta se torna coincidente com a própria projeção e pertencente ao plano.



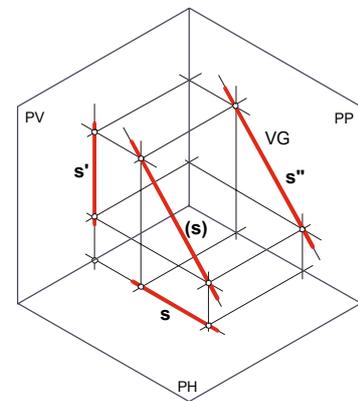
Assim sendo, as retas horizontal, frontal e de perfil que são paralelas a um dos planos de projeção ...



RETA HORIZONTAL

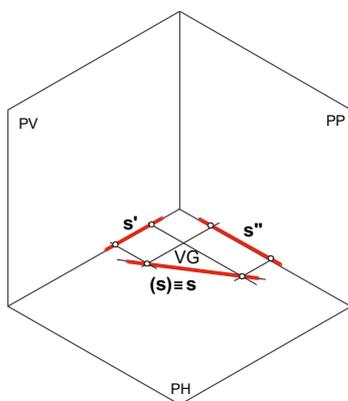


RETA FRONTAL

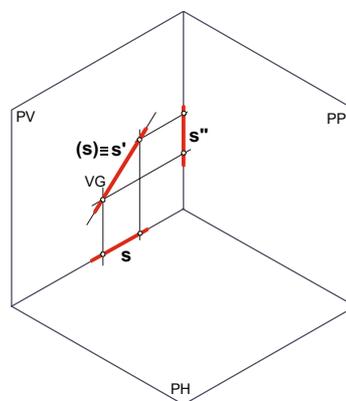


RETA DE PERFIL

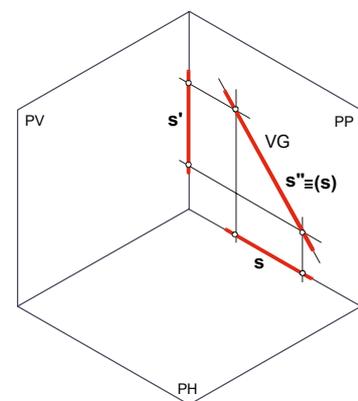
... podem pertencer a somente um dos planos de projeção.



RETA HORIZONTAL do PH



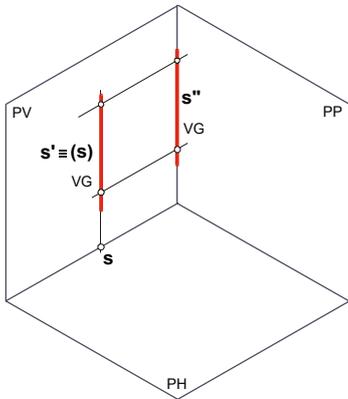
RETA FRONTAL do PV



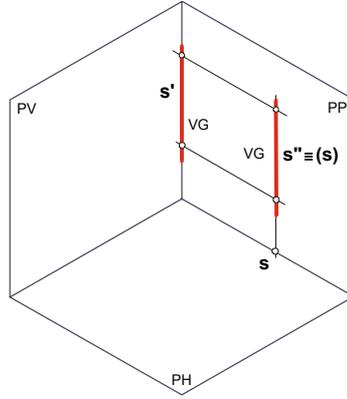
RETA DE PERFIL do PP

Para evidenciarmos esta condição particular da reta vamos acrescentar por "sobrenome" ,tal característica.

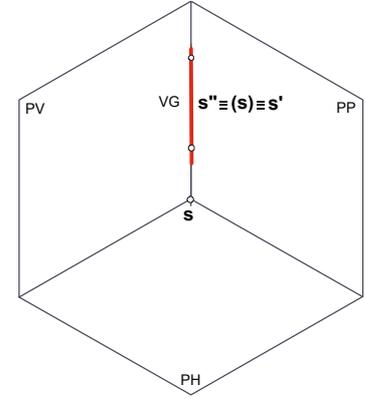
Já, as retas projetantes, podem pertencer até dois planos de projeção.



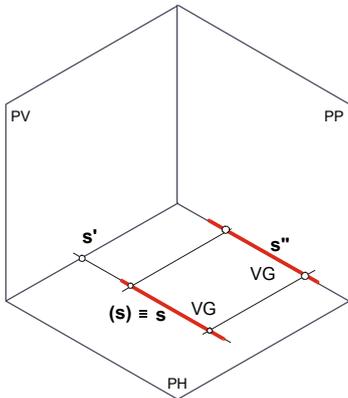
RETA VERTICAL do PV



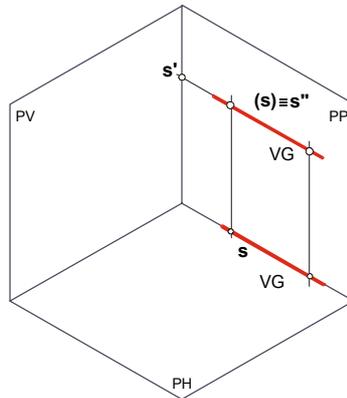
RETA VERTICAL do PP



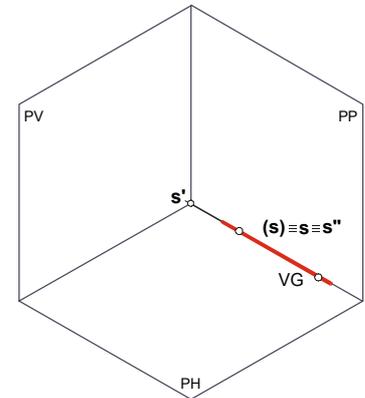
RETA VERTICAL do PV e do PP



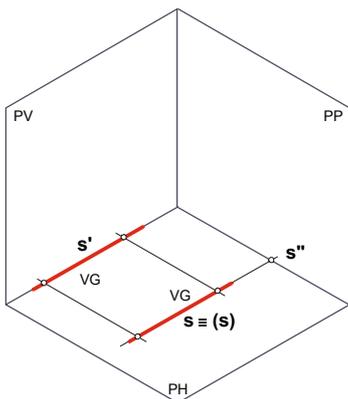
RETA de TOPO do PH



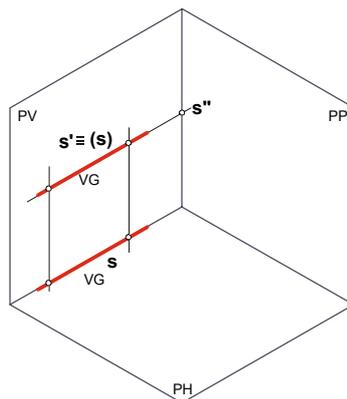
RETA de TOPO do PP



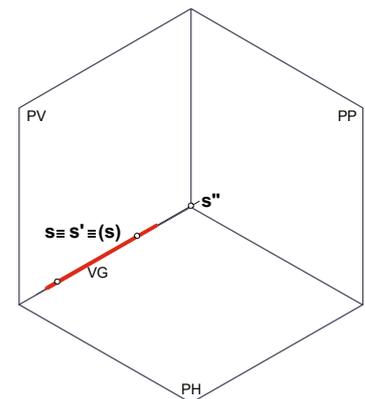
RETA de TOPO do PP



RETA FRONTO-HORIZONTAL do PH



RETA FRONTO-HORIZONTAL do PV



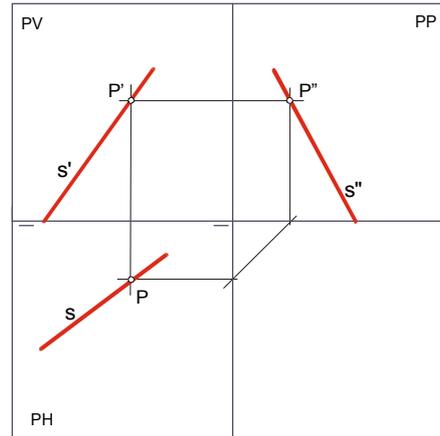
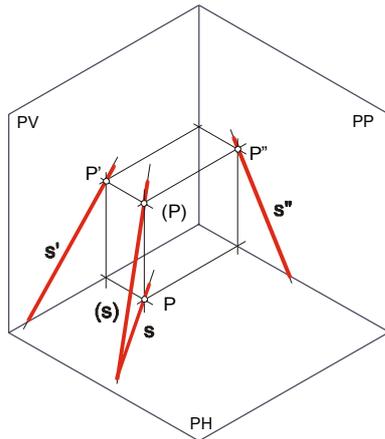
RETA FRONTO-HORIZONTAL do PV e do PH (Linha de Terra)

A única reta que não pode pertencer a nenhum dos planos de projeção é a reta qualquer, pois a mesma se encontra oblíqua aos três planos de projeção.

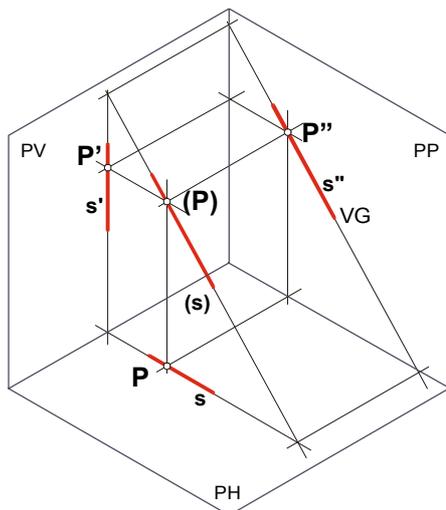
E - PERTINÊNCIA DE PONTO À RETA

Um ponto pertence a uma reta quando suas projeções pertencem às projeções de mesmo nome da reta, ou seja:

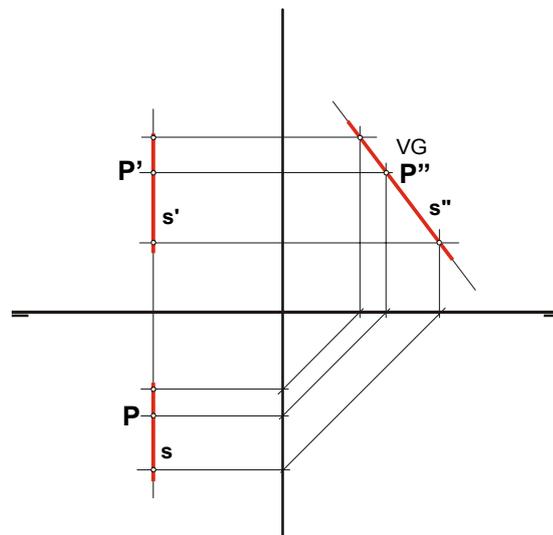
- a projeção **horizontal** do ponto sobre a projeção **horizontal** da reta
- a projeção **vertical** do ponto sobre a projeção **vertical** da reta
- a **terceira projeção** do ponto sobre a **terceira projeção** da reta



Qualquer que seja a reta e um ponto pertencente a ela, estas três condições deverão ser satisfeitas; **mas, excetuando-se a reta de perfil**, as demais retas podem ser analisadas apenas no diedro (PH e PV), ou seja, um ponto pertencerá a uma reta se as projeções do ponto pertencerem às respectivas projeções horizontal e vertical da reta.



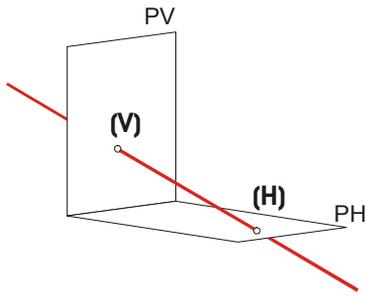
RETA DE PERFIL



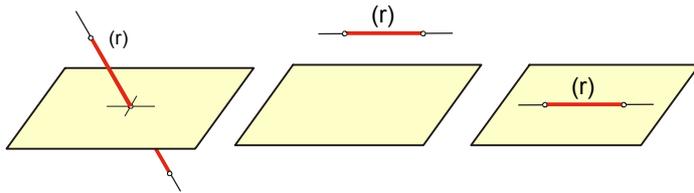
3ª PROJEÇÃO

Portanto, a reta de perfil deverá necessariamente ser analisada nas três projeções, o que implica na obtenção da terceira projeção.

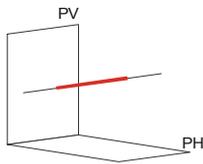
F - PONTO NOTÁVEIS DA RETA



São pontos nos quais uma reta atravessa planos também notáveis. Estaremos enfocando a interseção das retas com os planos horizontal e vertical de projeção. Estes pontos onde a reta "fura" o plano são denominados de **traços de reta**. (Na GD traço = interseção)



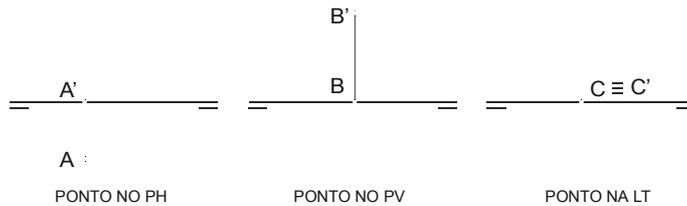
Uma reta somente possui traço sobre um plano quando for concorrente a este; estando equidistante (paralela ou pertencente) não possuirá o traço. Assim sendo, uma reta numa determinada posição pode possuir um ou mais traços.



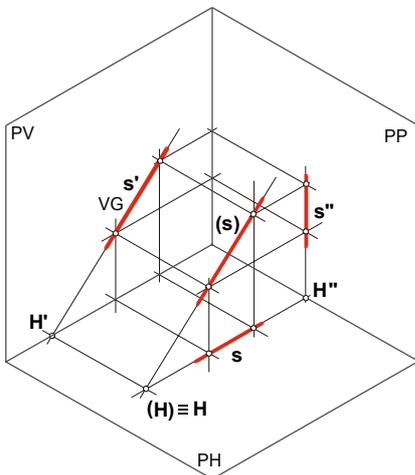
A exceção fica para a reta fronto-horizontal, que é a única reta equidistante dos planos analisados.

Traços da Reta nos Planos Horizontal e Vertical de Projeção

O traço de uma reta é sempre **um ponto único**, que pertence à reta e ao plano correspondente. Em relação aos planos horizontal e vertical no ambiente do Primeiro Diedro, a reta pode concorrer com eles em três posições genéricas: PH, PV e sobre a Linha de Terra. Então o que temos a fazer é a identificação da existência destes pontos na reta.



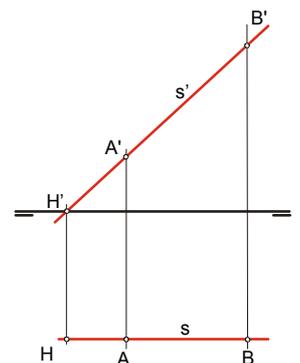
DETERMINAÇÃO DO TRAÇO HORIZONTAL



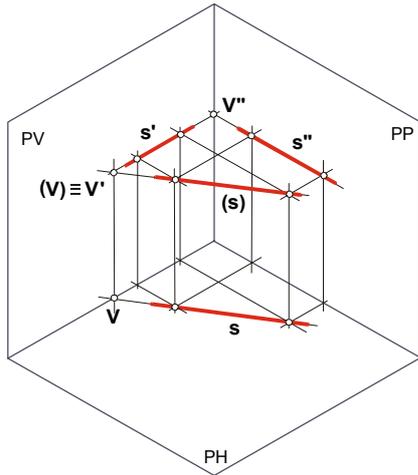
O traço horizontal (H) sempre pertencerá ao plano horizontal; assim, sempre terá **cota nula**.

Portanto, em épura prolonga-se a projeção vertical até a LT (onde a cota se torna nula) e determina-se a linha de chamada do ponto (H) procurado.

A projeção **H** pertencerá a projeção **s** e a projeção **H'** pertencerá a projeção **s'**.



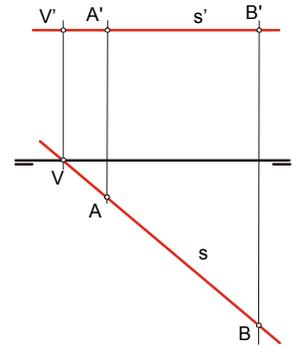
DETERMINAÇÃO DO TRAÇO VERTICAL



O traço vertical (V) sempre pertencerá ao plano vertical; assim, sempre terá **afastamento nulo**.

Portanto, em épora prolonga-se a projeção horizontal até a LT (onde o afastamento se torna nulo) e determina-se a linha de chamada do ponto (V) procurado.

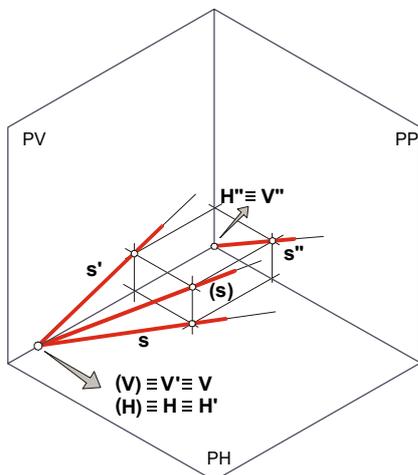
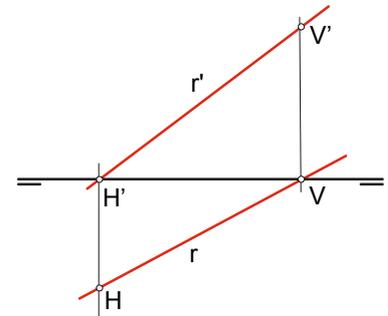
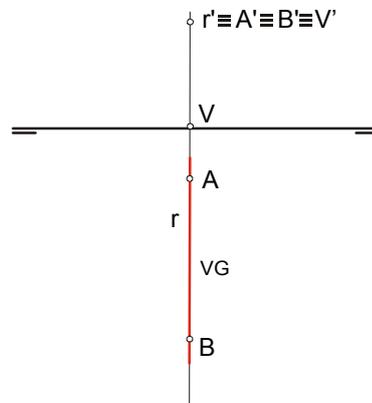
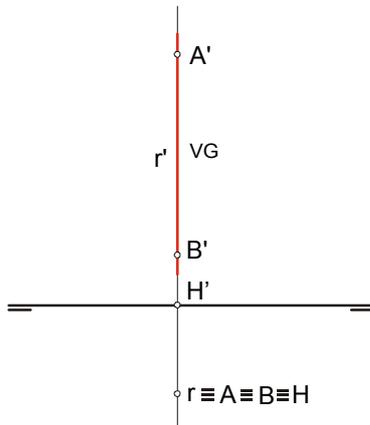
A projeção **V** pertencerá a projeção **s** e a projeção **V'** pertencerá a projeção **s'**.



EM RESUMO TEMOS:

Para determinarmos um traço prolonga-se inicialmente a projeção de nome contrário até que a mesma concorra com a LT, onde será deteminda a linha de chamado correspondente ao traço procurado.

Atenção: esta regra não é válida para a reta de perfil que exige a determinação de seus pontos na terceira projeção. Vejamos outros exemplos em épora.



Se a reta é concorrente à LT, mas possui dois traços (retas de perfil e qualquer), eles estarão coincidentes na própria LT, ou seja, o ponto de afastamento nulo, também é o ponto de cota nula. Atente para o fato de que dois pontos coincidentes não definem uma reta.

Observe nos exemplos anteriores que duas projeções encontram-se obrigatoriamente sobre a LT. São elas:

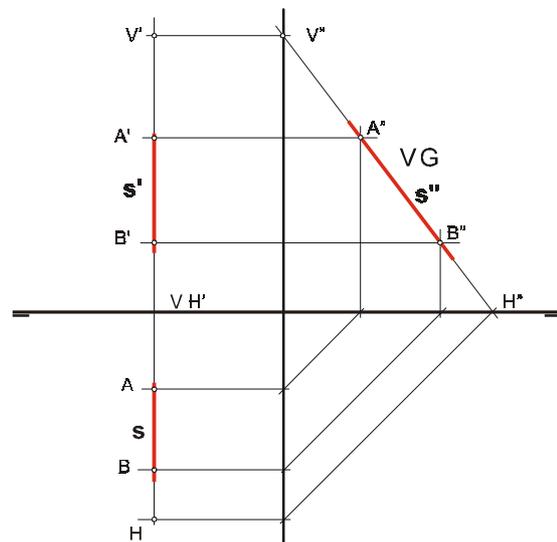
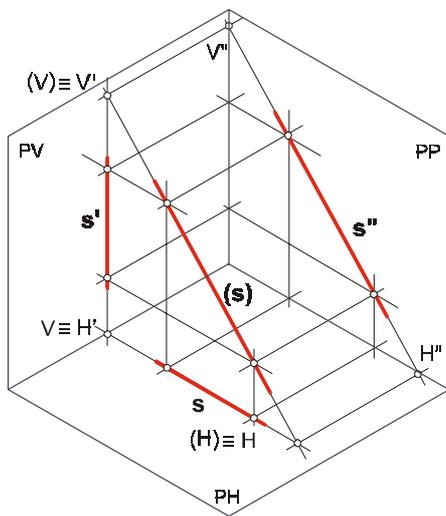
- V** - projeção horizontal do traço vertical (projeção referente ao afastamento nulo);
- H'** - projeção vertical do traço horizontal. (projeção referente a cota nula).

Ou seja, **V H'** na LT. Tome isto como regra.

TRAÇOS HORIZONTAL E VERTICAL NA RETA DE PERFIL

A obtenção dos traços horizontal e vertical na reta de perfil é realizada através da utilização da terceira projeção (vista lateral), pois neste tipo de reta a simples análise no diedro não é suficiente para a identificação da pertinência do ponto à reta.

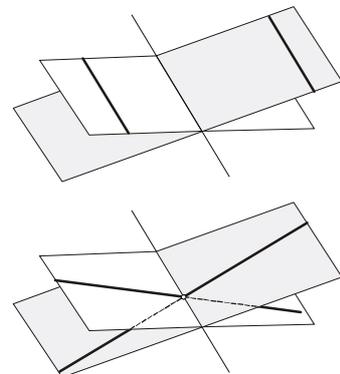
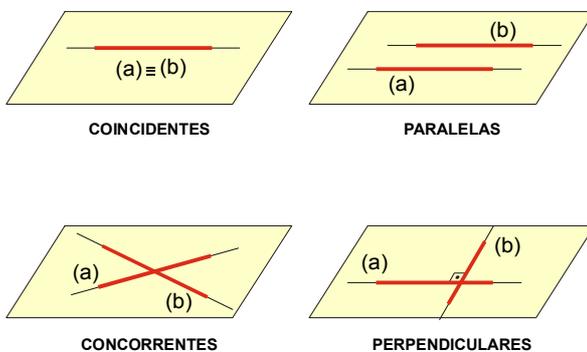
Desta maneira, temos que prolongar a terceira projeção da reta que encontrará as projeções H'' e V'' e retornar com as informações para a abscissa correspondente determinando assim as projeções dos traços horizontal e vertical respectivamente.



G - POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

a - Quando **coplanares** podem ser:

RETAS QUE ADMITEM A POSSIBILIDADE DE PERTENCEREM A UM MESMO PLANO

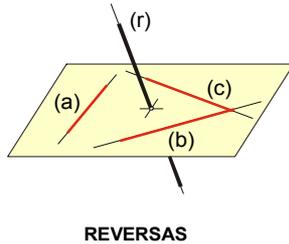


Quando concorrentes, e formarem um ângulo reto, são denominadas de retas perpendiculares

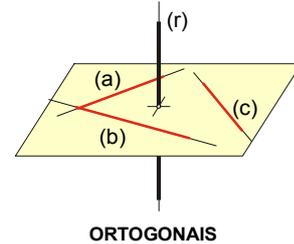
Tanto as retas paralelas, quanto as concorrentes, podem pertencer a planos distintos, mas ainda assim são consideradas coplanares, pois sempre existirá um plano que as contenham.

b - Quando não coplanares podem ser:

RETAS QUE NÃO ADMITEM A POSSIBILIDADE DE PERTENCEREM A UM MESMO PLANO



Todas as retas de um plano que não concorrem com uma reta oblíqua a ele são denominadas reversas, ou ainda revessas em relação à referida reta.



Todas as retas de um plano que não concorrem com uma reta perpendicular a ele são denominadas ortogonais em relação à referida reta.

Duas retas podem:

- não possuir ponto comum (paralelas e reversas) ;
- possuir um único ponto comum (concorrentes ou incidentes) ;
- possuir mais de um ponto comum (coincidentes) .

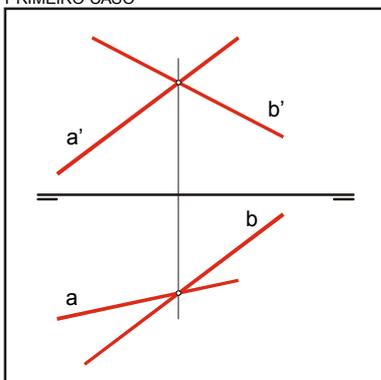
ANÁLISE DAS POSIÇÕES RELATIVAS EM ÉPURA

Com excessão das retas de perfil, poderemos, através da análise das projeções no diedro (PH e PV), conhecer qual é a posição relativa entre ambas, isto porque a reta de perfil necessita de ser analisada no triedro.

a -**Retas Concorrentes**: duas retas coplanares que possuem um único ponto comum são denominadas concorrentes ou incidentes.

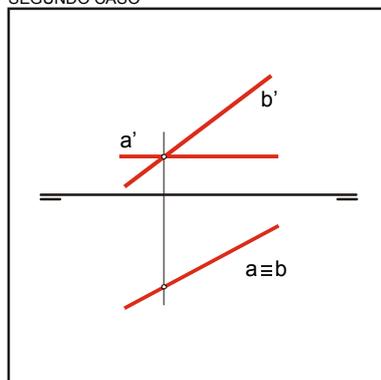
Teorema: duas retas concorrentes projetam-se em geral, segundo projeções concorrentes.

PRIMEIRO CASO



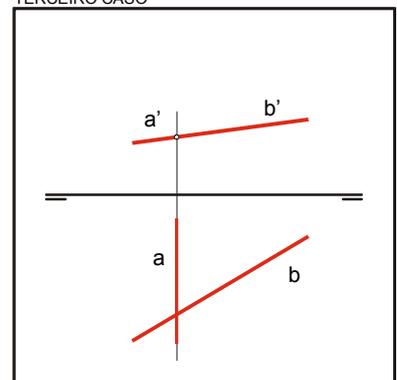
AS PROJEÇÕES DE MESMO NOME, DAS DUAS RETAS, CONCORREM EM UMA MESMA LINHA DE CHAMADA.

SEGUNDO CASO



DUAS PROJEÇÕES DE MESMO NOME, SE CONFUNDEM, E AS OUTRAS DUAS SÃO CONCORRENTES.

TERCEIRO CASO

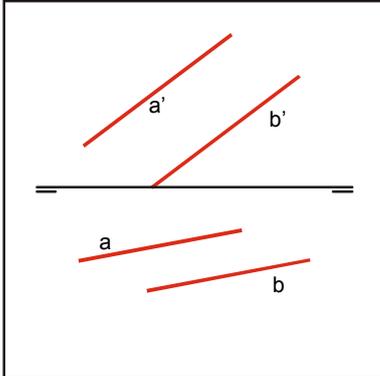


UMA PROJEÇÃO PONTUAL PERTENCE A PROJEÇÃO DE MESMO NOME DA OUTRA RETA.

b -Retas Paralelas: duas retas coplanares, que não possuem ponto comum são denominadas, retas paralelas.

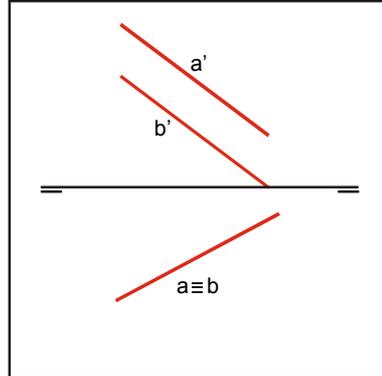
Teorema: duas retas paralelas projetam-se em geral, segundo projeções paralelas.

PRIMEIRO CASO



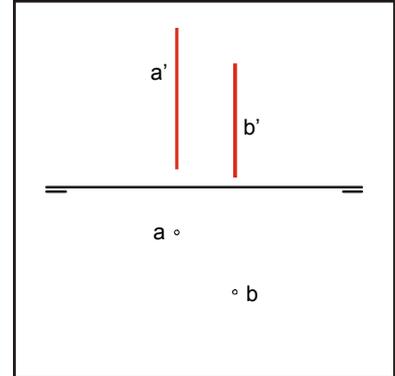
AS PROJEÇÕES DE MESMO NOME SÃO PARALELAS ENTRE SI.

SEGUNDO CASO



DUAS PROJEÇÕES DE MESMO NOME SE CONFUNDEM E AS OUTRAS DUAS SÃO PARALELAS.

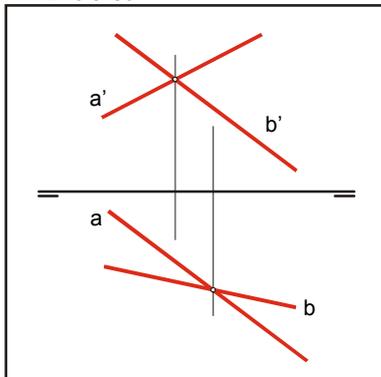
TERCEIRO CASO



DUAS PROJEÇÕES PONTUAIS DE MESMO NOME SÃO DISTINTAS.

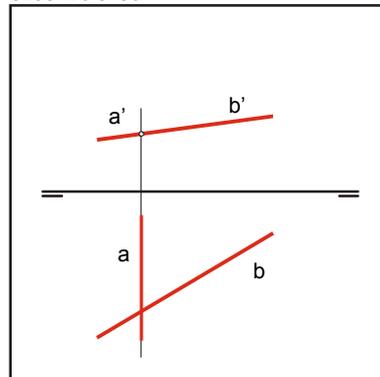
c -Retas Reversas: duas retas são reversas quando não possuírem ponto comum e não forem paralelas; portanto, poderemos identificá-las por exclusão, ou observando os dois casos abaixo.

PRIMEIRO CASO



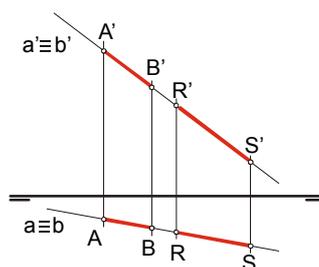
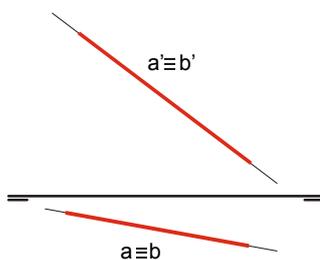
AS PROJEÇÕES DE MESMO NOME, DAS DUAS RETAS, **NÃO** CONCORREM EM UMA MESMA LINHA DE CHAMADA.

SEGUNDO CASO



UMA PROJEÇÃO PONTUAL **NÃO** PERTENCE À PROJEÇÃO DE MESMO NOME DA OUTRA RETA.

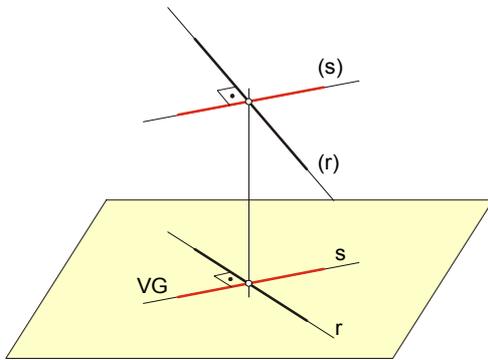
d -Retas Coincidentes: duas retas são coincidentes quando suas projeções de mesmo nome se confundem. Na prática, é uma única reta com dois nomes.



Atenção: podemos ter segmentos não coincidentes sobre retas coincidentes.

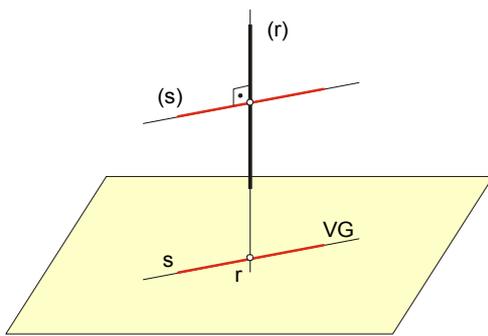
e -Perpendicularismo

Teorema de Monge: "Quando duas retas são perpendiculares entre si no espaço, sendo uma delas paralela a um plano dado, sem que a outra seja perpendicular ao plano, as projeções destas duas retas sobre o plano são perpendiculares entre si.



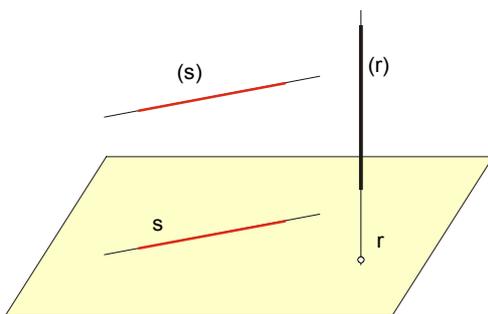
PERPENDICULARES

Em écura, isto significa que, se uma projeção de uma reta forma um ângulo reto com a projeção em VG de uma outra, as retas serão perpendiculares se concorrentes, e ortogonais se reversas



PERPENDICULARES

Mas quando uma for paralela e a outra perpendicular ao plano, basta a projeção pontual pertencer à outra projeção, e serão perpendiculares entre si no espaço ...



ORTOGONAIS

... contudo, se a projeção pontual estiver fora, serão ortogonais.

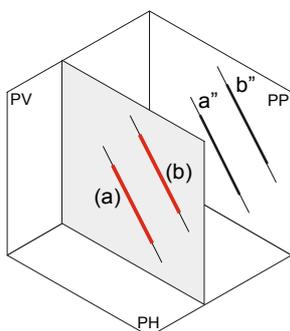
Observação: quando duas retas perpendiculares ou ortogonais no espaço (casos particulares de retas concorrentes e retas reversas respectivamente) estiverem oblíquas a um plano dado, serão identificadas como tal, quando da aplicação de métodos descritivos, que envolvem conteúdos avançados; mas por hora poderemos identificá-las como concorrentes ou reversas.

H - POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS DE PERFIL

No estudo das posições relativas entre duas retas de perfil, iremos recorrer ao uso da terceira projeção, também conhecida por vista lateral. Podemos encontrá-las em duas situações genéricas: quando possuem a mesma abcissa e quando as abcissas forem distintas.

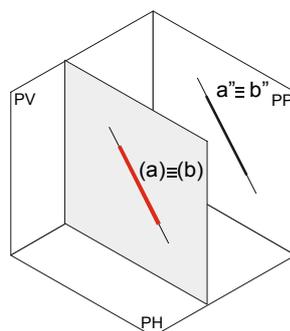
a - Duas Retas de Perfil em uma mesma abcissa.

POSSUINDO A MESMA ABCISSA, JAMAIS SERÃO REVERSAS OU ORTOGONAIS



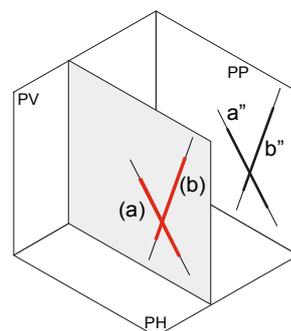
PARALELAS

terceiras projeções paralelas



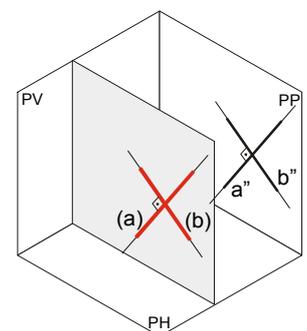
COICIDENTES

terceiras projeções coincidentes



CONCORRENTES

terceiras projeções concorrentes

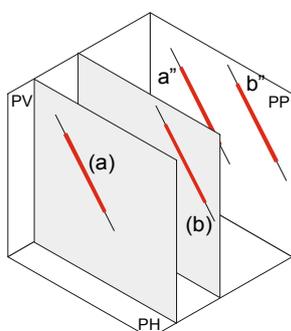


PERPENDICULARES

terceiras projeções perpendiculares

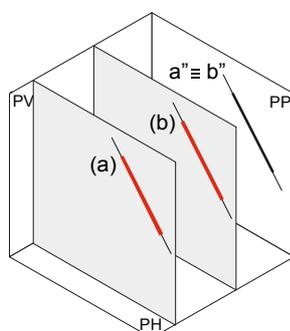
b - Duas Retas de Perfil em abcissas diferentes

POSSUINDO ABCISSAS DIFERENTES, JAMAIS SERÃO CONCORRENTES OU PERPENDICULARES



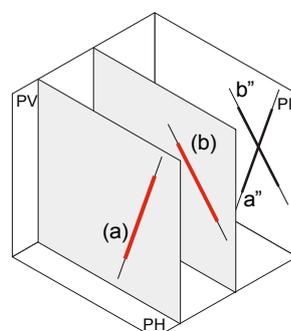
PARALELAS

terceiras projeções paralelas



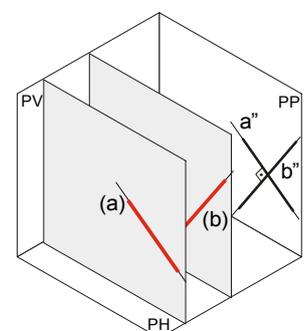
PARALELAS

terceiras projeções coincidentes



REVERSAS

terceiras projeções concorrentes



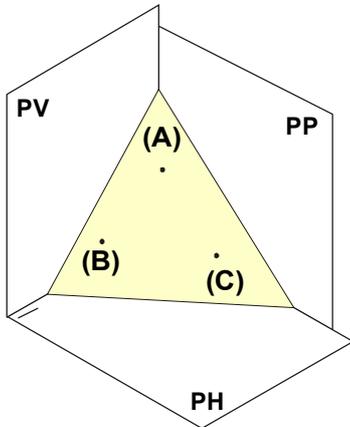
ORTOGONAIS

terceiras projeções perpendiculares

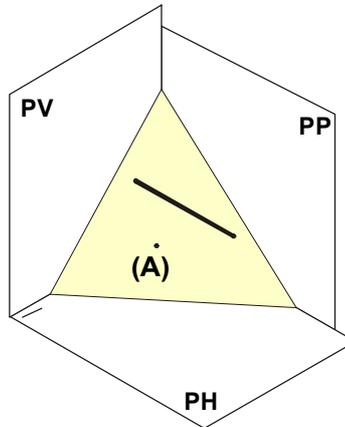
ESTUDO DOS PLANOS

A - DETERMINAÇÃO DE PLANOS

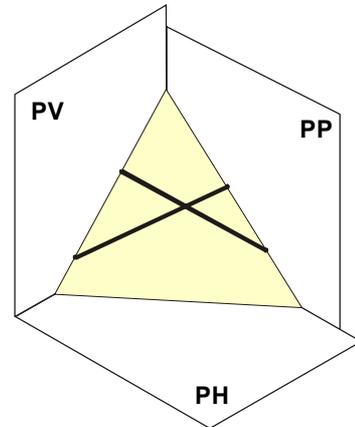
Na geometria elementar temos planos definidos por:



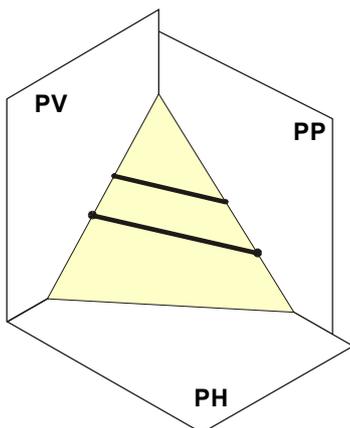
TRÊS PONTOS DISTINTOS
NÃO COLINEARES



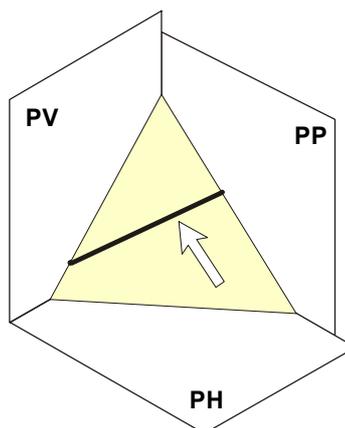
UMA RETA E UM PONTO
EXTERIOR A ELA



DUAS RETAS
CONCORRENTES



DUAS RETAS
PARALELAS

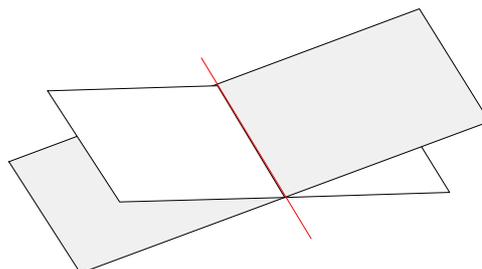


UMA RETA E
UMA DIREÇÃO

Tal qual as retas, os planos podem ocupar várias posições em relação aos planos de projeção, recebendo por isso nomes diferentes.

A GD representa os planos, além dos modos fornecidos pela geometria elementar, pelos seus traços.

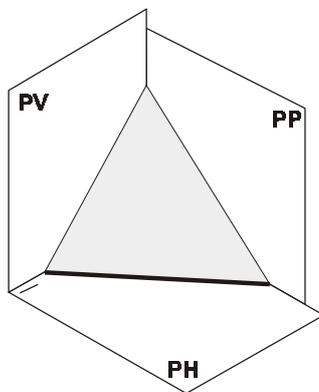
Traço de plano é a reta resultante da interseção deste em outro plano.



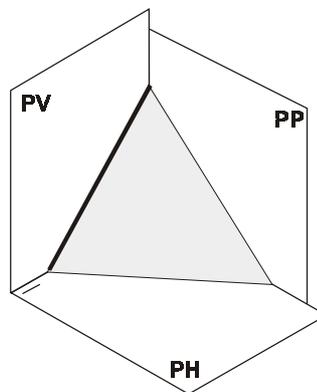
O traço de um plano sobre o plano horizontal de projeção é uma reta de cota nula, sendo denominada de **TRAÇO HORIZONTAL**.

O traço de um plano sobre o plano vertical de projeção é uma reta de afastamento nulo, sendo denominada de **TRAÇO VERTICAL**.

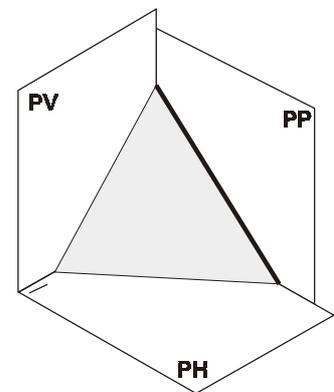
Denominaremos de **TERCEIRO TRAÇO** ou traço de perfil, a interseção do plano com o plano de perfil. Este traço será uma reta de abscissa constante.



TRAÇO HORIZONTAL

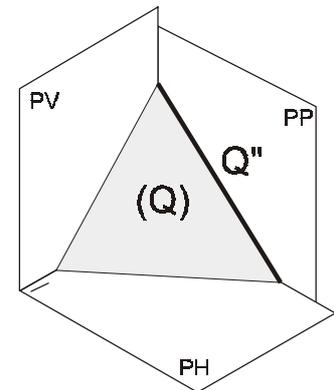
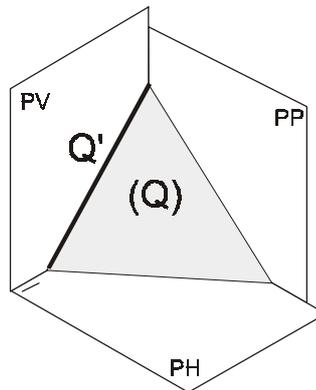
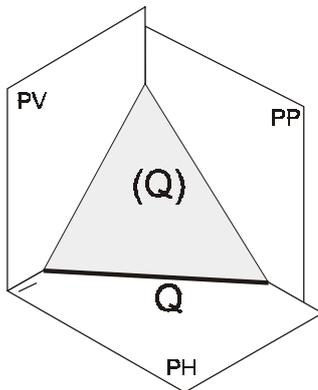


TRAÇO VERTICAL

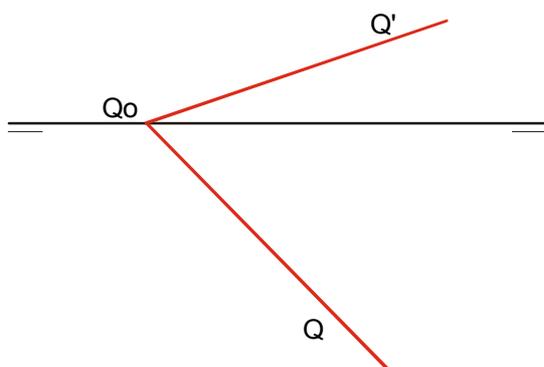


TERCEIRO TRAÇO

Estaremos adotando as iniciais dos nomes genéricos dados aos planos na língua portuguesa. Utilizando por exemplo o plano (Q) temos:



As posições dos traços de um plano em relação à LT são variáveis, isto é, podem os traços ocupar posições diferentes, conforme a situação do plano, mas quando um plano for oblíquo à LT, determinará sobre ela um único ponto de concorrência. Deste ponto nascem os traços horizontal e vertical.



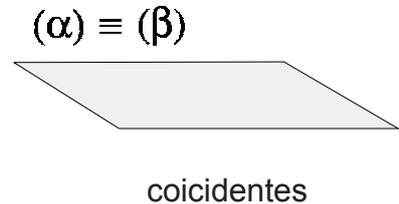
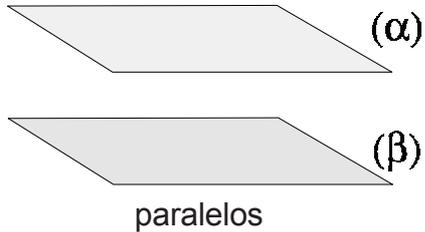
O valor da abscissa deste ponto, permite determinar os traços dos planos a partir do conhecimento da angulação destes com a LT.

Este ponto recebe a notação em épura de **Qo** para um plano (**Q**), **To** para um plano (**T**) e assim por diante. Lembre-se que ele possui afastamento e cota nulos, podendo sua abscissa, assumir diferentes valores.

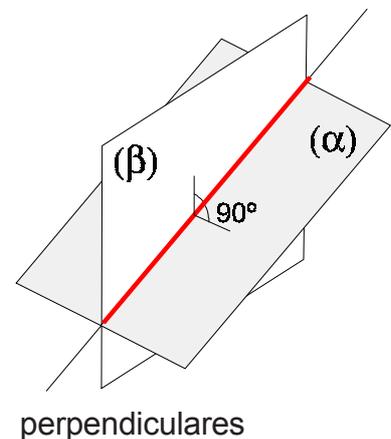
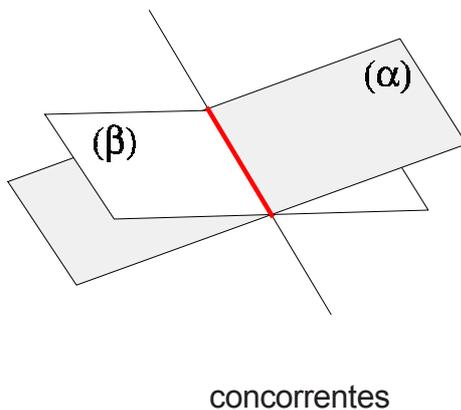
B - POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DOIS PLANOS

Um plano em relação a outro plano poderá estar oblíquo ou equidistante.

a) - quando equidistantes

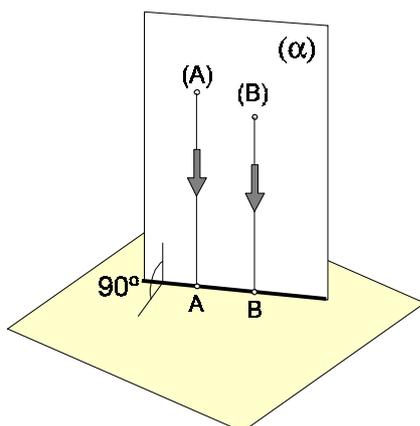


b) - quando oblíquos



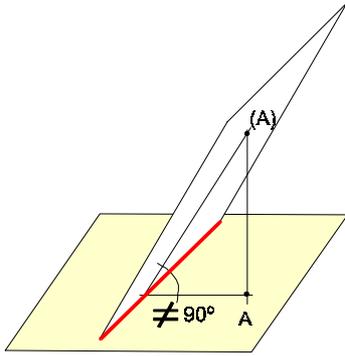
Na GD quando um plano está perpendicular a um plano de projeção, ele é denominado de plano projetante. Esta particularidade, se bem entendida, facilitará em muito o estudo dos planos, portanto antes de classificarmos os planos segundo suas posições em relação aos planos de projeção, detalharemos melhor os planos projetantes.

Denominaremos o traço de um plano perpendicular a outro, de **traço projetante**, sendo portanto, o resultado do perpendicularismo de um plano em relação a um plano de projeção.



Observe que as linhas projetantes ao incidirem perpendicularmente sobre o plano de projeção tem suas trajetórias sobre o plano (α) , o que implica na localização das projeções dos elementos pertencentes a este plano, sobre o próprio traço projetante.

Quando um plano é projetante, seu traço representa, não somente a si próprio, mas também a toda infinita superfície plana.



Quando um plano não é projetante, seu traço traduz tão somente sua interseção com o plano de projeção, portanto os elementos pertencentes ao plano, mas que não estão no traço, projetam-se fora deste.

Então podemos concluir que:

O traço projetante recebe sobre si todas as projeções de mesmo nome, dos elementos pertencentes ao plano.

Tome isto como regra.

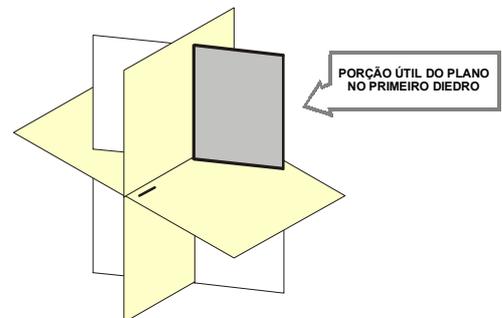
Isto significa que:

- o traço horizontal quando projetante recebe as projeções horizontais dos elementos pertencentes ao plano;
- o traço vertical quando projetante recebe as projeções verticais dos elementos pertencentes ao plano;
- se analisarmos o plano ao nível do triedro então um plano projetante em relação ao plano de perfil terá seu terceiro traço recebendo as terceiras projeções dos elementos pertencentes ao plano.

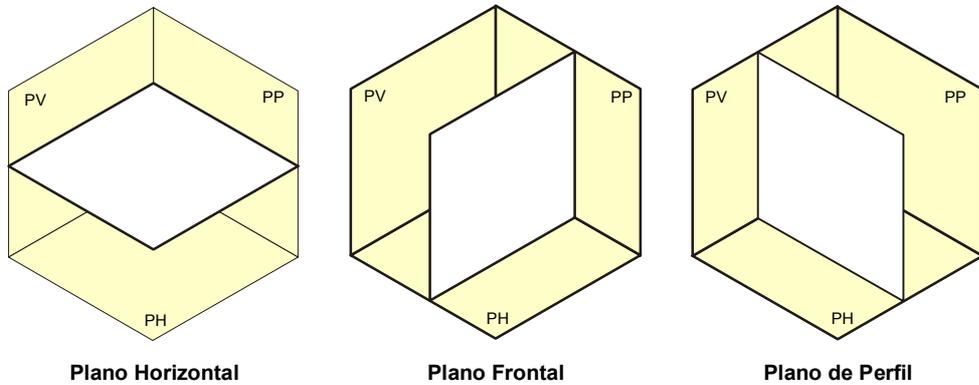
C - CLASSIFICAÇÃO DOS PLANOS

Os planos são ilimitados, o que permite que os mesmos alcancem mais de um diedro. Contudo, priorizaremos o estudo dos planos às suas porções úteis no primeiro diedro. Chama-se porção útil de um plano num diedro à parte do plano compreendida por seus traços nesse diedro.

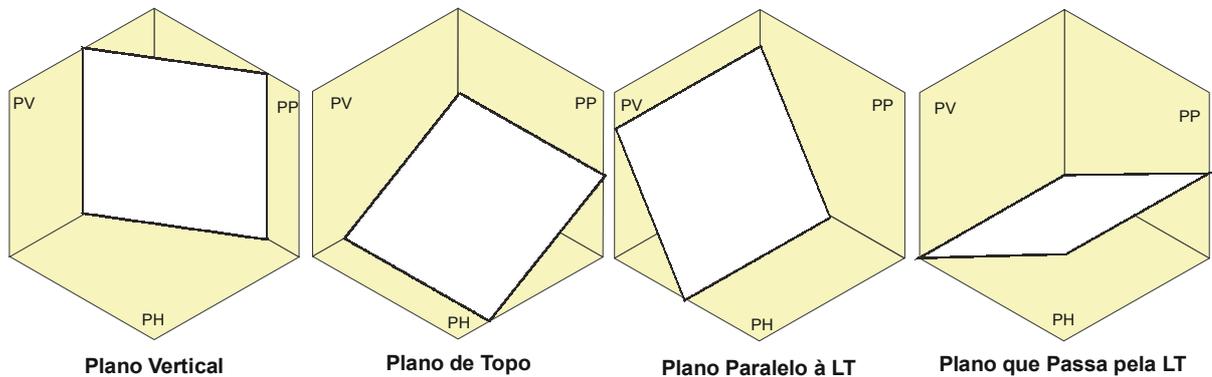
Analisados em relação aos três planos de projeção, os planos podem ser distribuídos em três grupos.



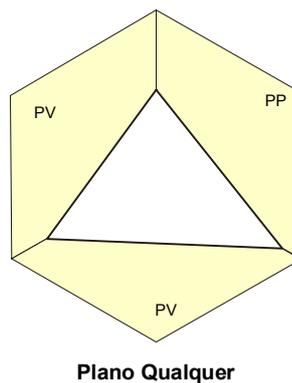
Grupo 1 - Grupo dos planos que são paralelos a um dos planos de projeção, e conseqüentemente, perpendiculares (projetantes) aos outros dois.



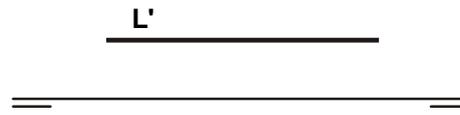
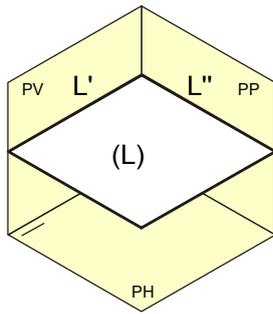
Grupo 2 - Grupo dos planos que são perpendiculares a somente um dos planos de projeção, e conseqüentemente, oblíquos aos outros dois.



Grupo 3 - Grupo dos planos que são oblíquos aos três planos de projeção, conseqüentemente, jamais será paralelo ou perpendicular a qualquer um dos planos de projeção.



1 - PLANO HORIZONTAL OU DE NÍVEL (plano projetante no PV e no PP)



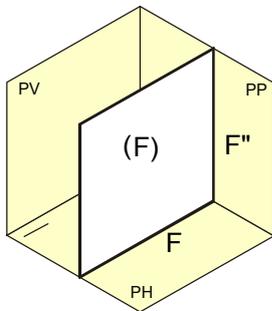
Características no Espaço

paralelo ao PH
perpendicular ao PV
perpendicular ao PP

Características em Épura (diedro)

possui apenas o traço vertical paralelo à LT

2 - PLANO FRONTAL OU DE FRENTE (plano projetante no PH e no PP)



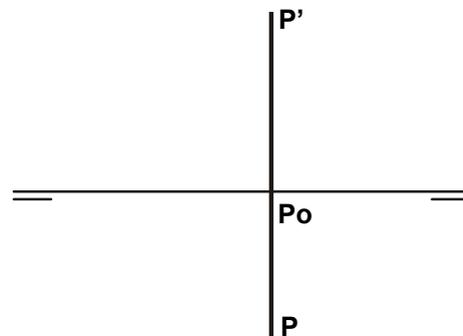
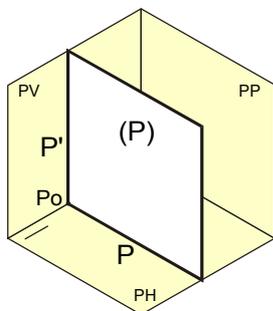
Características no Espaço

perpendicular ao PH
paralelo ao PV
perpendicular ao PP

Características em Épura (diedro)

possui apenas o traço horizontal paralelo à LT

3 - PLANO DE PERFIL (plano projetante no PH e PV)



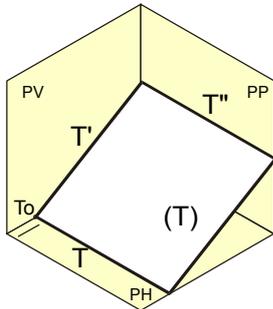
Características no Espaço

perpendicular ao PH
perpendicular ao PV
paralelo ao PP

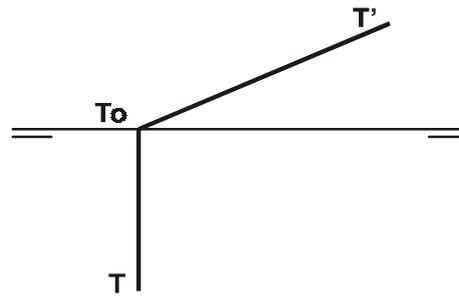
Características em Épura (diedro)

os traços horizontal e vertical são perpendiculares à LT

4 - PLANO DE TOPO (plano projetante no PV)

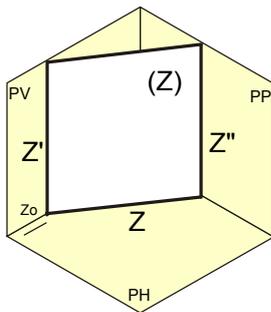


Características no Espaço
 oblíquo ao PH
 perpendicular ao PV
 oblíquo ao PP

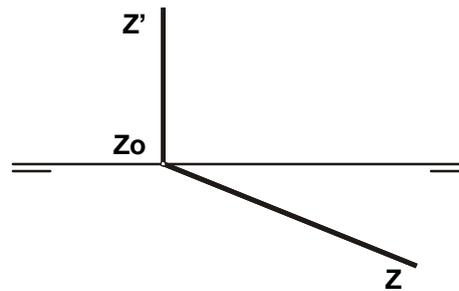


Características em Épura (diedro)
 o traço vertical oblíquo à LT
 o traço horizontal perpendicular à LT

5 - PLANO VERTICAL (plano projetante no PH)

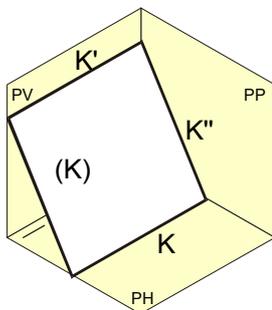


Características no Espaço
 perpendicular ao PH
 oblíquo ao PV
 oblíquo ao PP

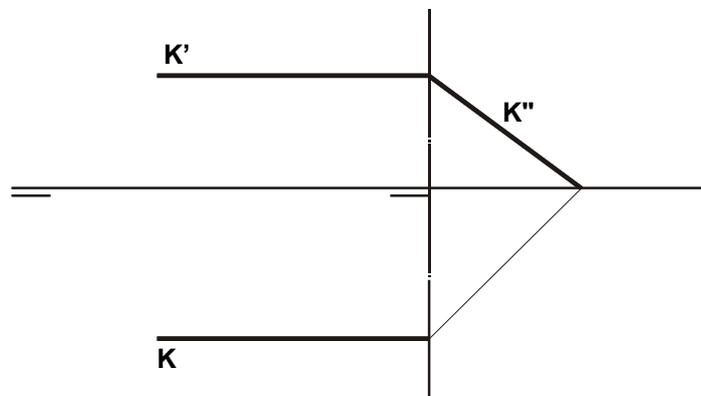


Características em Épura (diedro)
 traço horizontal oblíquo à LT
 traço vertical perpendicular à LT

6 - PLANO PARALELO À LT (plano projetante no PP)



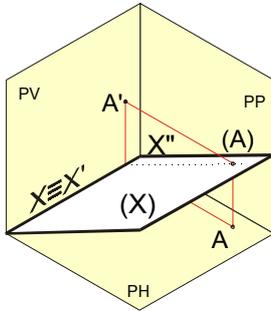
Características no Espaço
 oblíquo ao PH
 oblíquo ao PV
 perpendicular ao PP



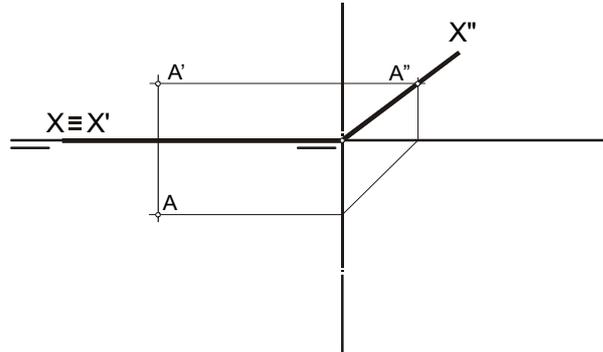
Características em Épura (diedro)
 traço horizontal e vertical paralelos à LT

7 - PLANO QUE PASSA PELA LT (plano projetante no PP)

Este plano não consegue ser definido por seus traços no diedro, pois para os mesmos traços pode o plano assumir diferentes angulações com o PV e o PH, necessitando portanto, de um ponto que o fixe no espaço. No exemplo abaixo o ponto (A) é o ponto auxiliar.

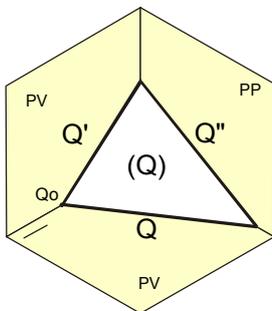


Características no Espaço
 oblíquo ao PH
 oblíquo ao PV
 perpendicular ao PP

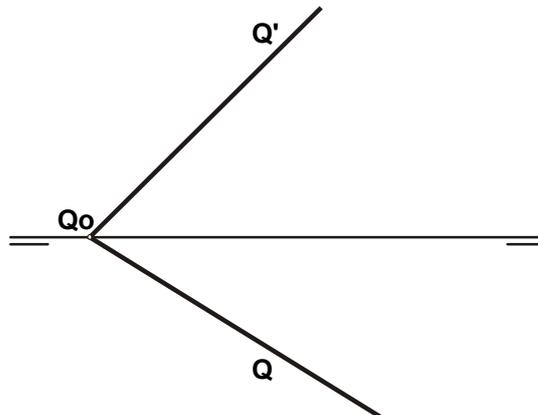


Características em Épura (diedro)
 traços horizontal e vertical coincidentes com a LT

8 - PLANO QUALQUER (ÚNICO PLANO NÃO PROJETANTE)



Características no Espaço
 oblíquo ao PH
 oblíquo ao PV
 oblíquo ao PP

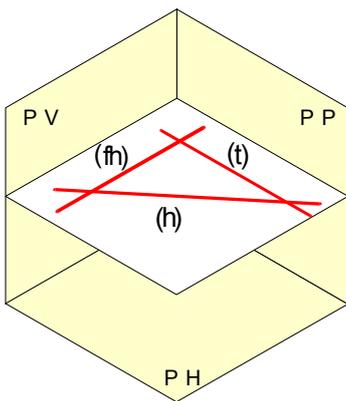


Características em Épura (diedro)
 traço horizontal oblíquo à LT
 traço vertical oblíquo à LT

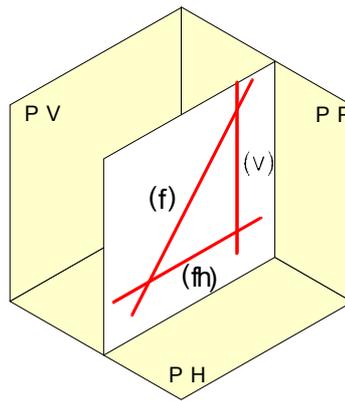
D - RETAS DO PLANO

Antes de analisarmos em épura, a pertinência das retas aos planos, apresentaremos os tipos de retas genéricas que cada plano pode conter. Atente para o fato de que o plano qualquer é o único plano que contém quatro tipos diferentes de retas, enquanto os demais, apenas três. Lembre-se que os traços dos planos (que são retas), já revelam tipos de retas pertencíveis ao plano.

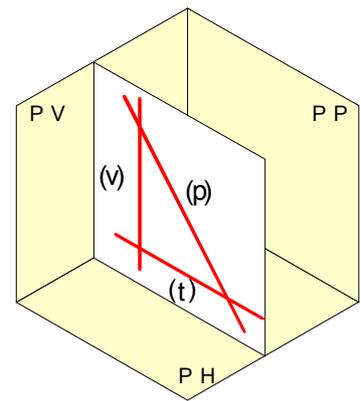
h = horizontal f = frontal v = vertical t = de topo fh = fronto-horizontal p = de perfil q = qualquer



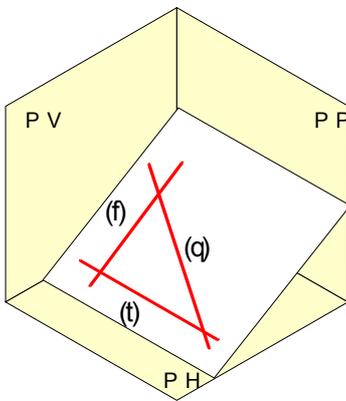
Plano Horizontal



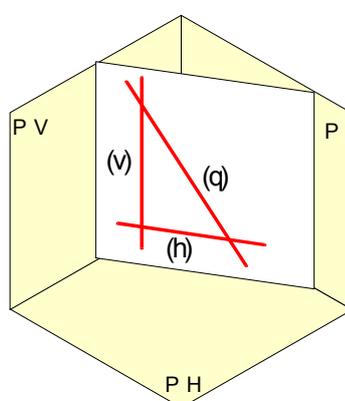
Plano Frontal



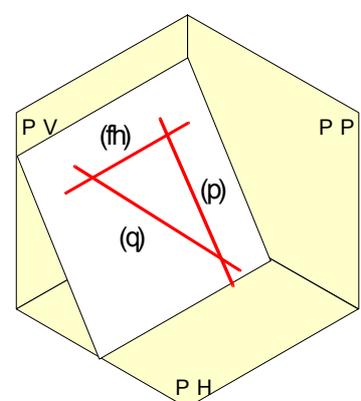
Plano de Perfil



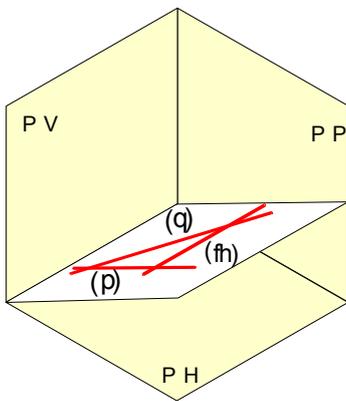
Plano de Topo



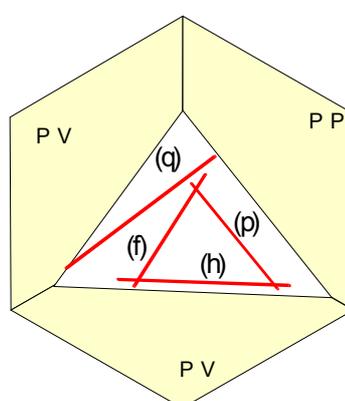
Plano Vertical



Plano Paralelo à LT



Plano que Passa pela LT



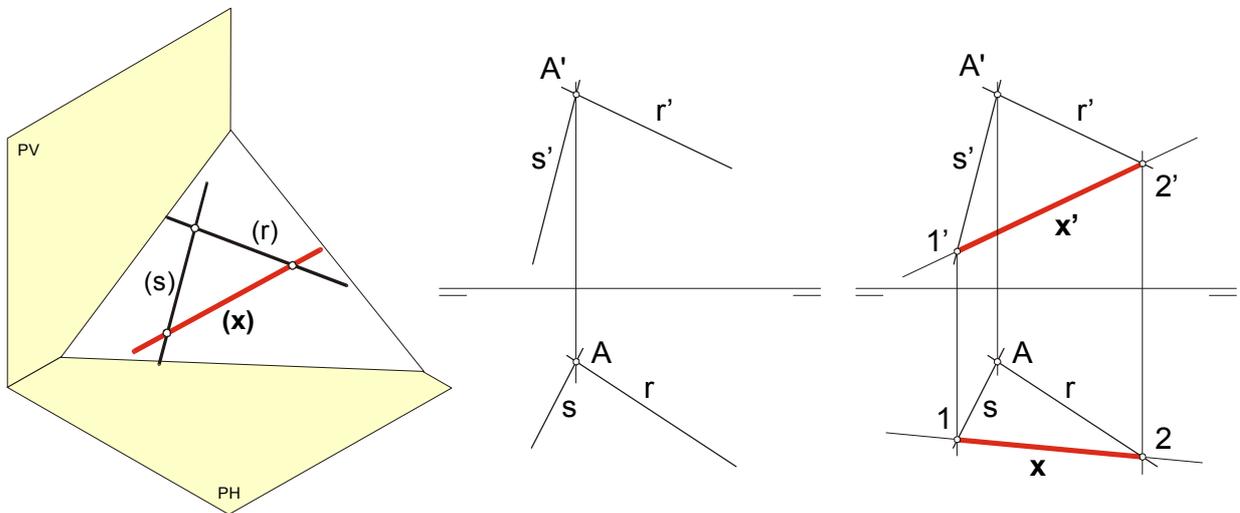
Plano Qualquer

E - PERTINÊNCIA DE RETA A PLANO EM ÉPURA

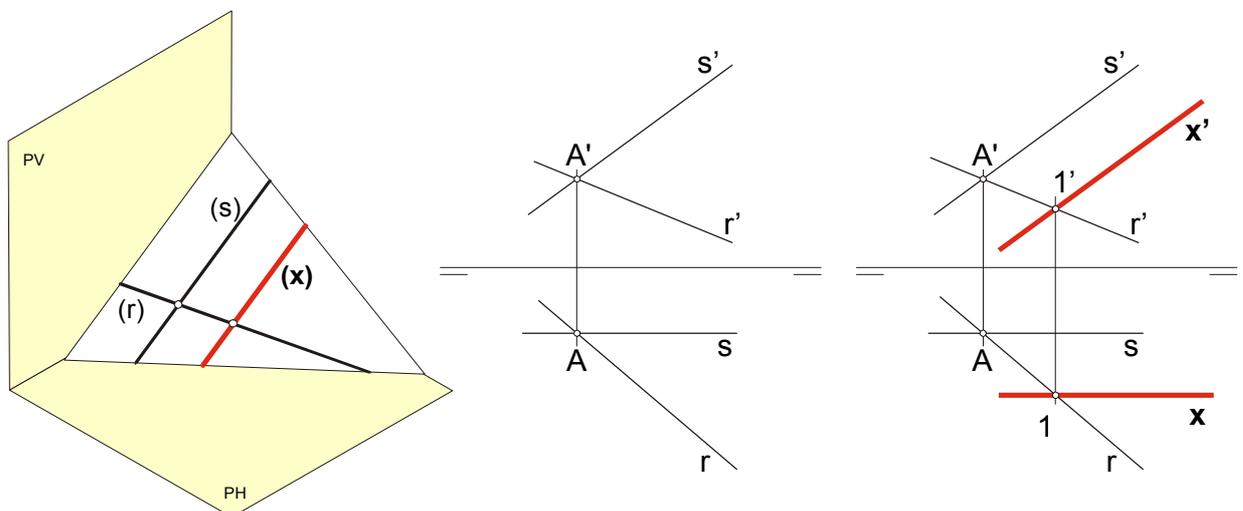
De maneira prática uma reta pertence a um plano quando possui dois pontos distintos sobre ele. Apresentaremos **cinco** condições para uma reta pertencer a um plano para análise em épura.

As condições 1 e 2 não requerem a utilização dos traços do plano.

1 - Toda reta concorrente com duas retas de um plano, em pontos distintos, pertence ao plano

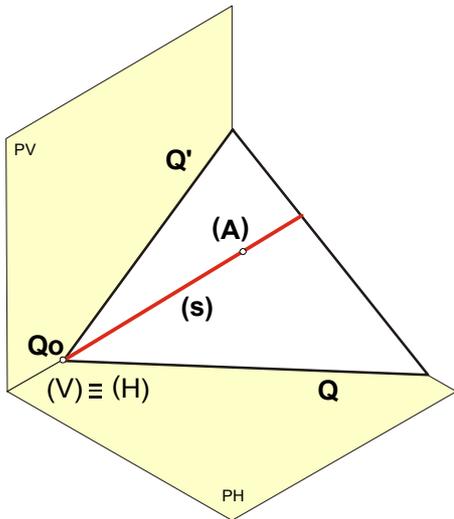
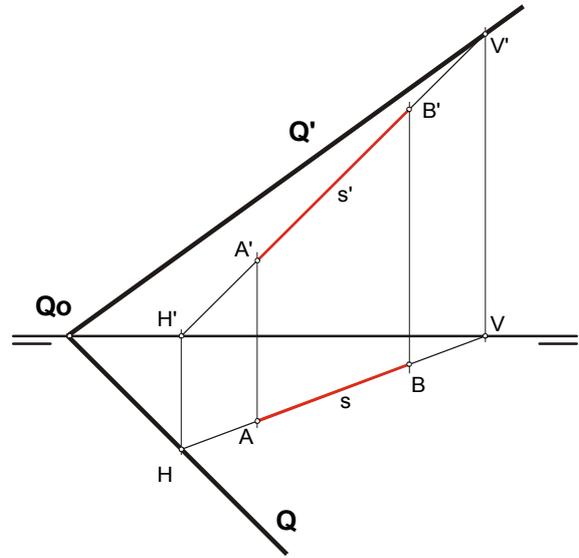
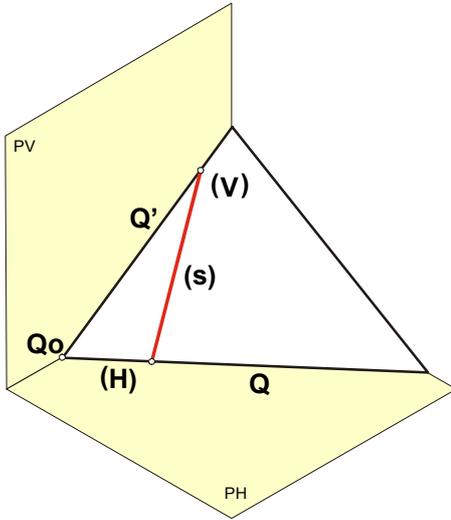


2 - Toda reta concorrente com uma reta de um plano **e paralela a outra** do mesmo plano está contida no plano.



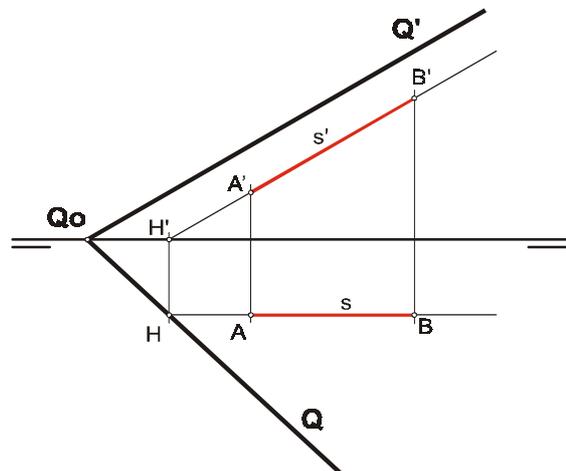
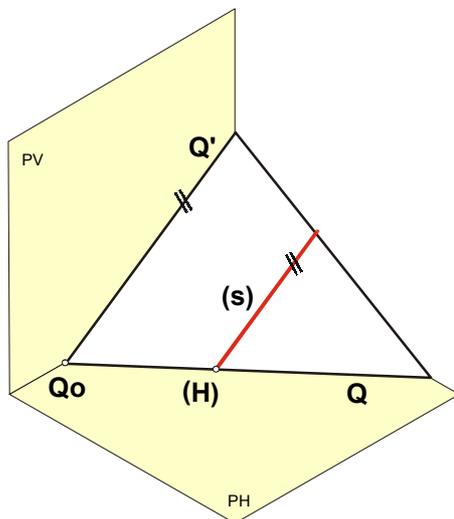
As condições 3 e 4 utilizam-se dos traços do plano

3 - Toda reta que tem seus traços (V) e (H) distintos, sobre os traços de mesmo nome do plano, está contida no plano.



Quando uma reta (qualquer ou perfil) possuir os dois **traços**, e estes forem **coincidentes** (isto só acontece na LT), embora sejam dois, geometricamente se constituem em um único ponto, o que não é suficiente para determinar a pertinência da reta sobre o plano. Neste caso, faz-se necessário a **utilização de um ponto auxiliar** sobre o plano. Veja o exemplo em épura na página 54 para a reta de perfil e 60 para a reta qualquer.

4 - Toda reta que se apóia em um dos traços do plano e é paralela ao outro, está contida no plano.

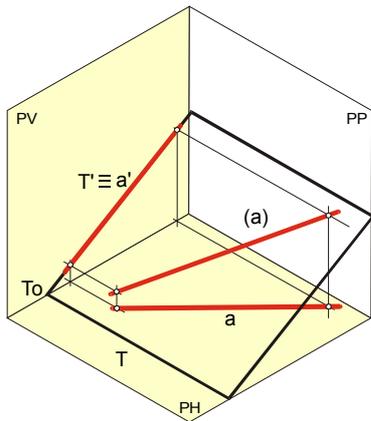


5 - CASO IMEDIATO (PLANOS PROJETANTES) - Toda reta (neste caso válido para qualquer ente geométrico possível de pertencer a um plano) que possui sua projeção sobre o traço projetante de mesmo nome, pertence ao plano. (Ver páginas 41 e 42)

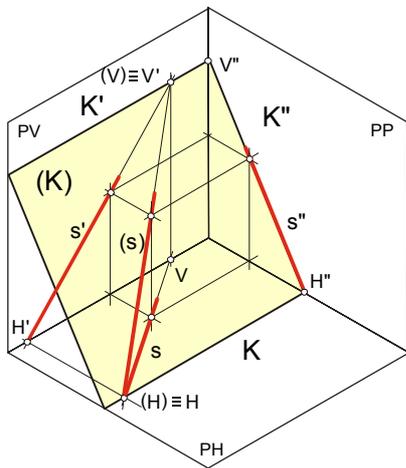
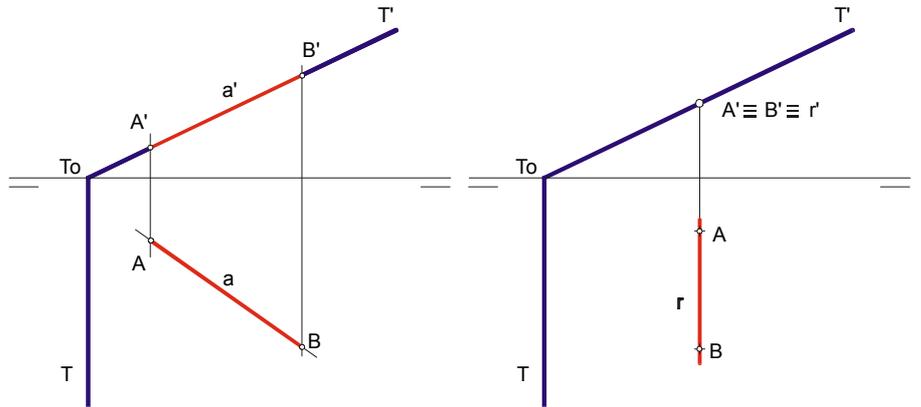
Observe que o único plano não projetante é o plano qualquer, portanto este está fora desta análise.

Os demais planos poderão ser analisados no diedro, exceto os planos paralelos à LT e os planos que passam pela LT, que deverão ser analisados no triedro (uso da terceira projeção).

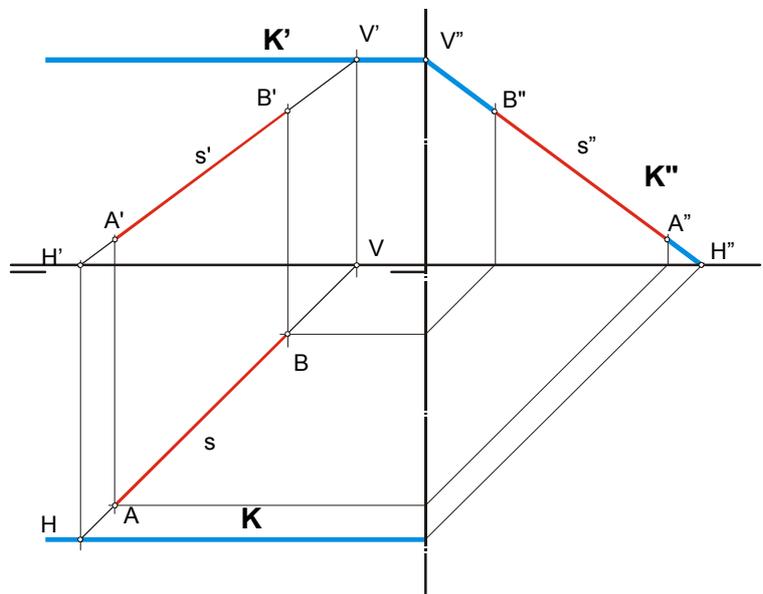
É importante salientar que nesta condição de análise, não se necessita dos traços da reta, mas quando determinados obedecerão às condições respectivas expostas anteriormente.



Plano de Topo

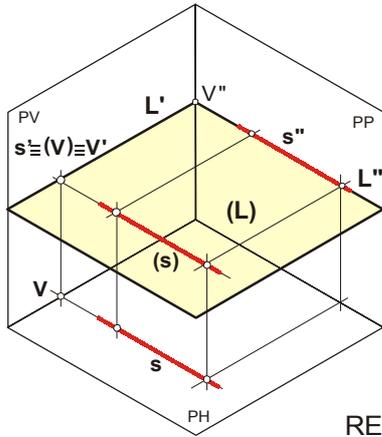


PLANO PARALELO À LT
PLANO PROJETANTE NO PP

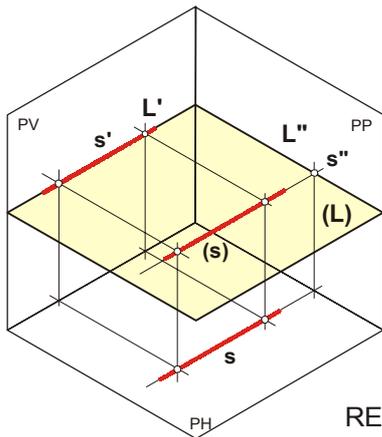
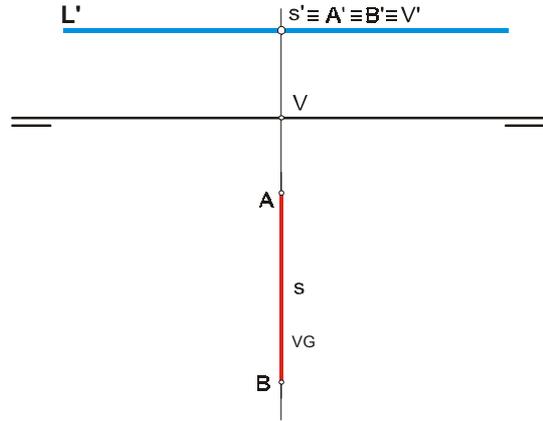


A seguir apresentaremos através da perspectiva e da épura as retas pertencentes a cada plano, observe que os traços das retas pertencem aos traços de mesmo nome do plano.

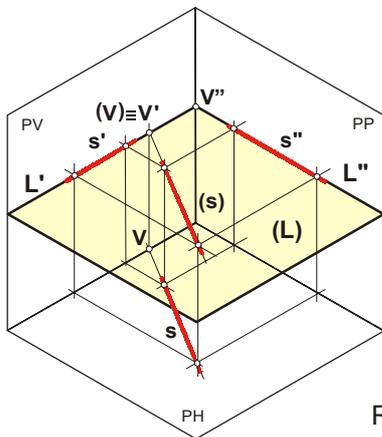
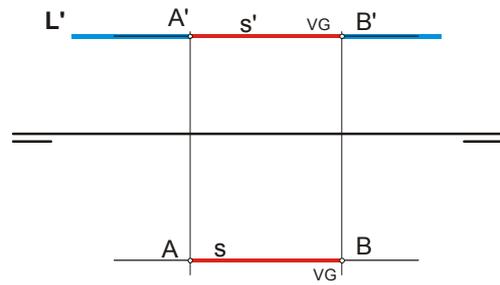
Retas pertencentes ao PLANO HORIZONTAL



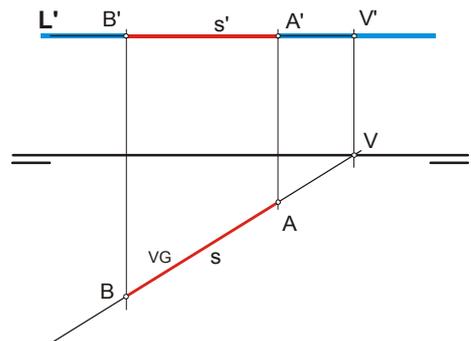
RETA DE TOPO



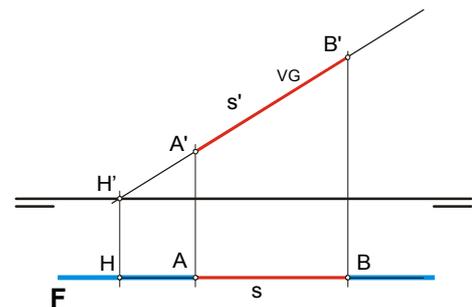
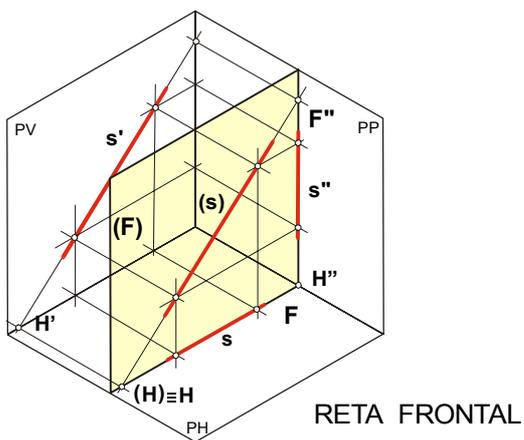
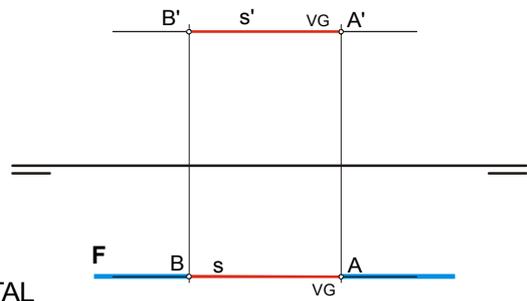
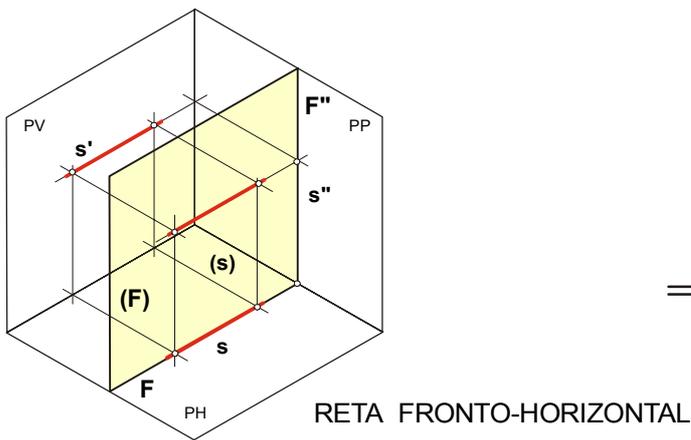
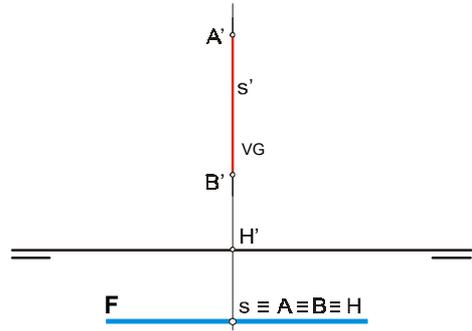
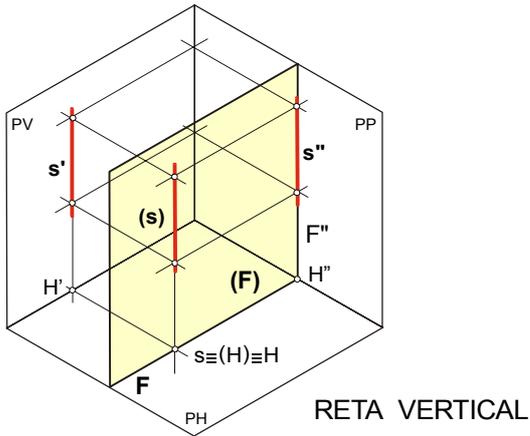
RETA FRONTO-HORIZONTAL



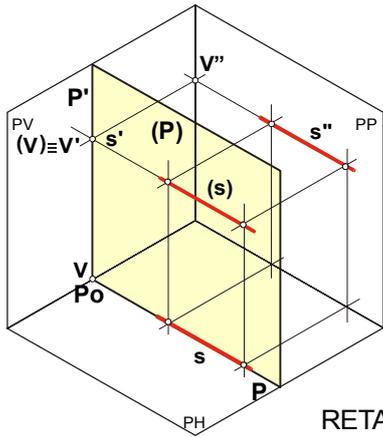
RETA HORIZONTAL



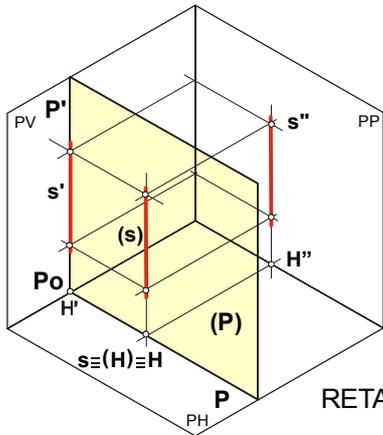
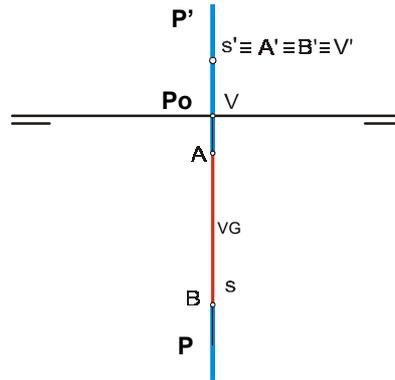
Retas pertencentes ao PLANO FRONTAL



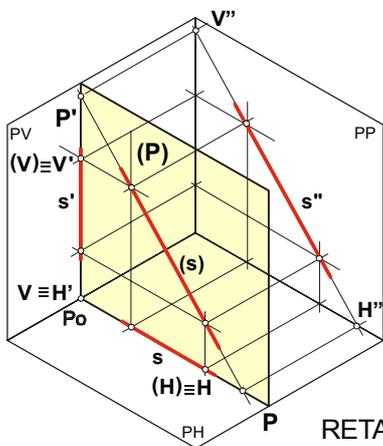
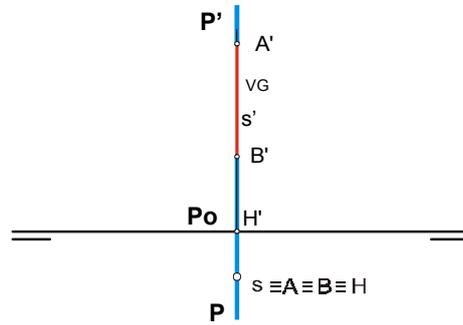
Retas pertencentes ao PLANO DE PERFIL



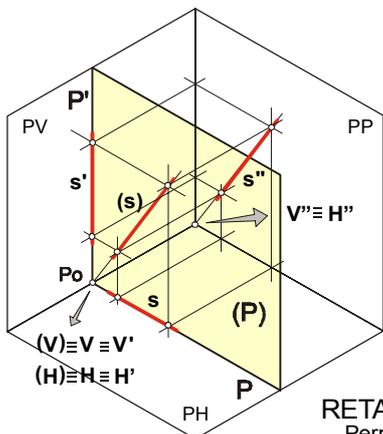
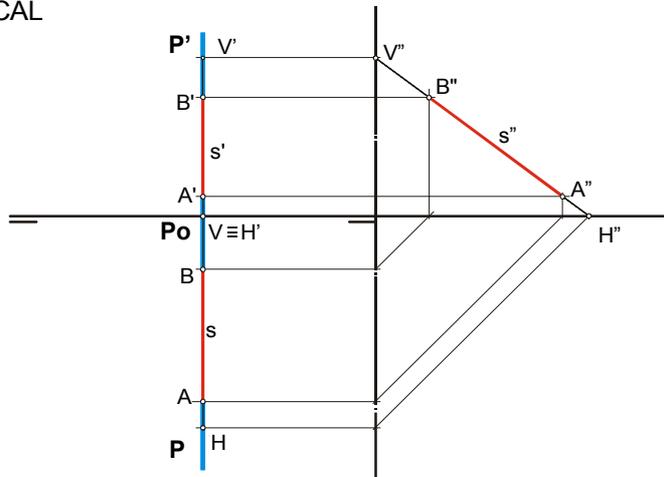
RETA DE TOPO



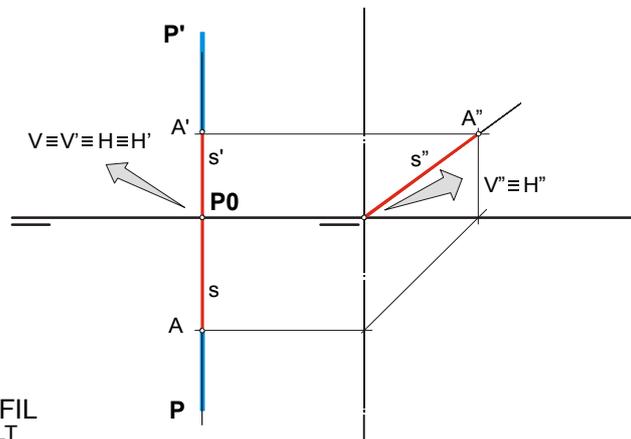
RETA VERTICAL



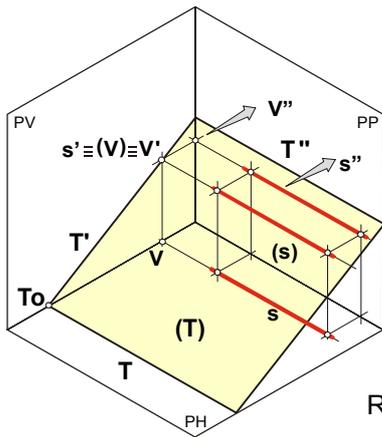
RETA DE PERFIL
Ortogonal à LT



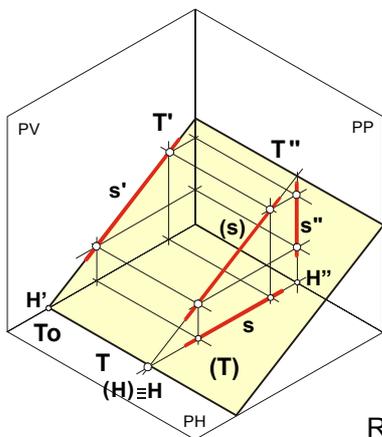
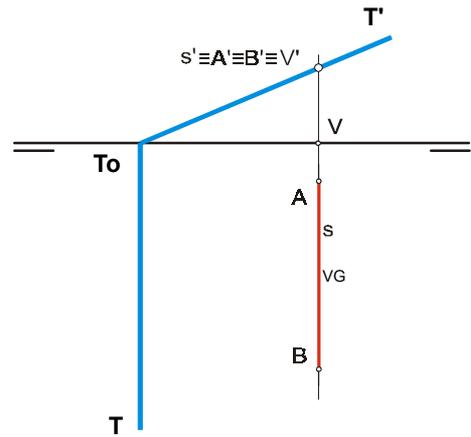
RETA DE PERFIL
Perpendicular à LT



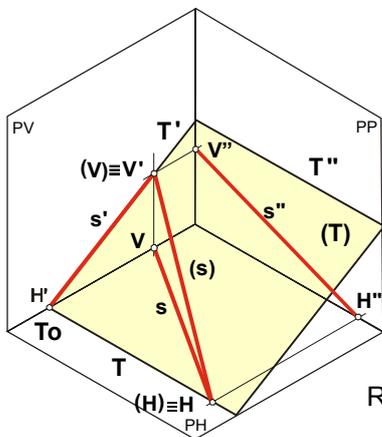
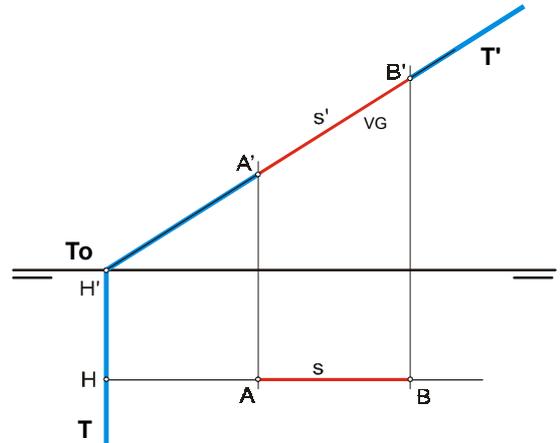
Retas pertencentes ao PLANO DE TOPO



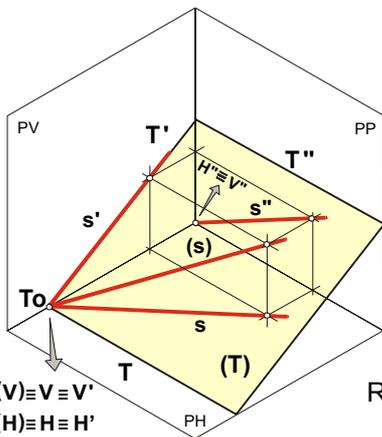
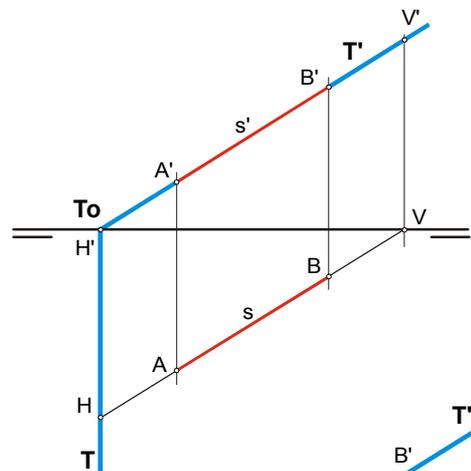
RETA DE TOPO



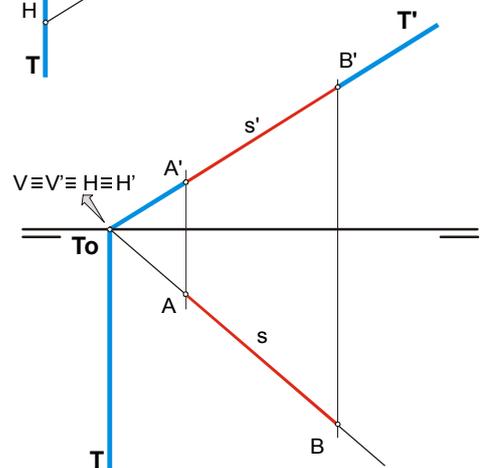
RETA FRONTAL



RETA QUALQUER
Reversa à LT

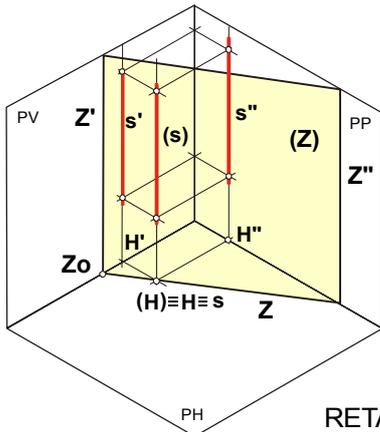


RETA QUALQUER
Concorrente à LT

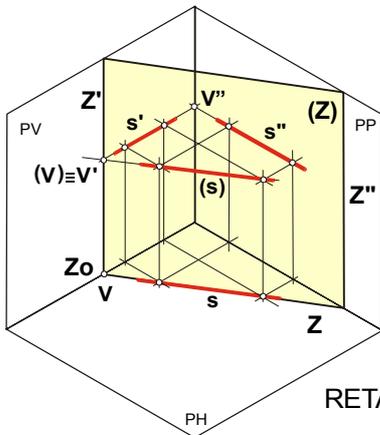
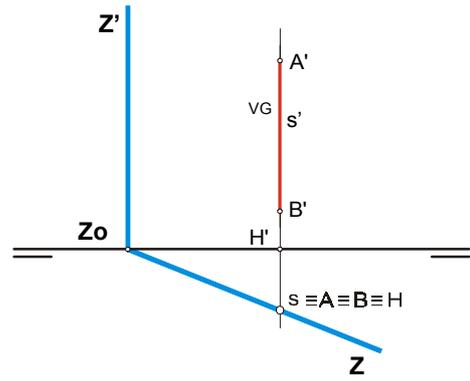


(V) ≡ V ≡ V'
(H) ≡ H ≡ H'

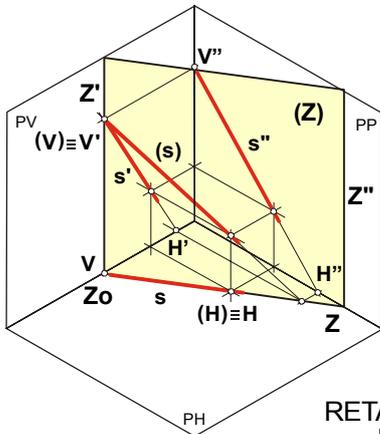
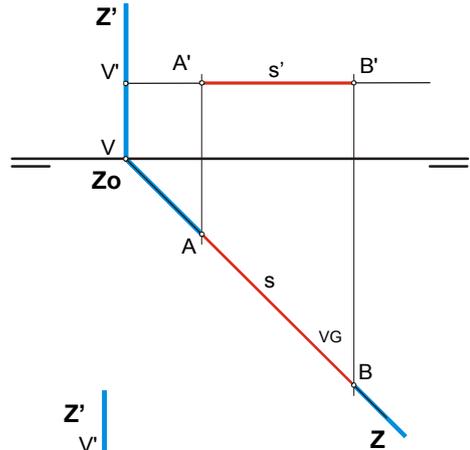
Retas pertencentes ao PLANO VERTICAL



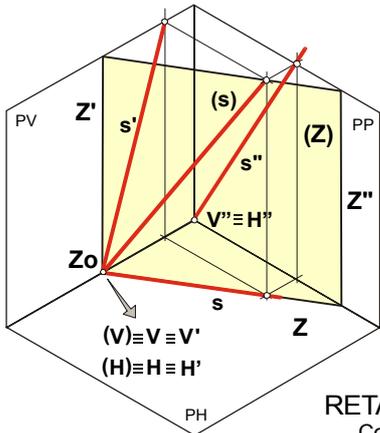
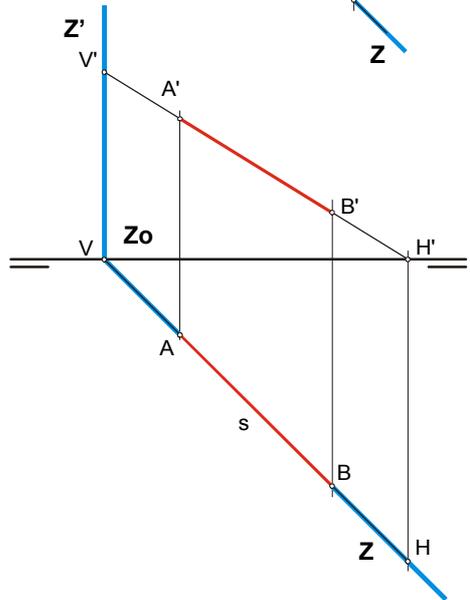
RETA VERTICAL



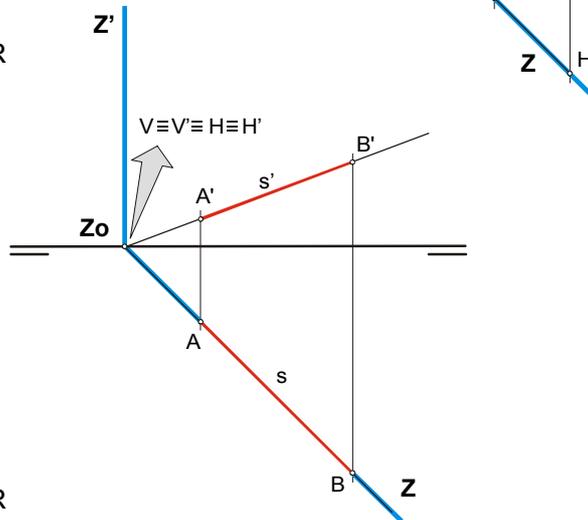
RETA HORIZONTAL



RETA QUALQUER
Reversa à LT

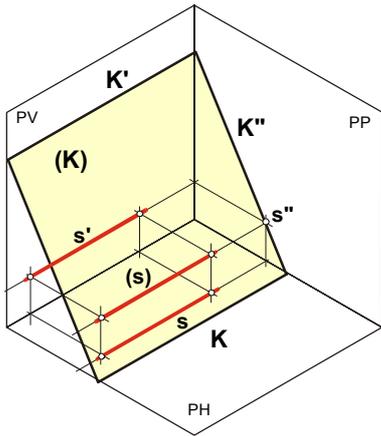


RETA QUALQUER
Concorrente à LT

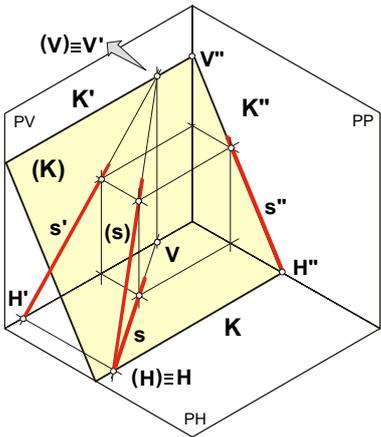
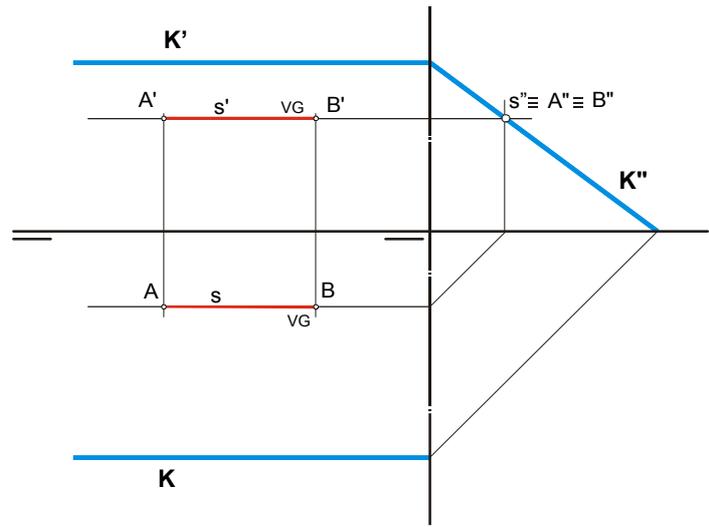


CONCORRENTE A L.T.

Retas pertencentes ao PLANO PARALELO À LT.

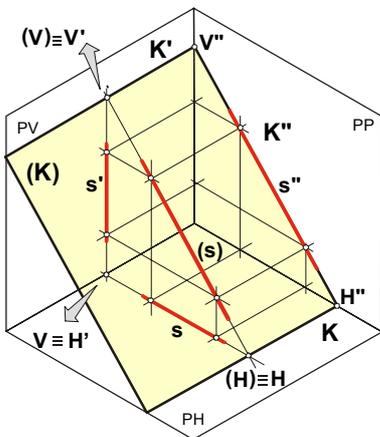
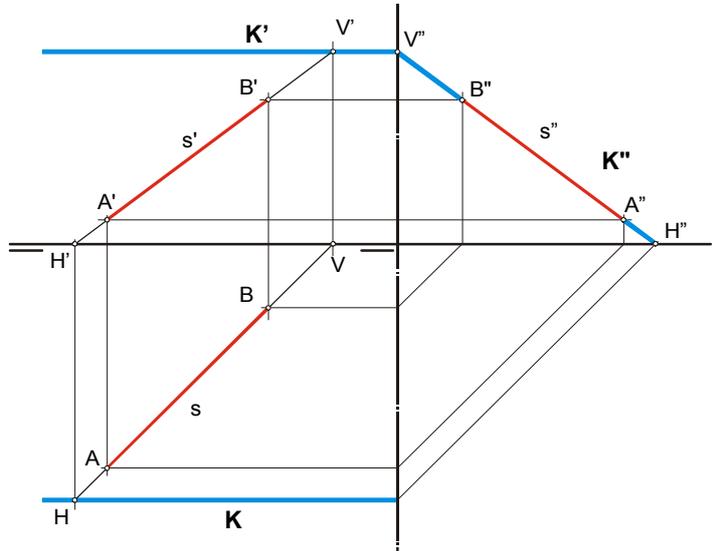


RETA FRONTO-HORIZONTAL



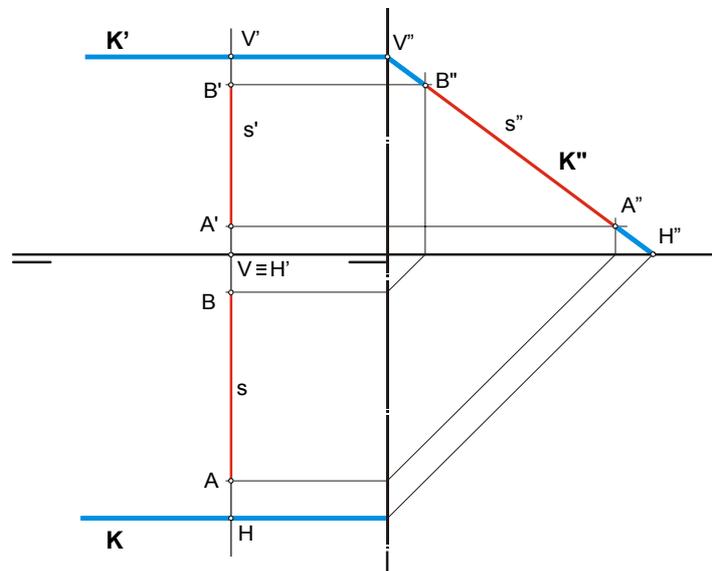
RETA QUALQUER

Este plano admite somente
Reta Qualquer Reversa à LT

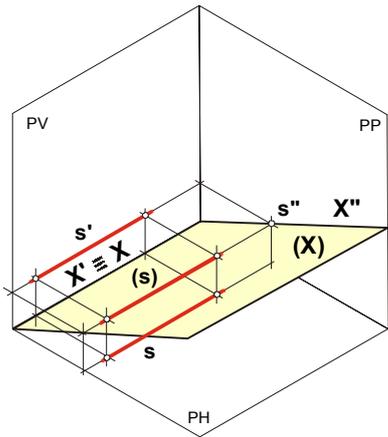


RETA DE PERFIL

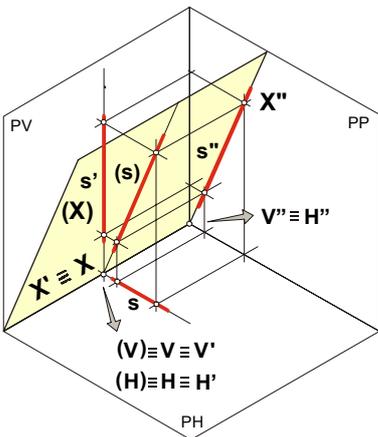
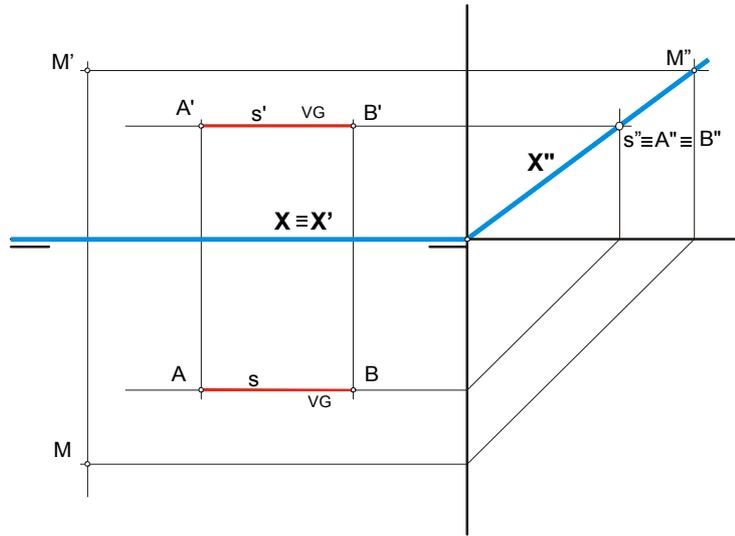
Este plano admite somente
Reta de Perfil Ortogonal à LT



Retas pertencentes ao PLANO que PASSA Pela LINHA DE TERRA

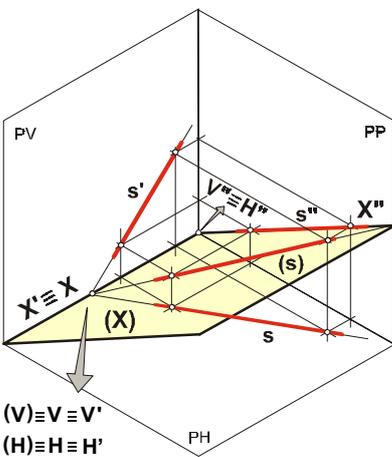
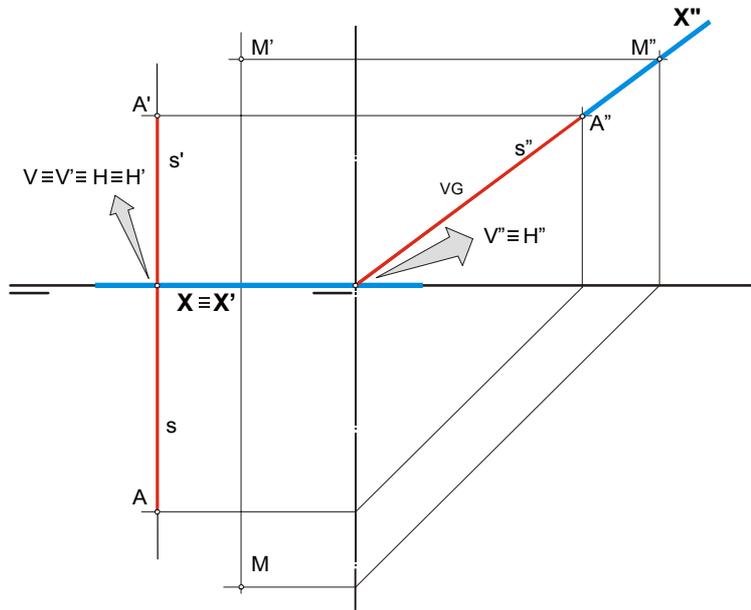


RETA FRONTO-HORIZONTAL



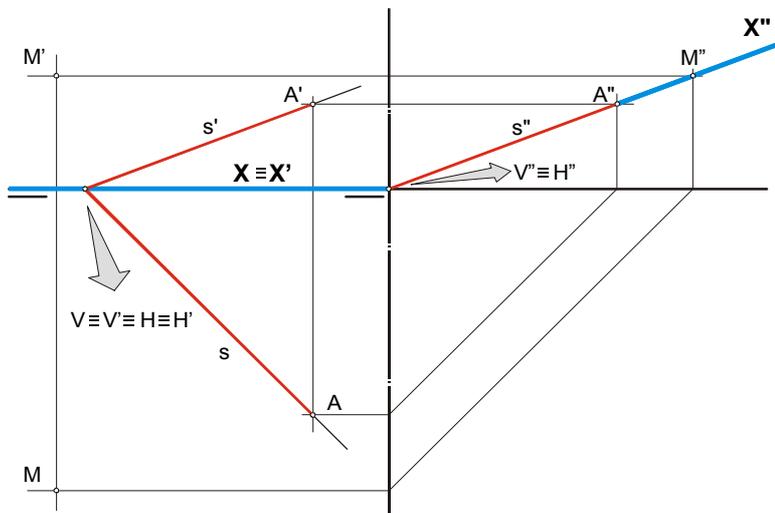
RETA DE PERFIL

Este plano admite somente
Reta de Perfil Perpendicular à LT

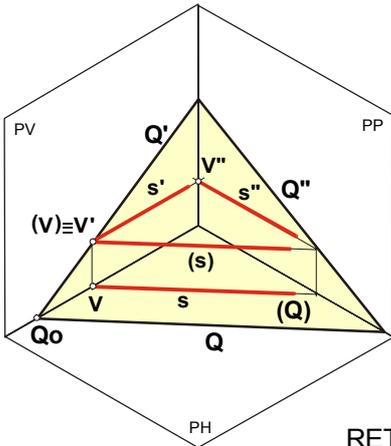


RETA QUALQUER

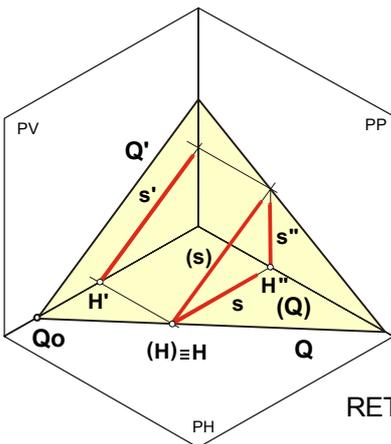
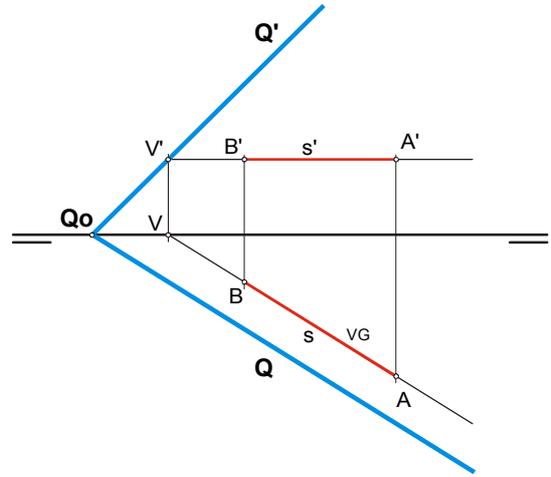
Este plano admite somente
Reta Qualquer Concorrente à LT



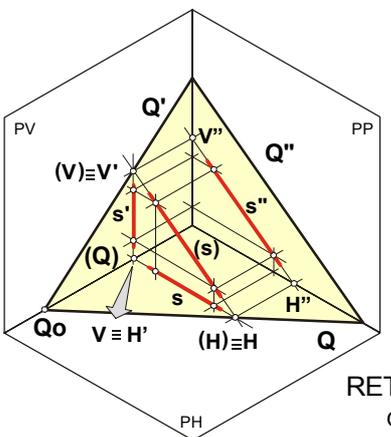
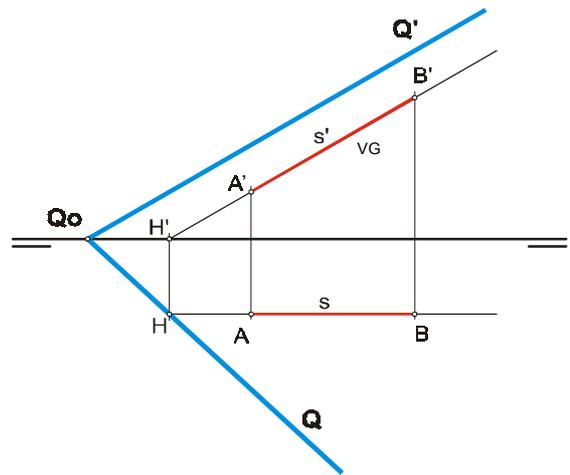
Retas pertencentes ao PLANO QUALQUER



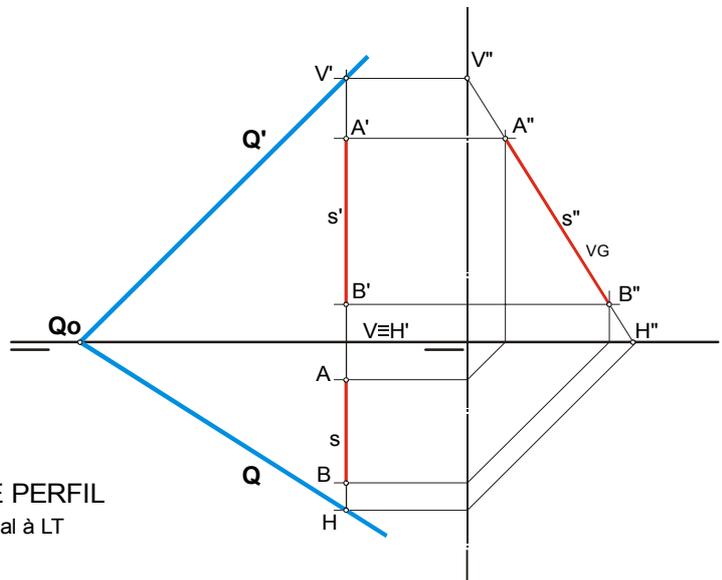
RETA HORIZONTAL



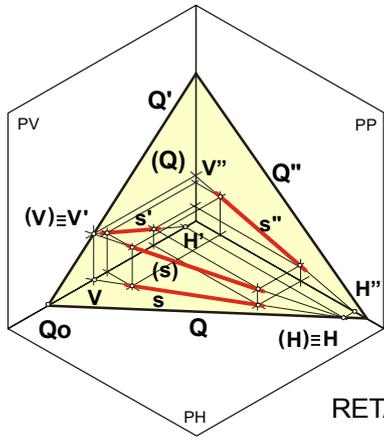
RETA FRONTAL



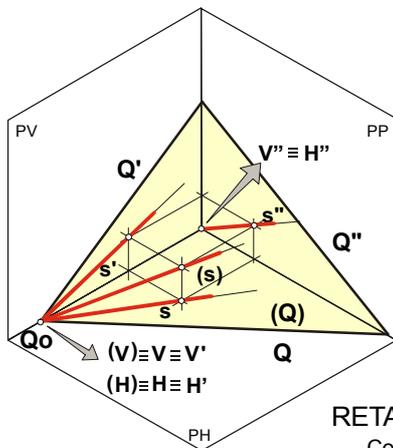
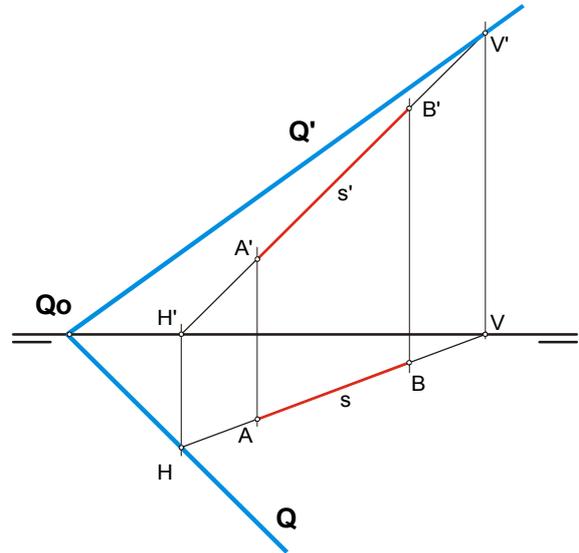
RETA DE PERFIL
Ortogonal à LT



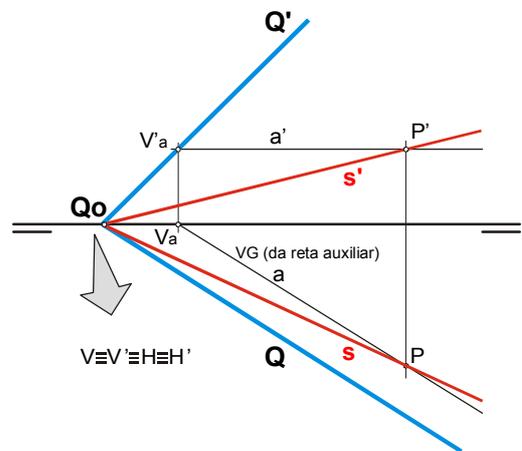
Retas pertencentes ao PLANO QUALQUER (continuação)



RETA QUALQUER
Reversa à LT



RETA QUALQUER
Concorrente à LT
(Faz-se necessário o uso de
uma reta e um ponto auxiliar)



Quando uma reta qualquer possuir os dois **traços coincidentes** (isto só acontece na LT), embora nominalmente sejam dois pontos, geometricamente se constituem em um único ponto, o que não é suficiente para determinar a pertinência da reta sobre o plano. Assim, faz-se necessária a **utilização de um ponto auxiliar** sobre o plano (P) que por sua vez necessita de uma reta auxiliar (preferencialmente as retas horizontal e frontal do plano).

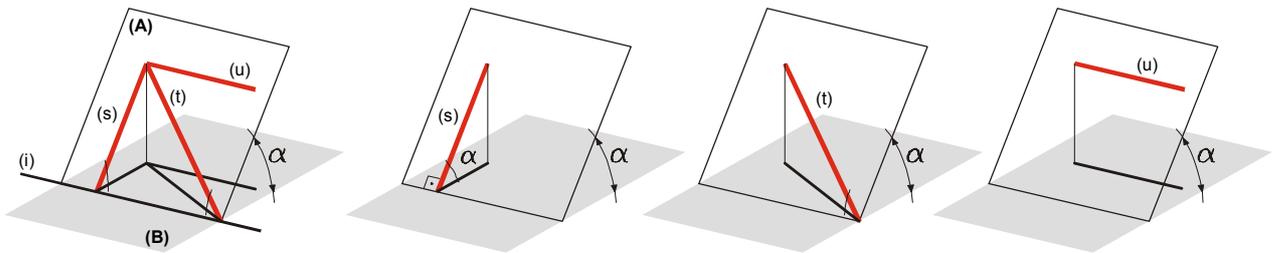
F - QUADRO SÍNTESE DE PERTINÊNCIA DE RETA A PLANOS

	Projeteante no PV e PP Plano Horizontal	Projeteante no PH e PP Plano Frontal	Projeteante no PH e PV Plano de Perfil	Projeteante no PV Plano de Topo	Projeteante no PH Plano Vertical	Projeteante no PP Plano // à LT	Projeteante no PP Plano P/P/LT	NÃO Projeteante Plano Qualquer
Reta Vertical VG no PV e PP Traço (H)								
Reta de Topo VG no PH e PP Traço (V)								
Reta Fronto-Horizontal VG no PH e PV Não possui Traço								
Reta Horizontal VG no PH Traço (V)								
Reta Frontal VG no PV Traço (H)								
Reta de Perfil VG no PP Traço (H) e (V)								
Reta Qualquer Não possui VG Traço (H) e (V)								

G - RETAS DE MÁXIMO DECLIVE (MD) E MÁXIMA INCLINAÇÃO (MI).

São as retas de um plano que formam o maior ângulo possível com os planos Horizontal e/ou Vertical de projeção respectivamente, ou seja, formam o mesmo ângulo que o plano, ao qual pertencem, forma com o PV e ou com o PH.

Sendo a reta (i) o traço (interseção) entre os planos genéricos (A) e (B), que formam entre si um ângulo alfa, podemos fazer as seguintes considerações. (Tomemos alfa = 45° por exemplo)



O plano (A) pode conter infinitas retas sobre si. Estas retas poderão formar com o plano (B) diferentes ângulos que podem variar de 0° a 45° (neste caso o valor de alfa=45°)

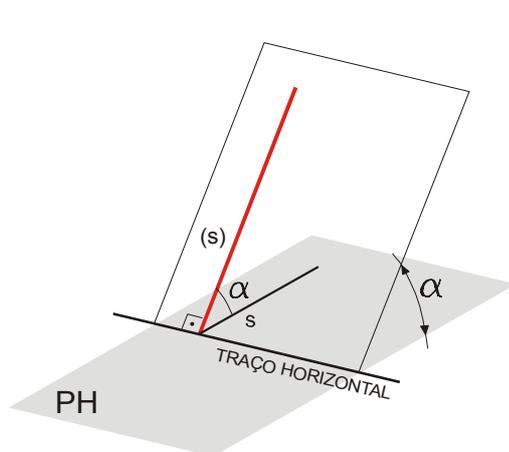
A reta (s), perpendicular ao traço entre os planos, forma com o plano (B) um ângulo de 45°.

A reta (t), oblíqua ao traço entre os planos, forma com o plano (B) um ângulo superior a 0° e inferior a 45°.

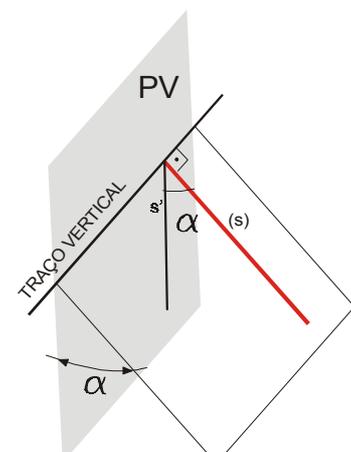
A reta (u), paralela ao traço entre os planos, forma um ângulo igual a 0° com o plano (B), estando portanto equidistante em relação ao referido plano.

Observando a reta (s), podemos concluir que toda reta pertencente ao plano (A) que formar um ângulo reto como o traço (i), formará o maior ângulo possível com o plano (B), que é o valor de alfa.

Se esta análise for estendida aos planos que possuem traços sobre o Plano Horizontal de projeção (PH), podemos afirmar que: toda reta do plano, que formar um ângulo reto com o traço horizontal também formará o maior ângulo possível com o PH. Estas retas são denominadas de Retas de Máximo Declive.



RETA DE MÁXIMO DECLIVE



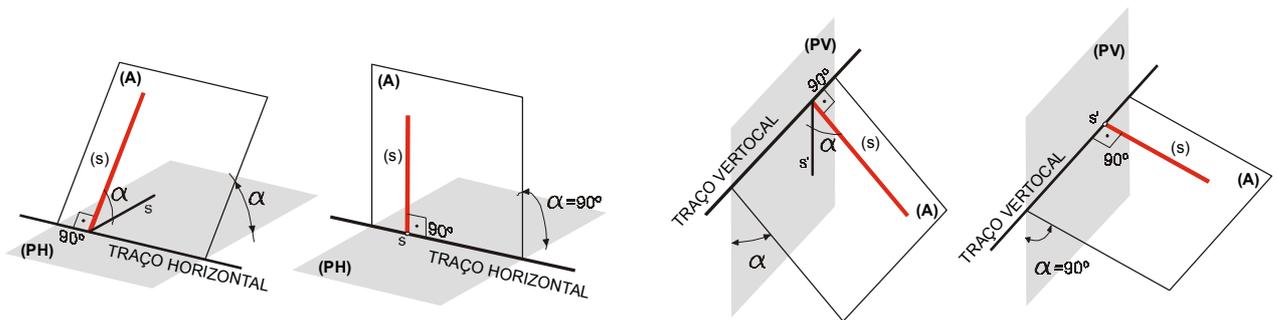
RETA DE MÁXIMA INCLINAÇÃO

No entanto se a mesma análise for estendida aos planos que possuem traços sobre o Plano Vertical de projeção (PV), podemos afirmar que: toda reta do plano, que formar um ângulo reto com o traço vertical também formará o maior ângulo possível com o Pv. Estas retas são denominadas de Retas de Máxima Inclinação

Todo este raciocínio exemplificado através de planos não projetantes é extensivo aos planos projetantes em relação ao PH e PV (Os planos projetantes são aqueles perpendiculares aos planos de projeção). O fato do plano ser ou não ser projetante interfere apenas na representação em é pura.

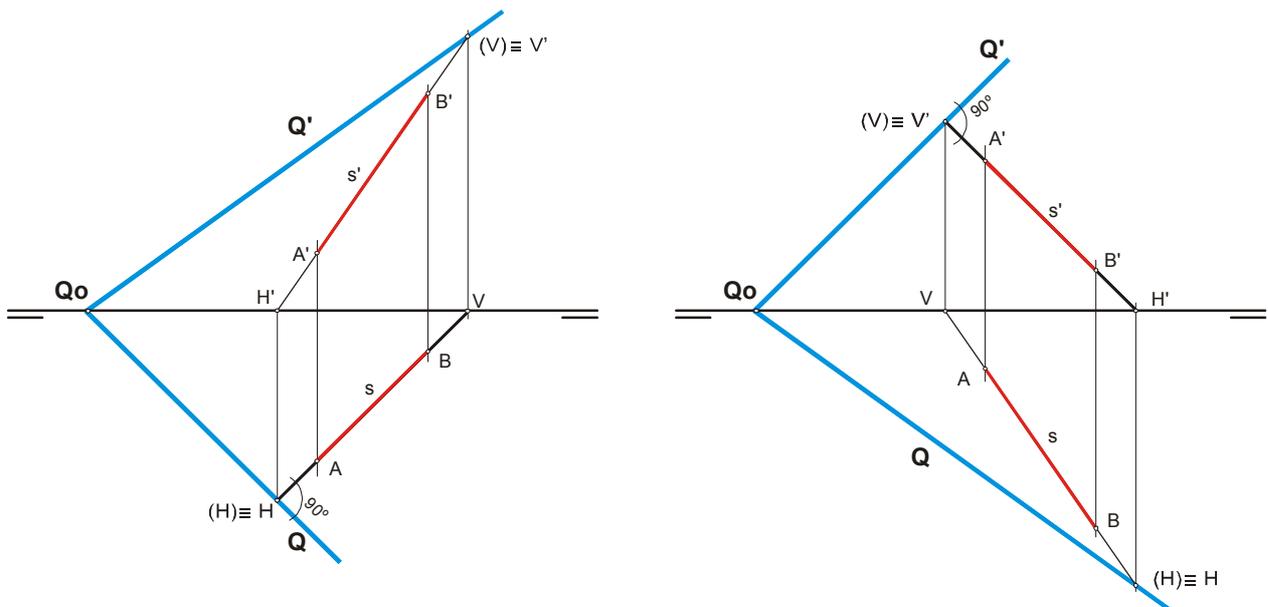
Observe que nos planos NÃO PROJETANTES, a reta perpendicular ao traço do plano gera sobre o PH ou PV, uma projeção também perpendicular ao traço.

Já nos planos PROJETANTES, a reta perpendicular ao traço, também é perpendicular ao PH ou PV, gerando assim, uma projeção pontual sobre o traço correspondente.



Vejamos estas retas de MD e MI no plano Qualquer.

Em é pura a reta de máximo declive de planos não projetantes no PH, é caracterizada por possuir sua projeção horizontal também perpendicular ao traço horizontal.



Na página seguinte, apresentamos um quadro síntese com todos os Planos e suas respectivas retas de máximo declive e/ou máxima inclinação.

H - QUADRO SÍNTESE DE RETAS DE MÁXIMO DECLIVE E MÁXIMA INCLINAÇÃO.

MÁXIMO DECLIVE	MÁXIMA INCLINAÇÃO

MÁXIMO DECLIVE	MÁXIMA INCLINAÇÃO