

数 学 ② [数学Ⅱ 数学Ⅱ・数学B]

(100点)
60分

工業数理、簿記及び情報関係基礎の問題冊子は、大学入試センター試験の出願時に、それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

I 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 出題科目、ページ及び選択方法は、下表のとおりです。

出 題 科 目	ペ ー ジ	選 択 方 法
数 学 Ⅱ	4～14	左の2科目のうちから1科目を選択し、解答 しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15～29	

- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄
受験番号（数字及び英字）を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
 - ② 氏名欄、試験場コード欄
氏名・フリガナ及び試験場コード（数字）を記入しなさい。
 - ③ 解答科目欄
解答する科目を一つ選び、科目の下の○にマークしなさい。マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は、0点となります。
- 5 選択問題については、解答する問題を決めたあと、その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし、指定された問題数をこえて解答してはいけません。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

II 解答上の注意

- 1 問題の文中の ア , イウ などには、特に指示がないかぎり、数字(0~9)、符号(-)、又は文字(a, b, c, d)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に $-8a$ と答えたいとき

ア	<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> d
イ	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input checked="" type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> d
ウ	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9	<input checked="" type="radio"/> a	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> d

なお、同一の問題文中に ア , イウ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、ア , イウ のように細字で表記します。

- 2 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として

エ	<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> d
オ	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input checked="" type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> d
カ	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input checked="" type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> c	<input type="radio"/> d

- 3 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、キ $\sqrt{\text{ク}}$, $\frac{\sqrt{\text{ケコ}}}{\text{サ}}$, シ $\sqrt{\text{スセ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $6\sqrt{2a}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$, $3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

数学Ⅱ・数学B

問 題	選 択 方 法
第 1 問	必 答
第 2 問	必 答
第 3 問	} いずれか 2 問を選択し、 解答しなさい。
第 4 問	
第 5 問	
第 6 問	

第1問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 座標平面上の3点

$$A(-1, 0), B(\cos \theta, \sin \theta), C(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

について、 θ が $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲を動くとき

$$d = AC + BC$$

の最大値と最小値を求めよう。

(1)

$$AC^2 = \boxed{\text{ア}} + 2\cos 2\theta$$

$$= \boxed{\text{イ}} \cos^2 \theta$$

$$BC^2 = \boxed{\text{ウ}} - 2\cos \theta$$

$$= \boxed{\text{エ}} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

であるから

$$d = \boxed{\text{オ}} |\cos \theta| + \boxed{\text{カ}} \sin \frac{\theta}{2}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) $t = \sin \frac{\theta}{2}$ とおく。

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ のとき

$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$ であり, $d = -\text{ケ}t^2 + \text{コ}t + 2$ である。

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき

$\frac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}} \leq t \leq 1$ であり, $d = \text{ケ}t^2 + \text{コ}t - 2$ である。

したがって, d は $t = \frac{\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}}$ のとき最小値 $\sqrt{\text{ス}}$ をとり,

このときの θ の値は セソ° である。また, d は $t = \text{タ}$ のとき
 最大値 チ をとり, このときの θ の値は ツテト° である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

[2] x, y, z は正の数で $2^x = \left(\frac{5}{2}\right)^y = 3^z$ を満たしているとする。このとき

$$a = 2x, \quad b = \frac{5}{2}y, \quad c = 3z$$

とおき、 a, b, c の大小関係を調べよう。

(1) $x = y(\log_2 \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}})$ であるから

$$b - a = y \left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2} - 2 \log_2 \boxed{\text{ナ}} \right)$$

である。したがって、 a と b を比べると $\boxed{\text{ネ}}$ の方が大きい。

(2) $x = z \log_2 \boxed{\text{ノ}}$ であるから

$$c - a = z \left(3 - 2 \log_2 \boxed{\text{ノ}} \right)$$

である。したがって、 a と c を比べると $\boxed{\text{ハ}}$ の方が大きい。

(3) $3^5 < \left(\frac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると、 a, b, c の間には大小関係

$$\boxed{\text{ヒ}} < \boxed{\text{フ}} < \boxed{\text{ヘ}}$$

が成り立つことがわかる。

(下書き用紙)

数学Ⅱ・数学Bの試験問題は20ページに続く。

第2問 (必答問題) (配点 30)

a を定数とし、放物線

$$y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2$$

を C 、その頂点を P とする。

(1) 頂点 P の座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}}, -a^{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}} a^2 \right)$$

である。したがって、どのような定数 a についても、頂点 P は

$$y = x^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}} x^2$$

のグラフ上にある。

(2) a が $-3 \leq a < 1$ の範囲を動くとする。頂点 P の y 座標の値が最大となるのは $a = \boxed{\text{キ}}$ と $a = \boxed{\text{クケ}}$ のときであり、最小となるのは $a = \boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3) a の値を(2)で求めた $\boxed{\text{キ}}$ 、 $\boxed{\text{クケ}}$ 、 $\boxed{\text{コサ}}$ とするときの放物線 C をそれぞれ C_1 、 C_2 、 C_3 とする。放物線 C_2 、 C_3 の方程式は

$$C_2: y = x^2 - \boxed{\text{シ}} x + \boxed{\text{ス}}$$

$$C_3: y = x^2 - \boxed{\text{セ}} x$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

このとき

C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$

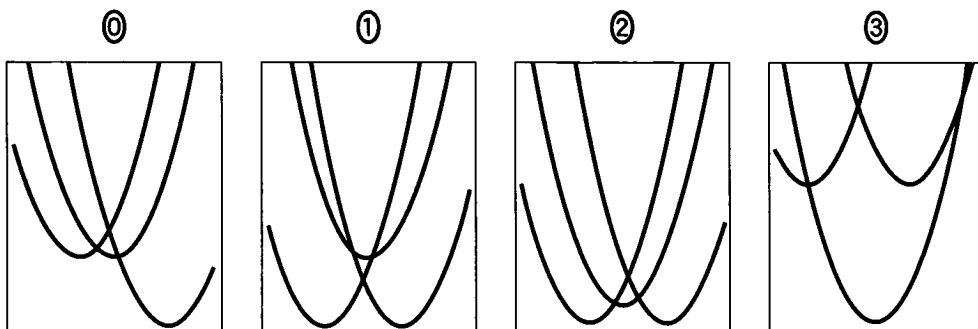
C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{2}$

である。

- (4) C_1, C_2, C_3 を座標平面上に図示したとき、それらの位置関係を表す最も適当なものは、下の図①～③のうち $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし、座標軸や曲線名は省略してある。

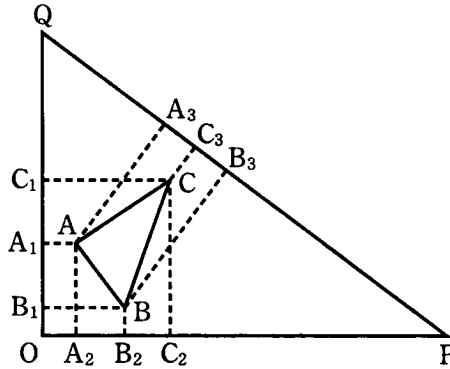
三つの放物線 C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。



第3問 (選択問題) (配点 20)

座標平面上の3点 $O(0, 0)$, $P(4, 0)$, $Q(0, 3)$ を頂点とする三角形 OPQ の内部に三角形 ABC があるとする。 A, B, C から直線 OQ に引いた垂線と OQ との交点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とする。 A, B, C から直線 OP に引いた垂線と OP との交点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とする。 A, B, C から直線 PQ に引いた垂線と PQ との交点をそれぞれ A_3, B_3, C_3 とする。

A_1 が線分 B_1C_1 の中点であり、 B_2 が線分 A_2C_2 の中点であり、 C_3 が線分 A_3B_3 の中点であるとする。



(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

$\vec{AB} = (x, y)$, $\vec{AC} = (z, w)$ とおく。A₁が線分B₁C₁の中点であるから $w = \boxed{\text{ア}}y$ である。B₂が線分A₂C₂の中点であるから $z = \boxed{\text{イ}}x$ である。線分ABの中点をDとすると、C₃が線分A₃B₃の中点であるから

$$\vec{CD} \cdot \vec{PQ} = \boxed{\text{ウ}}$$

である。また

$$\vec{PQ} = (\boxed{\text{エオ}}, \boxed{\text{カ}}), \vec{CD} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} (\vec{AB} - \boxed{\text{ケ}} \vec{AC})$$

であるから

$$y = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} x$$

である。したがって

$$\vec{AB} = x \left(1, \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right), \vec{AC} = x \left(\boxed{\text{イ}}, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)$$

である。ゆえに

$$AC = \frac{\boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} AB, \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

二つの複素数 p, q と三つの異なる複素数 a, β, γ は

$$a + \beta + \gamma = 0 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$a\beta + \beta\gamma + \gamma a = p \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

$$a\beta\gamma = q \quad \dots\dots\dots \text{③}$$

を満たすとする。複素数 a, β, γ が複素数平面上で表す点をそれぞれ A, B, C とし、三角形 ABC は、 $AB = AC$ の直角二等辺三角形であるとする。

このとき

$$\arg \frac{\gamma - a}{\beta - a} = \pm \boxed{\text{アイ}}^\circ, \quad \left| \frac{\gamma - a}{\beta - a} \right| = \boxed{\text{ウ}}$$

である。ここで、複素数 z の偏角 $\arg z$ は $-180^\circ \leq \arg z < 180^\circ$ を満たすとする。

以下 $\arg \frac{\gamma - a}{\beta - a} = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるとする。このとき、①を用いると

$$\beta = \frac{\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}}i}{\boxed{\text{キ}}} a, \quad \gamma = \frac{\boxed{\text{クケ}} - \boxed{\text{コ}}i}{\boxed{\text{サ}}} a$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

さらに、②、③から

$$p = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} a^{\boxed{\text{セ}}}, \quad q = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} a^{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって、 p と q は

$$\boxed{\text{ツテ}} p^{\boxed{\text{ト}}} = \boxed{\text{ナニ}} q^{\boxed{\text{ヌ}}}$$

を満たさなければならない。

さらに、複素数平面上に点Dがあり、四角形ABDCが正方形であるとき、Dを表す複素数は $\boxed{\text{ネノ}} a$ である。

第5問 (選択問題) (配点 20)

さいころを最大5回まで投げ、目の出方に応じてポイントを得る次のゲームをDさんがおこなう。Dさんは最初 a ポイントをもっている。

さいころを投げて、5または6の目が出る事象を A とする。事象 A が初めて起こった時点では1ポイントを得て引き続きゲームを続行し、2度目に事象 A が起これば2ポイントが加算されて合計3ポイントを得て、その時点でゲームを終了する。なお、さいころを5回投げても、事象 A が一度しか起こらない場合には、1度目に得た1ポイントのままで終了する。もし5回投げても事象 A が一度も起こらない場合には、あらかじめ定めた m ポイントが減点されて終了する。ただし、 a と m は自然数で、 $a \geq m$ とする。

このゲームが終了した時点でのDさんのもつポイント数を確率変数 X とする。

(1) $X = a + 1$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{243}$ である。

(2) ちょうど4回目でゲームが終了する確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり、終了する時点

が4回目または5回目となる確率は $\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(3) 3回目までに一度も事象 A が起こらない確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

また、3回目までに一度も事象 A が起こらないとき、 $X > a$ となる条件付き確率は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(4) 確率変数 X の平均(期待値)は

$$E(X) = a + \frac{\boxed{\text{ソタチ}} - \boxed{\text{ツテ}} m}{243}$$

で、 $E(X) > a$ となるような最大の自然数 m は $\boxed{\text{トナ}}$ である。

第6問 (選択問題) (配点 20)

ある銀行では毎期末に預金残高に対し5%の利率で利息がつく。この銀行に、たとえば a 万円を一期間預金すると、期末には $1.05 \times a$ 万円の預金残高になることになる。

第1期の初めに、Aさんはこの銀行に b 万円の預金を持っている。Aさんは、まず b 万円から第1期分 m 万円を引き出す。残りの預金に対し第1期末に5%の利息がつく。ここで、 $b > m$ とする。第2期目からも每期初めにこの預金から m 万円ずつを引き出す予定である。ただし、預金残高が m 万円に満たないときには、その全額を引き出すものとする。

以下の問題中、 $\text{INT}(X)$ は X を越えない最大の整数を表す関数である。

- (1) 預金残高が0円になるのに何期間を要するかを調べるため、次の〔プログラム1〕を作った。このプログラムでは、自然数 b と m を与えるとき、第 n 期初めに預金を引き出した直後に預金残高が0円になれば、そのときの自然数 n を出力する。

〔プログラム1〕

```

100 INPUT "B=";B
110 INPUT "M=";M
120 N=0
130 N=N+1
140 B=1.05*(B-M)
150 IF B>0 THEN GOTO アイウ
160 PRINT N
170 END
    
```

このプログラムの空欄 アイウ をうめて、プログラムを完成せよ。

- (2) このプログラムの160行を変更して、最終期の引き出し金額の1万円未満を切り捨てたものも出力するようにするには、160行を エ と変更すればよい。ただし、この金額の単位は万円とする。また、 エ については、当てはまるものを、次の①～⑤から一つ選べ。

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| ① PRINT N, INT(B) | ① PRINT N, INT(B+M) |
| ② PRINT N, INT(B-M) | ③ PRINT N, INT(1.05*B) |
| ④ PRINT N, INT(B/1.05+M) | ⑤ PRINT N, INT(B/1.05-M) |

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

- (3) 第1期初めの預金額を2150万円、引き出し額を100万円とすると、第1期末の預金残高は、約2152万円となり、第1期初めの2150万円より増える。

一般に、毎期の初めに m 万円引き出すものとし、第 n 期末の預金残高を c_n 万円とする。このとき、 $c_{n+1} = 1.05(c_n - m)$ であるので

$$c_{n+1} - c_n = 1.05(c_n - c_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つ。ただし、 $c_0 = 2150$ とする。

よって、 $c_1 - c_0 \geq 0$ ならば、預金残高は減少しないことがわかる。ここで、 c_1 は m と c_0 によって決まり、 $c_1 - c_0 \geq 0$ を満たす最大の自然数 m は **オカキ** である。

- (4) 次に、Aさんの預金残高が n 期間にわたり0円にならないために必要な第1期初めの預金額 b 万円を計算するため、次の〔プログラム2〕を作った。このプログラムでは、自然数 n と m を与えるとき、預金残高が n 期間にわたり0円にならないために必要な第1期初めの預金額 b 万円を計算する。ただし、 $n \geq 2$ とする。

〔プログラム2〕

```

100 INPUT "N=";N
110 INPUT "M=";M
120 I=N
130 B=M
140 B=B/1.05+M
150 I=I-1
160 IF I>1 THEN GOTO クケコ
170 PRINT サ
180 END
    
```

このプログラムの空欄 **クケコ** と **サ** をうめて、このプログラムを完成せよ。ただし、**サ** については、当てはまるものを、次の①～④から一つ選べ。

- ① INT(B) ② INT(B/1.05+1)
 ③ INT(B+1) ④ INT((B+1)/1.05)

このプログラムを実行して $N=?$ に対し3、 $M=?$ に対し90を入力したとき、170行において **シスセ** と出力される。このとき、140行は **ソ** 回実行される。