第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 aを正の定数とし，角 θ の関数

$$f(\theta) = \sin(a\theta) + \sqrt{3}\cos(a\theta)$$

を考える。

(1) $f(\theta) = \boxed{\text{ア}}\sin\left(a\theta + \boxed{\text{イウ}}^\circ\right)$ である。

（数学II・数学B第1問は次ページに続く。）

(2) $f(\theta) = 0$ を満たす正の角 θ のうち

最小のものは

$$\frac{\boxed{\text{エオカ}}^\circ}{a}$$

であり，小さい方から数えて 4 番目と 5 番目のものは，それぞれ

$$\frac{\boxed{\text{キクケ}}^\circ}{a},\quad \frac{\boxed{\text{コサシ}}^\circ}{a}$$

である。

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で，$f(\theta) = 0$ を満たす θ がちょうど 4 個存在するような a の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \leqq a < \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

(数学II・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 対数関数

$$f(x) = \log_2 x$$
$$g(x) = \log_2(x + a)$$

について考える。関数 $y = g(x)$ のグラフは，関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{テト}}$ だけ平行移動したものである。ただし，$a > 0$ とする。

(1) $F(x) = g(x) - f(x)$ とする。

$F(2) = 1$ となるのは，$a = \boxed{\text{ナ}}$ のときである。

$F(1) = 2F(3)$ となるのは，$a = \boxed{\text{ニ}}$ のときである。

（数学II・数学B第１問は次ページに続く。）

(2)　次に

$$h(x) = \log_4(4x + b) \quad (b > 0)$$

とする。$g(1) = h(1)$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right) = h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ となるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}},\quad b = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$$

のときである。

第2問 （必答問題）（配点　30）

座標平面において，点$(a,\ 1)$を中心とし，x軸に接する円をC_1とする。また，放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$をC_2とし，C_2上に点$\mathrm{P}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$をとる。ただし，$a>0$，$b>0$とする。

(1) C_1の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2) PにおけるC_2の接線ℓの傾きは$\boxed{\text{エ}}$である。したがって，ℓの方程式は

$$y=\boxed{\text{エ}}\,x-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}b^{\boxed{\text{キ}}}$$

である。また，Pを通り，ℓに直交する直線mの方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}b^{\boxed{\text{ス}}}+\boxed{\text{セ}}$$

である。

（数学II・数学B第2問は次ページに続く。）

(3) C_1 の中心が m 上にあるとする。このとき

$$a = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}} b^{\boxed{チ}}$$

が成り立つ。

さらに，C_1 が P を通るとき

$$b = \sqrt{\boxed{ツ}}, \quad a = \frac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}}{2}$$

である。

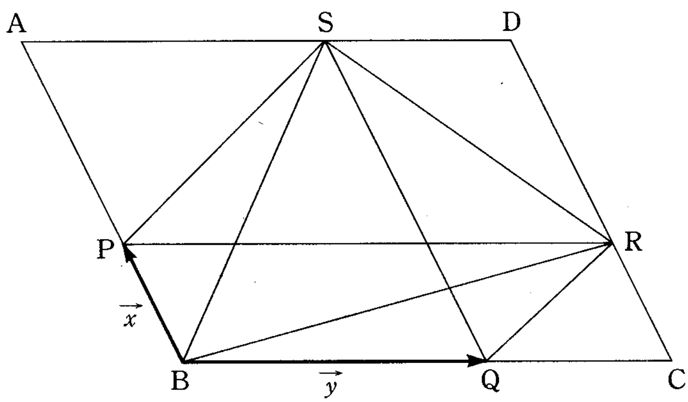
このとき，C_1 は P において ℓ に接し，ℓ と x 軸のなす角は $\boxed{ナニ}$ °である。また，2 直線 $x = 0$, $x = a$ の間にあって，C_1 と C_2 と x 軸の三つで囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}} - \frac{\pi}{\boxed{ハ}}$$

である。

第3問 (選択問題)(配点　20)

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $a:1$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1$ に内分する点を Q とする。辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ PR//BC，SQ//AB となるようにとり，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\vec{y}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とおく。



(1)　五角形 PBQRS の辺 RQ，SP および対角線 SB，RB が表すベクトルは $\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-\vec{x}-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{y},\qquad \overrightarrow{\mathrm{SP}}=\boxed{\text{ウエ}}\,\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SB}}=-\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\right)\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=-\vec{x}-\left(\boxed{\text{キ}}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)\vec{y}$$

となる。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が成り立つとする。このとき

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}|\vec{x}|^2=-\frac{1}{\boxed{\text{シス}}}|\vec{y}|^2$$

である。

(数学II・数学B第3問は次ページに続く。)

(3) RQ//SB および SP//RB が成り立つとする。このとき

$$a = \frac{\boxed{\text{セソ}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}, \qquad b = \frac{\boxed{\text{ツ}} + \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

(4) (2)と(3)の条件が同時に成り立つとき

$$\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|} = \boxed{\text{ナ}}$$

であるから

$$\cos \angle \mathrm{PBQ} = \frac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

を得る。

第4問 （選択問題）（配点　20）

(1)　相異なる二つの複素数 a, b に対して

$$\arg\frac{z-a}{z-b}=\pm 90^\circ$$

を満たす z は，複素数平面上の，ある円の周上にある。この円は a, b を用いて

$$\left|z-\frac{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right|=\frac{\left|\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\right|}{\boxed{\text{カ}}}$$

で表される。

ただし，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表す。

（数学II・数学B第4問は次ページに続く。）

(2) 以下，複素数の偏角は 0° 以上 360° 未満とする。

2 次方程式 $x^2 - 2x + 4 = 0$ の二つの解を α，β とする。ただし，α の虚部は正とする。このとき

$$\arg \alpha = \boxed{\text{キク}}^\circ,\quad \arg \beta = \boxed{\text{ケコサ}}^\circ$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{シス}},\quad \alpha^2 - \beta^2 = \boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,i$$

である。したがって

$$\arg \frac{z - \alpha^2}{z - \beta^2} = 90^\circ$$

を満たす z が描く図形は

$$\left|z + \boxed{\text{タ}}\right| = \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

で表される円のうち

$$\boxed{\text{テトナ}}^\circ < \arg z < \boxed{\text{ニヌネ}}^\circ$$

を満たす部分である。

第5問 （選択問題）（配点 20）

右の表はあるクラスの英語と数学の成績の分布である。生徒数は50人で，成績は1から5までの5段階評価である。たとえば，この表によると英語の成績が4，数学の成績が2の生徒の数は5人である。

このクラス全員の名札50枚をよくまぜて，1枚を取り出し，その名札の生徒の英語の成績を X，数学の成績を Y として確率変数 X，Y を定める。

ただし，同姓同名の生徒はいないものとする。

X ＼ Y		数学				
		5	4	3	2	1
英語	5	1	3	1	0	1
	4	1	0	7	5	1
	3	2	1	0	9	3
	2	1	b	6	0	a
	1	0	0	1	1	3

(1) $X=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

$X=4$ かつ $Y=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

$X \geqq 3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

$X \geqq 3$ という条件のもとで $Y=3$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$

である。

（数学II・数学B第5問は次ページに続く。）

(2)　$a + b = \boxed{\text{ス}}$ であり，$X = 2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で

X の平均（期待値）は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(3)　Y の平均が $\dfrac{133}{50}$ であれば

$$a = \boxed{\text{ト}}, \quad b = \boxed{\text{ナ}}$$

である。

(4)　$X = 2$ という事象と $Y = 4$ という事象が独立であれば

$$a = \boxed{\text{ニ}}, \quad b = \boxed{\text{ヌ}}$$

であり，Y の平均は $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第6問 （選択問題）（配点　20）

p を3以上の自然数とする。1以上 $p-1$ 以下の各自然数 a に対して，数の列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{p-1}$$

を次のように決める。

- a_1 は a とする。
- a_{i+1} は $a_i \times a$ を p で割った余りとする。ただし，$1 \leqq i \leqq p-2$ である。

また，各 a に対して $f(a)$ を次のように決める。

- $a_i = 1$ となる i が $1 \leqq i \leqq p-1$ の範囲にあるときは，そのような最小の i を $f(a)$ とする。
- $a_i = 1$ となる i が $1 \leqq i \leqq p-1$ の範囲に無いときには $f(a) = 0$ とする。

p の値を入力して $f(1)$，$f(2)$，…，$f(p-1)$ を出力させるプログラムを考えたい。

方針　数の列 a_1，a_2，… を上の規則によって決めていく過程で
$\boxed{\text{ア}}$ になればその i を出力して FOR ループを抜けだす。
1から $p-1$ のどの i に対しても $\boxed{\text{イ}}$ ならば0を出力する。

この方針に従って，次のプログラムを書いた。

```
100 INPUT "P="; P
110 FOR A = 1 TO P-1
120   [ ウ ]
130   FOR I = 1 TO P-1
140     IF [ エ ] THEN PRINT "f(";A;")= ";I:GOTO 180
150     B = A*B-P*INT(A*B/P)
160   NEXT I
170   PRINT "f(";A;")= 0"
180 NEXT A
190 END
```

注意：　INT(X)は，Xを越えない最大の整数を表す関数である。

（数学II・数学B第6問は次のページに続く。）

(1) 上の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に適するものを，次の①～⑦のうちから一つずつ選べ。

① $a_i \neq 1$　　② $a_i = 1$　　③ B = 0　　④ B = 1

⑤ B <> 0　　⑥ B = A　　⑦ A = B

(2) このプログラムを実行する。表示

P=?

に対して 7 を入力したとき，はじめの 4 行は

f(1) = $\boxed{\text{オ}}$

f(2) = $\boxed{\text{カ}}$

f(3) = $\boxed{\text{キ}}$

f(4) = $\boxed{\text{ク}}$

と出力される。

(3) 上のプログラムで140行と150行を入れかえたプログラムを実行させ

P=?

に対して 9 を入力すると，はじめの 4 行は

f(1) = $\boxed{\text{ケ}}$

f(2) = $\boxed{\text{コ}}$

f(3) = $\boxed{\text{サ}}$

f(4) = $\boxed{\text{シ}}$

となり，意図した結果とは異なるものが出力される。