第1問

〔1〕（三角関数）

〈解答〉

(1)

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=\frac{\underset{\text{ア}}{\boxed{2}}}{\sin\underset{\text{イ}}{\boxed{2}}\theta}$$

$$\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{-\cos2\theta}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=\frac{\underset{\text{ウエ}}{\boxed{-2}}\cos\underset{\text{オ}}{\boxed{2}}\theta}{\sin\underset{\text{カ}}{\boxed{2}}\theta}$$

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{2}{\sin2\theta}$，　$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{-2\cos2\theta}{\sin2\theta}$ を辺々加えると

$$2\tan\theta=\frac{2-2\cos2\theta}{\sin2\theta}$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{1-\cos2\theta}{\sin2\theta}$$

$\theta=15°$ を代入して，$\tan15°=\dfrac{1-\cos30°}{\sin30°}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{2}{1}=\underset{\text{キ}}{\boxed{2}}-\sqrt{\underset{\text{ク}}{\boxed{3}}}$

(2)

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{2}{\sin2\theta}$$

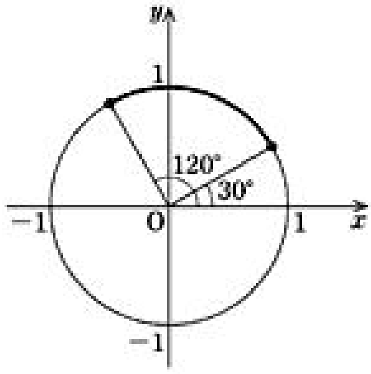
$15°\leqq\theta\leqq60°$ のとき，$30°\leqq2\theta\leqq120°$ より

$\dfrac{1}{2}\leqq\sin2\theta\leqq1$　　⬅ 右図の太線の y 座標の範囲

$\therefore\quad 2\leqq\dfrac{2}{\sin2\theta}\leqq4$　　⬅ 大小が逆に

$2\theta=90°$ $\left(\theta=\underset{\text{ケコ}}{\boxed{45}}°\right)$ のとき　最小値 $\underset{\text{サ}}{\boxed{2}}$

$2\theta=30°$ $\left(\theta=\underset{\text{シス}}{\boxed{15}}°\right)$ のとき　最大値 $\underset{\text{セ}}{\boxed{4}}$



〈解説〉

(1)　三角関数の相互関係，２倍角の公式を使って誘導に従っていけばよい。検算の意味もこめて，最後の tan15° の値は加法定理から計算して確かめておくとよい。

$$\tan15°=\tan(60°-45°)=\frac{\tan60°-\tan45°}{1+\tan60°\tan45°}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1}=2-\sqrt{3}$$

(2)　θ の変域と大小関係に注意して，手堅く解こう。

〔２〕（指数・対数関数）

〈解答〉

$\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1}{\left\{(\sqrt{2})^2\right\}^x}=\dfrac{1}{\left\{(\sqrt{2})^x\right\}^2}=X^2$ であるから

$$\underset{ソ}{\boxed{5}}X^2+\underset{タ}{\boxed{4}}X-1=0$$

$$\therefore\quad (X+1)(5X-1)=0$$

$(\sqrt{2})^x>0$ より，$X>\underset{チ}{\boxed{0}}$

したがって，$X=\dfrac{\overset{ツ}{\boxed{1}}}{\underset{テ}{\boxed{5}}}$

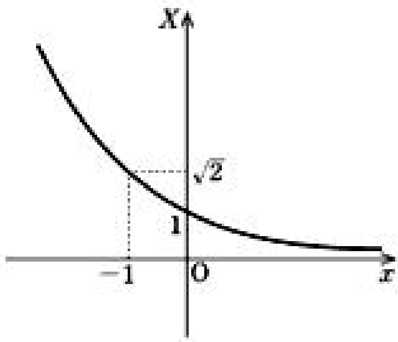
$\dfrac{1}{(\sqrt{2})^x}=\dfrac{1}{5}$ より，$(\sqrt{2})^x=5$

この両辺は正であるから，２乗して，$2^x=5^2$

$$\therefore\quad x=\log_2 5^2=\underset{ト}{\boxed{2}}\log_2\underset{ナ}{\boxed{5}}$$

〈解説〉

文字の置きかえをした場合，文字のとる値の範囲に注意しよう。$X=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ は，右のようなグラフで表される関係なので，$X>0$ となる。（指数関数の値域は，正の実数全体）



また，$(\sqrt{2})^x=5$ は，すぐに対数の表示に直して

$$x=\log_{\sqrt{2}}5=\frac{\log_2 5}{\log_2\sqrt{2}}=\frac{\log_2 5}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_2 5}{\frac{1}{2}}=2\log_2 5$$

としてもよい。途中で，底の変換公式を使っている。

第2問

〔1〕（微分法・積分法）

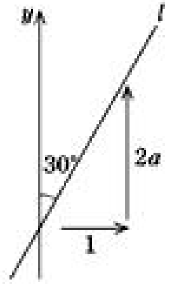
〈解答〉

$y=x^2$ より，$y'=2x$ であるから，l の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a) \qquad \text{すなわち} \quad y=2ax-a^2$$

$x=0$ を代入すると，$y=-a^2$　　よって，Q の座標は $\left(0,\ \underset{ア}{\boxed{-}}\,a^{\overset{イ}{\boxed{2}}}\right)$

l と y 軸のなす角が 30° になるのは，右図より

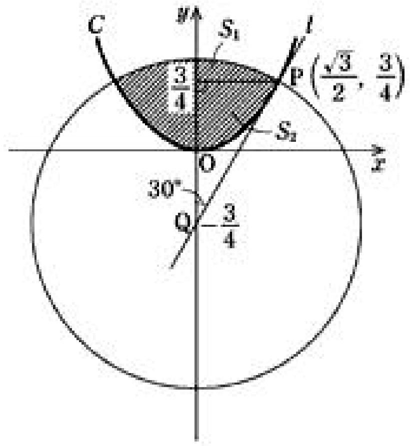


$$2a=\sqrt{3} \qquad \text{すなわち} \quad a=\frac{\sqrt{\overset{ウ}{\boxed{3}}}}{\underset{エ}{\boxed{2}}} \quad \text{のとき。}$$

このとき $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)$ であるから

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\underset{オ}{\boxed{3}}}$$

面積を求めるのは，図の斜線部分であるが，y 軸に関して対称である。第1象限の部分を図のように2分して，それぞれの面積を S_1，S_2 とすると



$$S_1=\pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{30}{360}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$S_2=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx=\left[\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，求める面積は，$2(S_1+S_2)=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\pi}{\underset{カ}{\boxed{2}}}-\frac{\sqrt{\overset{キ}{\boxed{3}}}}{\underset{ク}{\boxed{4}}}$

〈解説〉

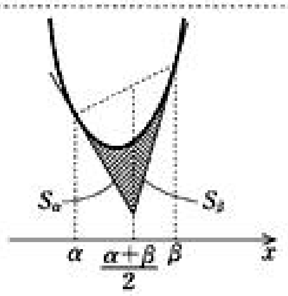
接線の方程式，2点間の距離は基本，y 軸となす角についても，図から手ばやく求めたい。最後の面積計算は，S_1+S_2 を次のように求めてもよい。

（中心角 30° のおうぎ形の面積）－（$x\geqq 0$ の部分で C と l と y 軸で囲まれる部分の面積）

$$=\pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{30}{360}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{4}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

この場合，後半の積分計算に関連して右のことが成り立つ。



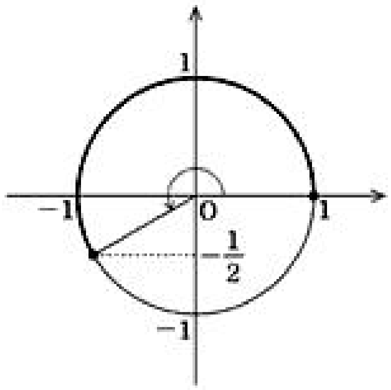
放物線 $y=ax^2+bx+c$ と接線

$$S_\alpha=S_\beta=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{24}$$

〔2〕（微分法，三角関数）

〈解答〉

$0° \leqq \theta \leqq 210°$ のとき，$x=\sin\theta$ のとる値の範囲は



$$\frac{\overset{\text{ケコ}}{\boxed{-1}}}{\underset{\text{サ}}{\boxed{2}}} \leqq x \leqq \underset{\text{シ}}{\boxed{1}}$$

$y=3x-2x^3$ より　$y'=3-6x^2$

$$=-6\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

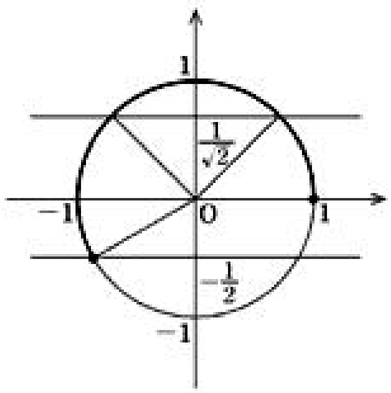
$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<-\dfrac{1}{2}$ より，y の増減は右のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{5}{4}$	↗	極　大 （最大） $\sqrt{2}$	↘	1

$x=\dfrac{1}{\sqrt{\underset{\text{ス}}{\boxed{2}}}}$ のとき　最大値 $\sqrt{\underset{\text{セ}}{\boxed{2}}}$

$x=\dfrac{\overset{\text{ソタ}}{\boxed{-1}}}{\underset{\text{チ}}{\boxed{2}}}$ のとき　　最小値 $\dfrac{\overset{\text{ツテ}}{\boxed{-5}}}{\underset{\text{ト}}{\boxed{4}}}$

をとる。



最大値を与える θ は，$\theta=\underset{\text{ナニ}}{\boxed{45}}°$　および　$\theta=\underset{\text{ヌネノ}}{\boxed{135}}°$

最小値を与える θ は，$\theta=\underset{\text{ハヒフ}}{\boxed{210}}°$

〈解説〉

変数をとりかえた後は，微分して，変域に注意して増減表をかけばよい。θ と x の関係は，単位円やグラフを通して，しっかりと確認しておこう。

第3問　（空間ベクトル）

〈解答〉

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\vec{l}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=a\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-b)\vec{l}+b\vec{m}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

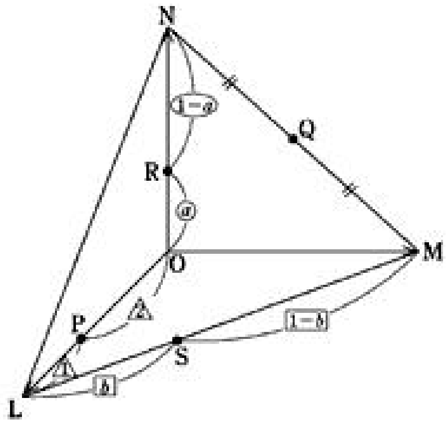
$$=\left(\underset{\text{ア}}{\boxed{1}}-\underset{\text{イ}}{\boxed{b}}\right)\vec{l}+\underset{\text{ウ}}{\boxed{b}}\vec{m}-\underset{\text{エ}}{\boxed{a}}\vec{n}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$=\frac{\overset{\text{オ}}{\boxed{2}}}{\underset{\text{カ}}{\boxed{3}}}\vec{l}-\underset{\text{キ}}{\boxed{a}}\vec{n}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$=\frac{\overset{\text{ク}}{\boxed{1}}}{\underset{\text{ケ}}{\boxed{2}}}\vec{m}+\left(\frac{\overset{\text{コ}}{\boxed{1}}}{\underset{\text{サ}}{\boxed{2}}}-\underset{\text{シ}}{\boxed{a}}\right)\vec{n}$$



(2)　$\vec{l}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{m}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(1-b,\ b,\ -a),\qquad \overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{2}{3},\ 0,\ -a\right),\qquad \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-a\right)$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=x\overrightarrow{\mathrm{RP}}+y\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ を成分の等式で表すと

$$(1-b,\ b,\ -a)=\left(\frac{2}{3}x,\ \frac{1}{2}y,\ -ax+\left(\frac{1}{2}-a\right)y\right)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{3}x=1-b\ \cdots①,\qquad \frac{1}{2}y=b\ \cdots②,\qquad -ax+\left(\frac{1}{2}-a\right)y=-a\ \cdots③$$

①より，$x=\dfrac{\overset{\text{ス}}{\boxed{3}}}{\underset{\text{セ}}{\boxed{2}}}(1-b)$

②より，$y=\underset{\text{ソ}}{\boxed{2}}b$

これらを③に代入すると，　$-\dfrac{3}{2}a(1-b)+2\left(\dfrac{1}{2}-a\right)b=-a$

$$\therefore\quad -3a+3ab+2b-4ab=-2a$$

$$\therefore\quad \underset{\text{タチ}}{\boxed{ab}}+\underset{\text{ツ}}{\boxed{a}}-\underset{\text{テト}}{\boxed{2b}}=0\quad\cdots\cdots④$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ となるのは，$\dfrac{2}{3}\times0+0\times\dfrac{1}{2}-a\left(\dfrac{1}{2}-a\right)=0$ のとき，

すなわち，$a\left(\dfrac{1}{2}-a\right)=0$　　$0<a<1$ より　$a=\dfrac{\overset{\text{ナ}}{\boxed{1}}}{\underset{\text{ニ}}{\boxed{2}}}$

④に代入して，$\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}-2b=0$　　$\therefore\ b=\dfrac{\overset{\text{ヌ}}{\boxed{1}}}{\underset{\text{ネ}}{\boxed{3}}}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\dfrac{\overset{\text{ノハヒ}}{\boxed{-19}}}{\underset{\text{フヘ}}{\boxed{36}}}$$

〈解説〉

ベクトルの加減計算，分点の位置ベクトル，成分表示，内積といった基本的事項の確認である。(2)は，図形から離れた計算がほとんどだが，空欄が丁寧に与えられているので一歩一歩進めていけばよい。

第4問　（複素数と複素数平面）

〈解答〉

(1)　$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\underset{ア}{\boxed{2}}\sqrt{\underset{イ}{\boxed{2}}}\left(\cos\underset{ウエ}{\boxed{45}}^\circ+i\sin\underset{ウエ}{\boxed{45}}^\circ\right)$$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より，$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$ なので

$$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=2\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$$

$\therefore$　$r^3=2\sqrt{2}$　…③，　　$3\theta=45^\circ+360^\circ\times k$（$k$ は整数）　…④

③より，$r>0$ であるから，$r=\sqrt{\underset{オ}{\boxed{2}}}$

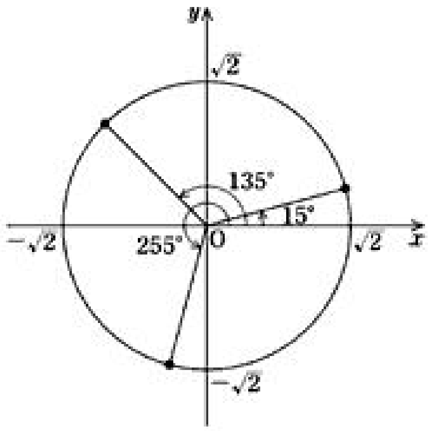
④より，$\theta=15^\circ+120^\circ\times k$

ここで，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ であるから，$k=0,\ 1,\ 2$

$k=0$ のとき，$\theta=\underset{カキ}{\boxed{15}}^\circ$

$k=1$ のとき　$\theta=\underset{クケコ}{\boxed{135}}^\circ$

$k=2$ のとき　$\theta=255^\circ$



第２象限にある解は

$$\sqrt{2}(\cos135^\circ+i\sin135^\circ)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\underset{サ}{\boxed{1}}+i$$

(2)　$z^6-4z^3+8=0$　　$\therefore$ $(z^6-4z^3+4)+4=0$　　$\therefore$ $(z^3-2)^2=-\underset{シ}{\boxed{4}}$

したがって，$z^3-2=\pm2i$　　$\therefore$　$z^3=2\pm\underset{ス}{\boxed{2}}i$

$z^3=2+2i$ は①である。

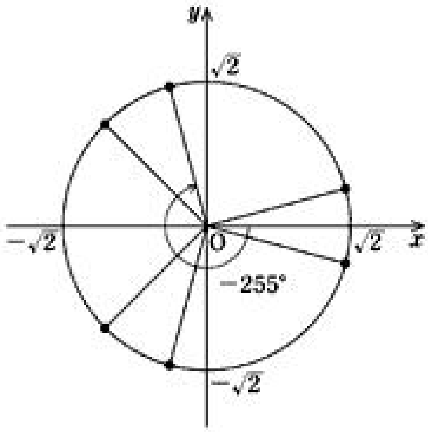
　また，$z^3=2-2i$ について両辺の共役複素数をとると

$$\overline{z^3}=2+2i$$

すなわち

$$\left(\overline{z}\right)^3=2+2i$$

となるので，この方程式の解は，①の解の共役複素数として得られる。



　よって，第２象限にある②の解は，$-1+i$ と

$$\sqrt{2}\{\cos(-255^\circ)+i\sin(-255^\circ)\}\quad\cdots\cdots⑤$$

である。

$$\cos(-255^\circ)=\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

同様に，$\sin(-255^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ であるから，⑤は

$$\sqrt{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}i\right)=\frac{\overset{セ}{\boxed{1}}-\sqrt{\overset{ソ}{\boxed{3}}}}{\underset{タ}{\boxed{2}}}+\frac{\overset{チ}{\boxed{1}}+\sqrt{\overset{ツ}{\boxed{3}}}}{\underset{テ}{\boxed{2}}}i$$

②の解は，第 1 象限に 1 個，第 3 象限に $\underset{ト}{\boxed{2}}$ 個，第 4 象限に $\underset{ナ}{\boxed{1}}$ 個

〈解説〉

(1)は，n 乗根を求める基本的な問題。誰でも必ず練習しているはずのパターン問題だ。(2)は，(1)の結果を利用するが，共役複素数に着目すれば，さほど時間をかけずに完答できるだろう。

第5問 （確率分布）

〈解答〉

(1) さいころを２回振るので，Yのとり得る値は０，１，２の$\boxed{3}_{ア}$通り

(2) $X=2$ となる確率は，硬貨を３回投げたとき２回表が出る確率であるから

$$ {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\overset{イ}{\boxed{3}}}{\underset{ウ}{\boxed{8}}} \quad \cdots\cdots① $$

$X=2$ の条件のもとで $Y=1$ となる条件つき確率は，さいころを２回振ったとき１または２が１回出る確率であるから

$$ {}_2C_1\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{\overset{エ}{\boxed{4}}}{\underset{オ}{\boxed{9}}} \quad \cdots\cdots② $$

$X=2$，$Y=1$ となる確率は，乗法定理により①と②の積で求められるから

$$ \frac{3}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{\overset{カ}{\boxed{1}}}{\underset{キ}{\boxed{6}}} $$

$Y=1$ となる確率は，「$X=1$，$Y=1$」，「$X=2$，$Y=1$」，「$X=3$，$Y=1$」の３つの事象の確率の和であるから

$$ \frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{\overset{クケ}{\boxed{25}}}{\underset{コサ}{\boxed{72}}} $$

(3) 余事象の確率を考えて，$1-\left(\frac{25}{72}+\frac{5}{72}+\frac{1}{216}\right)=\frac{\overset{シスセ}{\boxed{125}}}{\underset{ソタチ}{\boxed{216}}}$

(4) Yの分布は右のようになるので，平均は

$$ 1\times\frac{25}{72}+2\times\frac{5}{72}+3\times\frac{1}{216}=\frac{\overset{ツ}{\boxed{1}}}{\underset{テ}{\boxed{2}}} $$

k	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

(5) $X=2$，$Y=0$ となる確率は，①を用いて

$$ \frac{3}{8}\times\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{1}{6} $$

また，$Y=0$ となる確率は $\frac{125}{216}$ であるから，求める条件つき確率を p とすると

$$ \frac{125}{216}p=\frac{1}{6} \qquad \therefore\ p=\frac{1}{6}\times\frac{216}{125}=\frac{\overset{トナ}{\boxed{36}}}{\underset{ニヌネ}{\boxed{125}}} $$

〈解説〉

(1)の途中と(5)で，乗法定理 $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$ を使う。条件つき確率の意味と使い方を理解しておくようにしよう。