Ⓩ

数　学　②　〔数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学B〕

（100点　60分）

工業数理，簿記及び情報関係基礎の問題冊子は，大学入試センター試験の出願時に，それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

Ⅰ　注　意　事　項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出　題　科　目	ペ　ー　ジ	選　　択　　方　　法
数　　学　　Ⅱ	4〜14	左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15〜29	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号（数字及び英字）を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄，試験場コード欄**

氏名・フリガナ及び**試験場コード**（数字）を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，科目の下の ◯ に**マーク**しなさい。**マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，0点**となります。

5　選択問題については，解答する問題を決めたあと，その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし，**指定された問題数をこえて解答してはいけません。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

II　解答上の注意

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字（0～9），符号（−），又は文字（a，b，c，d）が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-8a$ と答えたいとき

ア	**⊖**	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	**⑧**	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
ウ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	**ⓐ**	ⓑ	ⓒ	ⓓ

2　分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例 2　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

エ	**⊖**	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
オ	⊖	⓪	①	②	③	**④**	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
カ	⊖	⓪	①	②	③	④	**⑤**	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

補足説明

数学②「数学Ⅱ・数学B」

２２ページ　第3問

「点Pからmに下ろした垂線の足」とは，点Pからひいたmの垂線とmとの交点のことである。

数学Ⅱ・数学B

問　題	選択方法
第1問	必　答
第2問	必　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	
第6問	

第1問　（必答問題）（配点　30）

〔1〕　不等式

$$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$$

を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < x \leqq \boxed{\text{イ}}$ である。x がこの範囲にあるとき

$$y=4^x-6\cdot 2^x+10$$

の最大値と最小値を求めよう。

$X=2^x$ とおくと，X のとる値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < X \leqq \boxed{\text{エ}}$ であり

$$y=\left(X-\boxed{\text{オ}}\right)^{\boxed{\text{カ}}}+\boxed{\text{キ}}$$

である。したがって，y は $x=\boxed{\text{ク}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとり，$x=\log_2\boxed{\text{コ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

（数学Ⅱ・数学B第1問は18ページに続く。）

〔2〕 a を $0° < a < 180°$ を満たす角度とする。$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲で関数

$$f(\theta) = \sin(\theta - a) - \sin\theta$$

を考える。

(1) 方程式

$$f(\theta) = 0$$

の解 θ は a を用いて

$$\theta = \boxed{\text{シス}}° + \frac{a}{2}$$

と表される。さらに，この解 θ が $\sin(\theta - a) = \dfrac{1}{2}$ を満たすならば

$$a = \boxed{\text{セソタ}}°$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) a を(1)で求めた角度とするとき，関数 $f(\theta)$ は

$\theta = \boxed{\text{チツテ}}^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$

$\theta = \boxed{\text{ニヌ}}^\circ$ のとき最小値 $-\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$

をとる。

第2問 (必答問題) (配点 30)

(1) 座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。a は $a \neq 1$ を満たす実数とし，C 上に点 $\mathrm{P}(a+1, (a+1)^2)$ と点 $\mathrm{Q}(2a, 4a^2)$ をとる。2点P，Qを通る直線を ℓ とすると，ℓ の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}}\,a + \boxed{\text{イ}}\right)x - \boxed{\text{ウ}}\,a^2 - \boxed{\text{エ}}\,a$$

である。次に，b は $b \neq 1$，$b \neq a$ を満たす実数として，2点

$$\mathrm{R}(b+1, (b+1)^2),\quad \mathrm{S}(2b, 4b^2)$$

を通る直線を m とする。直線 ℓ，m の交点Tは

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1),\ \boxed{\text{キ}}\,ab + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1)\right)$$

である。よって，b を限りなく a に近づけるとき，点Tは限りなく点

$$\mathrm{U}\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \boxed{\text{サ}}\,a^2 + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

に近づく。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

(2) (1)で求めた点Uは，a の値によらない放物線

$$D : y = \frac{\boxed{\text{シ}}\,x^2 - \boxed{\text{ス}}\,x + \boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

上にある。さらに，点Uにおける放物線 D の接線の傾きは

$\boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}$ である。放物線 D の接線で原点Oを通るものは

$$y = x \quad \text{と} \quad y = \boxed{\text{ツテ}}\,x$$

の二つである。

(3) 二つの放物線 C，D の共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}}\right)$ である。放物線 C，D および y 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第3問 （選択問題）（配点　20）

点A(0, 0, 0)を通り，ベクトル$\vec{u}=(1, 1, 0)$に平行な直線をℓとする。また，点B(0, 5, −2)を通り，ベクトル$\vec{v}=(1, 0, 1)$に平行な直線をmとする。ℓ上の点Pからmに下ろした垂線の足をP′とする。また，m上の点Qからℓに下ろした垂線の足をQ′とする。PP′ = QQ′かつ$\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{QQ'}$となるPとQを求めよう。

(1) 実数t，t'，s，s'により

$$\overrightarrow{AP}=t\vec{u},\ \overrightarrow{BP'}=t'\vec{v},\ \overrightarrow{BQ}=s\vec{v},\ \overrightarrow{AQ'}=s'\vec{u}$$

と表される。直線PP′と直線mが直交するから

$$t'=\boxed{ア}+\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}t$$

である。ベクトル$\overrightarrow{PP'}$の成分をtを用いて表すと

$$\overrightarrow{PP'}=\left(\boxed{エ}-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}t,\ \boxed{キ}-t,\ \boxed{クケ}+\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}t\right)$$

である。同様に直線QQ′と直線ℓが直交するから

$$s'=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}s$$

である。ベクトル$\overrightarrow{QQ'}$の成分をsを用いて表すと

$$\overrightarrow{QQ'}=\left(\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}s,\ \frac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}+\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}s,\ \boxed{ナ}-s\right)$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

(2) さて，$\mathrm{PP}'^2+\mathrm{QP}'^2=\mathrm{PQ}^2=\mathrm{QQ}'^2+\mathrm{PQ}'^2$ であるから，$\mathrm{PP}'=\mathrm{QQ}'$ であるための条件は $\mathrm{QP}'=\mathrm{PQ}'$ である。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}'}=(s'-t)\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}'}=(t'-s)\vec{v}$ であるから，$\mathrm{PQ}'=\mathrm{QP}'$ となるのは

$$s=\boxed{\text{ニ}}-t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

または

$$s=\boxed{\text{ヌネ}}+t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のときである。

(3) ①が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QQ}'}$ が垂直になるのは $t=\boxed{\text{ノ}}$ または $t=\boxed{\text{ハ}}$ のときである。$\left(\boxed{\text{ノ}}\right.$ と $\boxed{\text{ハ}}$ は解答の順序は問わない。$\left.\right)$

②が成り立つときは，$\overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QQ}'}$ が垂直になるような実数 t の値はない。

第4問 (選択問題) (配点　20)

複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数)は $y \neq 0$ を満たし，かつ 1，z，z^2，z^3 は相異なるとする。また z に共役な複素数を $\bar{z} = x - yi$ とする。

(1) 複素数平面において 1，z，z^2，z^3 の表す点をそれぞれ A_0，A_1，A_2，A_3 とする。線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わる条件を求めよう。線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外の点Bで交わるとする。点Bを表す複素数を w とする。点Bが線分 A_0A_1 を $a:(1-a)$ に内分していれば

$$w = az + 1 - a$$

と表される。ここで $0 < a < 1$ である。点Bが線分 A_2A_3 を $b:(1-b)$ に内分していれば

$$w = bz^3 + (1-b)z^2$$

と表される。ここで $0 < b < 1$ である。ゆえに

$$bz^3 + (1-b)z^2 = az + 1 - a$$

すなわち

$$\left(z - \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}z^2 + z + 1 - \boxed{\text{ウ}}\right) = 0$$

である。z は実数ではないから

$$z + \bar{z} = -\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}, \quad z\bar{z} = \frac{1 - \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。これから a と b を，x と y を用いて表すと

$$a = \boxed{\text{キ}} + \frac{x^{\boxed{\text{ク}}} + y^{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}\,x}, \quad b = -\frac{1}{\boxed{\text{サ}}\,x}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

したがって，$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ より，線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わる条件は

$$x < \frac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}} \quad かつ \quad \left(x + \boxed{ソ}\right)^2 + y^2 < \boxed{タ}$$

である。

(2) z^4 の表す点を A_4 とする。z が(1)の条件を満たすとき，すなわち，線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わるとき，線分 A_3A_4 と線分 A_1A_2 は両端以外で $\boxed{チ}$。

$\boxed{チ}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 必ず交わる

① 交わることはない

② 交わることも，交わらないこともある

第5問 （選択問題）（配点　20）

二つのさいころAとBがあり，各面に1，2，3，4，5，6という目が書かれている。これらのさいころについて，Aのさいころの各面には1，3，4，5，6，8の目のシールを貼（は）り，Bのさいころの各面には1，2，2，3，3，4の目のシールを貼った。

はじめに硬貨を投げ，次にAとBのさいころを同時に投げる次の試行を行う。

- 硬貨を投げて表が出れば，両方のさいころのシールをすべてはがして二つのさいころを同時に投げる。
- 硬貨を投げて裏が出れば，両方ともシールをはがさずに二つのさいころを同時に投げる。

この試行について次の問いに答えよ。ただし，シールの有無にかかわらず，さいころの各面の出方は同様に確からしいとする。

(1) 二つのさいころの目の和が3の倍数になる場合は，硬貨を投げて表が出たとき $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，裏が出たとき $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りある。したがって，この試行において二つのさいころの目の和が3の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，目の和が3の倍数であるという条件のもとで，二つのさいころの目の差が2以下である条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(2)　この試行における二つのさいころの目の和を表す確率変数をXとする。

硬貨を投げて表が出たとき，同時に投げた二つのさいころの目の和の平均(期待値)は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

硬貨を投げて裏が出たとき，二つのさいころの目の和の平均は $\boxed{\text{ス}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

したがって，この試行におけるXの平均E(X)は $\boxed{\text{チ}}$ ，分散V(X)は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。