

שאלון בחינה בקורס: חשבון אינפיניטסמלי מתקדם (88-230-05)

מרצה: ד"ר שחר נבו

סמסטר א', מועד א': י"ב בשבט תשס"ט (6.2.09)

משך הבחינה: שעה וחצי.

חומר עזר: מחשבון כיס בלבד.

ענה על חמש מתוך שש השאלות הבאות

1. נסח והוכח את המשפט בדבר השוויון $f''_{xy} = f''_{yx}$.

2. תהי $f(x, y)$ פונקציה ממשית המוגדרת לפי $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + xy} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (0, 0) \end{cases}$.

א. היכן ב- $\mathbf{R}^2$ רציפה?

ב. מהן $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

ג. היכן ב- $\mathbf{R}^2$ דיפרנציבילית?

ד. מהי הנגזרת הכיוונית של f בכיוון $\pi/3$?

ה. היכן ב- $\mathbf{R}^2$ גזירה ברציפות?

3.

א. נניח כי המשוואה $F(x, y, z) = 0$ מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה לפי כל המשתנים x, y, z ומגדירה (כמובן) פונקציות $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$.

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1 \quad \text{כי } x = x(y, z)$$

ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של $f(x, y) = x^2 - \cos(x + y)$ ב- $\mathbf{R}^2$.

4.

א. הראה כי אם p היא פירמידה משולשת עם בסיס בעל שטח s וגובה h אז נפחה הוא

$$V(p) = \frac{s \cdot h}{3}$$

ב. נגדיר שני מעגלים $C_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $C_2 = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$,

$$\text{תהי } (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \text{ כפי שראינו בכיתה}$$

$$\oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy = 2\pi. \quad \text{מהו } \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy \text{ וכיצד אתה מסביר את ההבדל?}$$

5.

א. חשב $\iint_D \sin(x-y) \cos(2x-y) dx dy$ באשר D הוא התחום הכלוא בין

$$2x - y = 1, \quad 2x - y = 3, \quad x + y = 0, \quad x + y = 1$$

ב. תהינה $\phi, \psi : D \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציות ב $C^2(D)$ כאשר D תחום ב- $\mathbf{R}^3$. הראה כי

$$\nabla x (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi x \nabla \psi$$

6.

$$\text{א. חשב } \oint_{x^2 + y^2 = 1} x^4 y dx - xy^4 dy$$

ב. חשב את שטח המשטח $z = x^{2/3} + y^{2/3}$ $1 \leq x, y \leq 2$

בהצלחה!