

חשבון אינפיניטסימלי 4 (88-236-01/05)
מועד ב', תשע"ד

מרצים: פרופ' אנדריי לרנר, ד"ר ודים זאב אוסטפנקו
משך המבחן: 2.5 שעות
ללא שימוש בחומר עזר (כולל מחשבון כיס)

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה ל-21 נקודות.

1. תהי $M \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה המוגדרת ע"י

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^3 = 1, 2x - y + 3z = 0\}$$

(א) האם קבוצה זו היא יריעה? אם כן, מהו מימדה?
(ב) מצאו מרחב משיק ל- M בנקודה $(1, -1, -1)$.

2. נתונה התבנית $\omega = x_1^2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3$ ב- $\mathbb{R}^3$ וההעתקה $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 y_2, y_2 y_3, y_4)$$

מצאו את $F^*(d\omega)$, $F^*(\omega)$, $d\omega$.

3. נתונה התבנית

$$\omega = (2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2 x_3^2) dx_1 + (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_1 x_3^2) dx_2 + 2x_1 x_2 x_3 dx_3$$

א. בדקו ש- ω סגורה.
ב. קבעו האם ω מדוייקת. אם כן, מצאו פונקציה f כך ש- $df = \omega$.
ג. חשבו את $\int_\Gamma \omega$ עבור קטע הישר שבין הנקודות $(-1, 1, -1)$ ו- $(2, 3, 4)$.

4. חשבו את אורך העקומה $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$.

5. חשבו את

$$\iint_S (x + y^2) dy \wedge dz + (y + z^2) dz \wedge dx + (z + x^2) dx \wedge dy$$

כאשר

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

עם נורמל חיצוני.

6. יהי M משטח עם האטלס $A = \{(F_1, U_1), (F_2, U_2)\}$. נניח $x \in F_1(U_1) \cap F_2(U_2)$. הגדירו מרחב משיק $T_x(M)$ והראו שמרחב הזה אינו תלוי בבחירת המפה (F_i, U_i) .

בהצלחה!

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^4 + y^4 + z^3 - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & 3z^2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, z = \pm 1) = A$$

Rank(J) < 2

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 3(\pm 1) \neq 0 \Rightarrow A \notin M$$

(3-2=1) rank(J) = 1

$$\text{Null}(J)|_{(1,-1,-1)} = \text{Null} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x - 4y + 3z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \Rightarrow 2x = 3y$$

$$2y + 3z = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{3}y \quad x = \frac{3}{2}y$$

$$V_M(1, -1, -1) = \text{Span} \left\{ \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{2}{3} \right) \right\}$$

$$\omega = (2xy + y^2 + yz^2)dx + (x^2 + 2xy + xz^2)dy + (2xyz)dz \quad .3$$

$$\begin{aligned} d\omega = & (2x + 2y + z^2)dy \wedge dx + (2yz)dz \wedge dx + \\ & (2x + 2y + z^2)dx \wedge dy + (2xz)dz \wedge dy + \\ & (2yz)dx \wedge dz + (2xz)dy \wedge dz = 0 \end{aligned} \quad .1c$$

$$\int 2xy + y^2 + yz^2 dx = x^2y + y^2x + yz^2x + \varphi(y, z) = \quad .2$$

$$\int x^2 + 2xy + xz^2 dy = x^2y + xy^2 + xz^2y + \psi(x, z) =$$

$$\int 2xyz dz = xyz^2 + \mu(x, y)$$

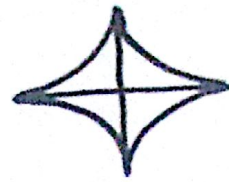
$$\begin{aligned} \text{[2]} \quad \mu(x, y) &= x^2y + y^2x \quad \text{p1} \quad 0 = \varphi(y, z) = \psi(x, z) \quad \text{نور} \\ dF &= \omega \quad \text{نور} \quad F = xyz^2 + x^2y + y^2x \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} \omega = F(2, 3, 4) - F(-1, 1, -1) = \quad .2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 16 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - [-1 + 1 - 1] \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{\Gamma} \omega = 127}$$

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$$



4

$$x = \cos^3(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$y = \sin^3(\theta)$$

$$\Gamma(\theta) = (\cos^3(\theta), \sin^3(\theta))$$

$$\Gamma'(\theta) = (-3\cos^2(\theta)\sin(\theta), 3\sin^2(\theta)\cos(\theta))$$

$$\|\Gamma'(\theta)\| = \sqrt{9\cos^4(\theta)\sin^2(\theta) + 9\sin^4(\theta)\cos^2(\theta)} =$$

$$= 3\sqrt{\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)} = 3|\cos(\theta)| \cdot |\sin(\theta)|$$

$$\frac{1}{3}L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| |\sin(\theta)| d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\cos(2\theta) \Big|_0^{\pi/2} + \cos(2\theta) \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \cos(2\theta) \Big|_{\pi}^{3\pi/2} + \cos(2\theta) \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{4} [-(-1-1) + (1+1) - (-1-1) + (1+1)] = \frac{1}{4} (2+2+2+2) \Rightarrow$$

$$\boxed{L(\Gamma) = 6}$$

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$



$$F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$$

$$\operatorname{div} F = 3$$

$$\iiint_G \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 12\pi$$

נבחן את פני המעטפת (I₁) ופני התחתון (I₂)

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1)$$

I₁ - פני המעטפת

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

$$\iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4} F(\Phi(x, y)) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy = \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4} (x + y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1 + r^2 \cos^2 \theta) \, d\theta \, dr$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{2} \cdot r^3 + \frac{r^2}{2} \cdot r \, d\theta \, dr = \int_0^1 \left(\frac{r^3}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \, d\theta + \frac{r^3}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \, dr = \frac{3}{2}\pi$$

$$\iint F(\Phi(x, y)) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = 0$$

$$\Phi(x, y) = (x, y, 0) : I_2 \text{ - פני התחתון}$$

$$\iint_S F \, dS = 12\pi - \frac{3}{2}\pi - 0 \Rightarrow$$

אם כן

$$\iint_S F \, dS = \frac{21}{2}\pi$$

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$$



5

$$F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$$

$$\operatorname{div} F = 3$$

$$\iiint_G \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 12\pi$$

נבחן את פניו של I_1 ונחלקו את החלק I_2 ונחלקו

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1)$$

בראשית I_1 - δ

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

$$\iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4} F(\Phi(x, y)) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy = \iint 1 + x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1 + r^2 \cos^2 \theta) \, d\theta \, dr$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{2} r^3 + \frac{3}{2} r \, d\theta \, dr = 3r \int_0^1 r \, dr = \frac{3}{2} \pi$$

$$\iint F(\Phi(x, y)) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

$$\Phi(x, y) = (x, y, 0) : I_2$$

$$\iint_S F \, ds = 12\pi - \frac{3}{2}\pi - 0 \Rightarrow$$

ואם כן

$$\iint_S \vec{F} \, ds = \frac{21}{2} \pi$$