

ספירה

1 ספירה

תה $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ תת-קבוצות.

הדבר: התמונה של A מוגדרת:

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

התמונה ההפוכה של B :

$$f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$$

למשל:

1. $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ אם $A \subseteq B \subseteq Y$
2. $f(A) \subseteq f(B)$ אם $A \subseteq B \subseteq X$

הוכחה:

$$\square \quad x \in f^{-1}(B) \leftarrow f(x) \in B \leftarrow f(x) \in A \subseteq B \leftarrow x \in f^{-1}(A) \quad \text{יהי}$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{למשל}$$

הוכחה:

$$\square \quad x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \leftarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \leftarrow \exists i_0 \in I \text{ כן } f(x) \in B_{i_0} \leftarrow x \in f^{-1}(B_{i_0}) \leftarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$$

$$\square \quad x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \leftarrow x \in f^{-1}(B_{i_0}) \leftarrow f(x) \in B_{i_0} \leftarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \leftarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \quad \text{יהי}$$

למשל:

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{1. נכון! לדיון קטן}$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i) \quad \text{2.}$$

נניח f פונקציה חד-חד-ערכית.

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{אם } f \text{ חד-חד-ערכית}$$

מרחקים

הדבר: תהי M קבוצה של מרחקים פונקציה $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$ המקיימת:

$$x = y \iff d(x, y) = 0$$

$$x, y \in M \text{ לכל } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\forall x, y, z \in M \text{ לכל } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

דוגמה: (M, d) קוארנט d -1, נקראת "מרחק" M

המרחקים d הם $d(x, y) \geq 0$

הדבר: (מרחק נורמה)

יהי X מרחב וקטורי. נגדיר את פונקציית הנורמה: $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ המקיימת:

$$\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (1) \quad \|x\| \geq 0 \quad (2) \quad \|x\| = \alpha \|y\| \iff x = \alpha y \quad (3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (4) \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$$

תרגיל: הוכיחו דמיון הקטורי.

$$X = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

הפונקציה $\|(x_n)\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ היא נורמה. [מרחב זה מסומן ℓ_∞]

הוכחה:

$$1. X = 0 \iff \|x\| = 0$$

($\Rightarrow$) זהיר!

$$x = 0 \iff n \in \mathbb{N} \text{ } \forall \text{ } x_n = 0 \iff \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0 \iff \|x\| = 0 \iff \|(x_n)\| = 0$$

$$2. \|(x_n)\| = \sup\{|x_n|\} = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = \|(x_n)\|$$

3. אט"מ

$$\sup\{|x_n + y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\} = T$$

$$\square \quad \sup\{|x_n + y_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq T \iff \|(x_n) + (y_n)\| \leq \|(x_n)\| + \|(y_n)\|$$

הערה: יהי M ג'ט ומה $\{x_n\}$ סדרה. נאמר $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (מרחב ℓ_∞).

אם $\epsilon > 0$ $\forall \epsilon$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \epsilon$.

טענה שקולה:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff x_n \xrightarrow{d} x$$

תרגיל: תהי $\{e_n\}$ סדרה דמיון. הוכיחו שהסדרה $\{e_n\}$ אינה מתכנסת דמיון. למה שהיא בן מתכנסת "רביז רביז"?

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

e_n - זו סדרה של איזורים הם אפס, פרט ל-1 במקום ה- n :

הוכחה: "רביז רביז". כל כנז הוא סדרה קוואזי לזנז ("ס") ולכן מתכנסת.

מדוע יוסדרה $\{e_n\}$ אינה מתכנסת?

ראו: סדרה מתכנסת $\iff$ סדרה Cauchy.

אלו הסדרה שלנו אינה קושי מהסיבה הבאה:

$$\forall n \neq m : \|e_m - e_n\| = 1$$

המרחק הטרנקה ה- a -אדיק-אלי- a

יהי $a \in \mathbb{N}, a \neq 1$. נרצה להגדיר טרנקה על $\mathbb{Z}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: d_a(x, y) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{a^{k(x, y)}} \end{cases}$$

$$k(x, y) = \max\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a^i \mid (x - y)\} : \text{כח ש } a$$

המרחק:

(א) חשבו $d_3(20, 2)$

(ב) תארו את $B_{d_3}(0, \frac{2}{3})$, $B_{d_3}(0, \frac{1}{3})$

(ג) יהי $0 \neq x \in B_{d_3}(0, 1)$. הראו כי $B_{d_3}(0, 1) = B_{d_3}(x, 1)$

(ד) הוכיחו $x_n = 2 \cdot 3^n + 5 \rightarrow 5$

פתרון

$$d_3(20, 2) = \frac{1}{3^{k(20, 2)}} \quad (א)$$

$$k(20, 2) = \max\{i : 3^i \mid 18\} = 2$$

$$d_3(20, 2) = \frac{1}{9}$$

$$B_{d_3}(0, \frac{2}{3}) = B_{d_3}(0, 1) \quad (ב)$$

כי לכל x יהיו המרחקים הם $1 = \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$, $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$

נראה $B_{d_3}(0, 1)$

$$\frac{1}{3^{k(x, 0)}} < \frac{1}{3^0}, \quad d_3(x, 0) < 1, x \in B_{d_3}(0, 1)$$

$$3 \mid x \iff i > 0 \iff \max\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 3^i \mid x - 0\} > 0 \iff k(x, 0) > 0 \iff$$

$$B_{d_3}(0, \frac{2}{3}) = B_{d_3}(0, \frac{1}{3}) = 3\mathbb{Z}$$

(ג) יהי $0 \neq x \in B_{d_3}(0, 1)$

נוכיח: רק הפכה אלמתי: $B_{d_3}(0, 1) \subseteq B_{d_3}(x, 1)$

יהי $y \in B_{d_3}(0, 1) \leftarrow 3 \mid y$, וכן $y \in B_{d_3}(x, 1)$

$$d_3(y, x) < 1$$

$$\frac{1}{3^{k(x, y)}} < \frac{1}{3^0}$$

$$k(x, y) > 0$$

$$3^i \mid (x - y) : \text{קיים } i > 0 \text{ כך ש}$$

$$\text{נראה: } y \in B_{d_3}(x, 1) \leftarrow 3 \mid x - y \leftarrow 3 \mid x \leftarrow 0 \neq x \in B_{d_3}(0, 1)$$

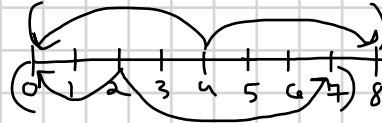
נותר להראות: אם $y = 0$ אז $0 \in B_{d_3}(x, 1)$ כי $d_3(0, x) < 1$ לכל $x \in B_{d_3}(0, 1)$ הימין.

$$d_3(x_n, x) \rightarrow 0 \iff x_n \xrightarrow{d_3} x \quad (ד)$$

$$d_3(2 \cdot 3^n + 5, 5) = \frac{1}{3^{k(2 \cdot 3^n + 5, 5)}} = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$$

תרגיל: האם ייתכן כי $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2)$ ו- $r_1 > r_2$?

פתרון: כן. נסתכל למשל ב- $\mathbb{R}^+$, המרחב כגון -מרחב של $\mathbb{R}$. הכדור $B(4, 4)$ יהיה הקטע הפתוח: $(0, 8)$ והכדור $B(2, 5)$ יהיה הקטע $(0, 7)$.



28.3.2012

תרגיל 2

גזכום: יהי (X, d) מ"מ. $A \subseteq X$ נקראת נקודת פתוחה אם לכל $x \in A$ קיים סביבה $B(x, r) \subseteq A$.
טענה: יהי (X, d) מ"מ. יהי (A, d_A) מ"מ. $U \subseteq A$ פתוחה $\iff$ קיימת $V \subseteq X$ פתוחה כך ש- $U = V \cap A$.

בראי: יהי (A, d_A) מ"מ של (X, d) . גוף $V \subseteq X$ הפתוחה כי $V \cap A$ פתוחה ב- (A, d_A) .
האם V פתוחה ב- X ?

פתרון: לא!

$$X = \mathbb{R}$$

$$A = (1, 2), V = (1, 3]$$

$$V \cap A = A \rightarrow \text{פתוחה}$$

אלו $(1, 3]$ אינה פתוחה ב- $\mathbb{R}$. (הנקודה הממשלית היא 3)

תרגיל: נתון $\mathbb{R}$ יתג-מרחב $A = [0, 2]$. האם $U = (1, 2]$ פתוחה ב- A ?

פתרון: $U \cap A = (1, 2]$, ניקח $V = (1, 3)$, $V \cap A = (1, 2]$.

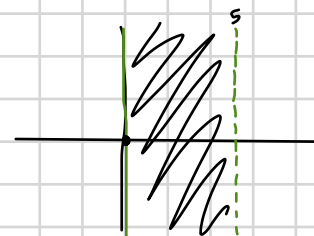
תרגיל: האם הנקודות הזאת פתוחות ב- $\mathbb{R}^2$?

$$E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5\}$$

$$D = \{(x, y) : xy \leq 1\}$$

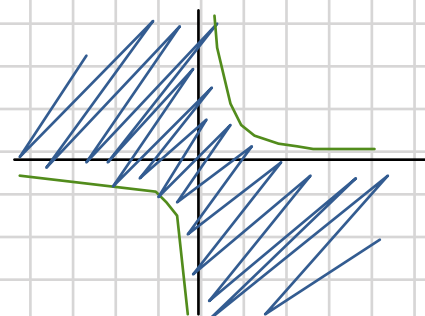
פתרון:

(א)



הנקודות אינה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$, מכיון שמשל עקור $(0, 0)$, לא קיים סביבה $B((0, 0), r) \subseteq E$.

(ב)



הנקודה כן תהיה פתוחה.

הדבריה: קבוצה $S \subseteq M$ נקראת "סגורה" אם $S \subseteq M$ פתוחה.

הדברה שקולה: יהי (X, d) מ"מ. $A \subseteq X$ סגורה $\iff$ לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ נקיים $x_n \rightarrow x$, $x \in A$.

כלומר, קבוצה היא סגורה אם היא מכילה את כל נק' הגבול שלה.

דוגמא: נתון קבוצה $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ בפתח קבוצה $\mathbb{R}$.

הקבוצה הצטאינה סגורה כי יש זה סדרה $\rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$, אבל $0 \notin A$.

אם, למשל, A סגורה $[-1, 1]$, כי דמיון זה $\{1/n\}$ לא מתכנס.

הדבריה: יהיו (X, d) , (Y, ρ) מ"מ. נאמר שפונקציה $f: X \rightarrow Y$ רציפה דרך $x \in X$ אם:

לכל סדרה קיימים $\delta > 0$ כך שאם $d(x, a) < \delta$, אז $\rho(f(x), f(a)) < \epsilon$.

דוגמא: כדורים.

לכל סדרה קיימים $\delta > 0$ כך שאם $x \in B_\delta(a, \rho)$, $x \in X$, אז $f(x) \in B_\epsilon(f(a), \rho)$.

תרגיל: יהיו $(\mathbb{R}^n, d_{max})$, $(\mathbb{R}^n, d_{abs})$. תהי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ההטלה אל הרכיב הראשון:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1$$

הוכיח ש- f רציפה.

פתרון: תהי $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. נראה ש- f רציפה ב- a .

טיוטה: $d_{max}(x, a) < \delta \rightarrow d_{abs}(f(x), f(a)) < \epsilon$

$$d_{max}(x, a) = \max\{|x_1 - a_1|, \dots, |x_n - a_n|\} < \delta = \epsilon$$

$$d_{abs}(f(x), f(a)) = d_{abs}(x_1, a_1) = |x_1 - a_1| < \epsilon$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \epsilon$ ואכן מתקיים

$$d_{max}(x, a) < \delta \rightarrow d_{abs}(f(x), f(a)) < \epsilon$$

משפט:

(1) יהיו X, Y מ"מ. $f: X \rightarrow Y$ רציפה $\iff$ לכל $U \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X .

* (הטלה נכונה גם לסגורות)

(2) יהיו (X, d) , (Y, ρ) מ"מ. $f: X \rightarrow Y$ אזי התנאים הקלים שקולים:

(א) f רציפה.

(ב) אם $x \xrightarrow{d} a$ אז $f(x) \xrightarrow{\rho} f(a)$

תרגיל: יהיו (X, d_1) , (X, d_2) מ"מ. הוכיחו שמתקיים:

$(x, d_1) \rightarrow (x, d_2) \iff$ לכל U פתוחה ב- (X, d_2) , (x, d_1) פתוחה.

פתרון: ע"י U פתוחה ב- $(X, d_2) \iff U$ פתוחה ב- (X, d_1)

נוכיח כי לכל U פתוחה. לכל $x \in U$ פתוחה, נראה כי $d_1'(x) \cap U$ פתוחה ב- (X, d_1) .

אבל $U = d_1'(x)$.

$\iff$ תהי U פתוחה ב- (X, d_2) . $d_1'(x) \cap U$ פתוחה ב- (X, d_1) , כל $x \in d_1'(x) \cap U$ יתכן U פתוחה ב- (X, d_1) .

הדבר: שתי מטריות הן שקולות אם הן מגדירות את אותו אוסף של קבוצות פתוחות.
משפט: (מהתרגיל הקודם) יהיו d, p שתי מטריות על X . נאמר שכן שקולות $\Leftrightarrow$ שתי הפונקציות הבאות רציפות:

$$\begin{cases} Id: (X, p) \rightarrow (X, d) \\ Id: (X, d) \rightarrow (X, p) \end{cases}$$

הדבר מוסבר: יהיו p, d שתי מטריות על X . נאמר שכן שקולות $\Leftrightarrow$ $Id: X \rightarrow X$

$$\{x_n\} \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{p} x$$

הוכחה לשקילות: נקח: $x \xrightarrow{d} x$ ונציג להיאמר $\{x_n\} \xrightarrow{p} x$ כאשר ידוע ש- Id שוקולת אפ רציפות Id .

$$Id: X \rightarrow X \text{ מ-} d \text{ ל-} p \text{ רציפה ולכן: } x \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow Id(x) \xrightarrow{p} Id(x) \Leftrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{p} x$$

תרגיל: תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ממשית. נצייר את הגרף של f

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

הוכיחו כי G_f גרף סגור של $\mathbb{R}^2$ פונקציה רציפה f .

פתרון: נוכיח ש- G_f סגורה. $\exists$ כך שנראה שהוא מכיל את כל נק' הגבול של הסדרת המספרים שלו.

תהי סדרה $\{x_n, y_n\} \in G_f$. לכן $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. ונראה $(x, y) \in G_f$.

p -הולד על הרכיב הראשון. ראוי שהוא רציפה ולכן:

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) &\rightarrow (x, y) \\ p_i(x_n, y_n) &\rightarrow p_i(x, y) \\ x_n &\rightarrow x \end{aligned}$$

ובדאי אכן, p_2 רציפה ולכן: $\boxed{y_n \rightarrow y}$

נקח כי f רציפה ולכן: $f(x_n) \rightarrow f(x)$

$$f(y_n) \rightarrow f(y)$$

הוכחנו דבריה את יחידות הגבול ולכן $f(x) = y$, ולכן $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow G_f$ סגורה.

תרגיל: הוכיחו שמשפט בדור סגור הוא קבוצה סגורה.

פתרון: יהי $M \subseteq B[a, r]$, ועכ"פ $B[a, r]'$ פתוח.

כלומר, לכל $x \in B[a, r]$ קיים סדרה $\{x_n\}$ כזו ש- $x_n \in B[a, r]'$ ו- $x_n \rightarrow x$.

נוכיח כי $x \in B[a, r]$ $\Leftrightarrow d(x, a) \leq r$.

$$d(x, a) \leq r \Leftrightarrow d(x, a) \leq r$$

$$d(x, y) \leq d(x, a) - r$$

$$r \leq d(x, a) - d(x, y)$$

$$d(x, y) + d(y, a)$$

$$r \leq d(y, a) \Leftrightarrow r \leq d(x, y) + d(y, a) \Leftrightarrow r \leq d(y, a)$$

תשובה: תהי $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 1\}$. הוכחנו ש- D פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$.

פתרון: תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \cdot y$. (כמנחה של הלואה רציפות)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in (-\infty, 1]\}$$

$$= f^{-1}(-\infty, 1)$$

$(-\infty, 1)$ פתוחה ו- f רציפה ולכן D פתוחה. נע

תשובה: הוכחנו שפונקציית הזרק השלם אינה רציפה. $f = [\cdot]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{פתרון: } f^{-1}(4) &= \{x \in \mathbb{R} : [x] = 4\} \\ &= [4, 5) \end{aligned}$$

$\{4\}$ סגורה ב- $\mathbb{R}$ אבל התמונה ההפוכה שלה $[4, 5)$ אינה סגורה ב- $\mathbb{R}$ ולכן f אינה רציפה. נע

תשובה: יהי (X, d) מ"מ ויהי $a \in X$.

(א) הוכחנו כי הפונקציה $f_a: X \rightarrow \mathbb{R}$ המשמרת ע"י $f_a(x) = d(x, a)$ רציפה.

(2) הסיקו שלם סגור $r > 0$ הכדור $B[a, r]$ הוא קדוצה סגורה.

פתרון: (א) נוכחי: לפי ההגדרה, נוכחי ש- f_a רציפה ב- a עקובה. יהי $x \in X$. צ"ל: לכל סדר $\varepsilon > 0$ קיים סדר $\delta > 0$ כך שלכל $y \in B[a, \delta]$ אזי: $|f_a(x) - f_a(y)| < \varepsilon$.

$$|f_a(x) - f_a(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq \underbrace{d(x, y)}_{\text{הרצוי}} \leq \varepsilon$$

ונחר זהותאם $\delta = \varepsilon$.

(2) נגלה להראות ש- $B[a, r]$ מתקף כמעטונה הפונה יתת f_a של קדוצה סגורה כלשהי ב- $\mathbb{R}$.

$$B[a, r] = \{x \in X : d(x, a) \leq r\} = \{x \in X : f_a(x) \leq r\} = \{x \in X : f_a(x) \in [0, r]\} = f^{-1}([0, r]) \quad \text{נע}$$

תשובה: יהי M מ"מ. $A \subseteq M$ קדוצה סגורה. הוכחנו שלכל $x \in A$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $B(x, \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$.

פתרון: A סגורה $\leftarrow A^c$ פתוחה. $x \in A^c$ ולכן קיים סדר $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x, \varepsilon) \subseteq A^c$, כלומר, $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.
לכל סדר $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n} < \varepsilon$. נע

תשובה: הוכחנו שקל"ט כל קדוצה סגורה ניתנת להוצאה כחיתוך מני (קן מניה) של קדוצות פתוחות.
פתרון: יהי M מ"מ, A קדוצה סגורה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$O_n = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{1}{n})$$

O_n פתוחה באחד של קדוצות פתוחות.

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \quad \text{נע}$$

הוכחה: (1) $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \iff x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \iff x \in B(a, \frac{1}{n}) \text{ לכל } n \in \mathbb{N} \iff x \in A$. יהי $x \in A$.

(2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \subseteq A$. יהי $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$, ועל כן לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש- $x \in B(a_n, \frac{1}{n})$.
 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \iff x \in \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{1}{n}) \iff \exists a \in A : x \in B(a, \frac{1}{n}) \iff a \in B(x, \frac{1}{n})$

ולכן נקדם ש- $a \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ קטורה לכך שהחיתוך בן! נע

קצת הצטרות:

הצטרות: (M, d) מ"מ.

(1) יהי $A \subseteq M$ קבוצה. נאמר ש- $x \in M$ הוא נק' הצטרות של A אם לכל סדרה מתקיימת $(B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
 [במונחים: לכל סדרה $x_n \in A$ מתקיים $d(x, x_n) < \epsilon$]

(2) (משפט) x הוא נק' הצטרות של A $\iff$ קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ כך ש- $x_n \rightarrow x$.

(3) במשפט הקודם ניתן לדחוס שכל איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים.

הצורה:

(1) נק' הצטרות של A לא חייבת להיות ב- A .

(2) נק' גבול אינה בהכרח נק' הצטרות. $x \rightarrow \{x_n\}$.

(3) כל נק' הצטרות היא נק' גבול.

סימון: נסמן את אולפן כל נק' ההצטרות של A ב- A' .

תוצאה: הוכחה: יהי (M, d) מ"מ. A סגורה $\iff A' \subseteq A$.

פירוק: $\Rightarrow$ ידוע $A' \subseteq A$, וצ"ל A סגורה.

בנוסף: אם $\{x_n\} \subseteq A$ ואם $x_n \rightarrow x$, $x \in A$ נגזר. נניח דהיינו ש- $x \notin A$. לכן יש סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ כך ש- $x_n \rightarrow x$.
 $\Leftarrow$ x נק' הצטרות של A , בלתי $x \in A'$, ולכן $x \in A$ דהיינו $\Leftarrow$ סגורה.

$\Leftarrow$ נתן ש- A סגורה, וצ"ל $A' \subseteq A$.

תהי $x \in A'$. x נק' הצטרות של A ולכן קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ כך ש- $x_n \rightarrow x$. ולכן מכיון ש- A סגורה, נקבל כי $x \in A$.
 מכלל

תוצאה: יהי (M, d) מ"מ. $A \subseteq M$. הוכחה: $A' \subseteq A$.

פירוק: יהי $a \in A'$, וצ"ל $a \in A$.
 נגזר סדרה $\{a_n\} \subseteq A$ כך ש- $a_n \rightarrow a$.
 $(B(a, \epsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$

יהי $b \in B(a, \epsilon) \setminus \{a\}$, ולכן, $b \in A'$.
 נגזר סדרה מתקיימת:

$$c \in (B(b, t) \setminus \{b\}) \cap A \neq \emptyset$$

נבחר $t = \min\{d(a, b), \epsilon - d(a, b)\}$.
 כעת: $c \in B(b, t) \setminus \{b\}$. מתקיים:

$$\begin{aligned} d(c, b) + d(a, b) &< \epsilon \\ d(c, a) &< \epsilon \\ c &\in B(a, \epsilon) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d(c, b) < \epsilon - d(a, b)$$

$$c \neq a \quad \Leftarrow \quad d(c, b) < d(a, b)$$

ומכאן נקבל כי $c \in B(a, \epsilon) \setminus \{a\}$

ומכיון ש- $c \in A$ נקבל $(B(a, \epsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$. מכלל.

קומפקטיות

הצורה: כיסוי פתוח/תת-כיסוי.

יהי M מ"מ. אולפן של קבוצת פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ נקרא "כיסוי פתוח של M " אם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$.

(2) אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ הוא כיסוי של M , ו- $J \subseteq I$ הוא תת-קבוצה של אינדקסים ואם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ הוא קבוצת כיסוי של M . נאמר ש- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ הוא תת-כיסוי.

הצורה: מ"מ M נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של M קיימים תת-סופי.

(הצגה: M קומפקט אם לכל תת אינסופית Y של M קיימת נקודה (הצטרפות)

תוצאה: קטע דיוסטרלי $[0,1]$ הוא קדוזה פתוחה.

פתרון: $\{x\} = \{x \in [0,1] : x \leq y\}$ וכן $\{x\}$ פתוח.

מסקנה: קטע דיוסטרלי $[0,1]$ הוא קדוזה פתוחה.

תוצאה: $[0,1]$ אינו קומפקט. $\Leftarrow$ קרא סופי.

פתרון: $\Leftarrow$ $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$. M קומפקט ולכן קיימת תת-כסוי סופי $\Leftarrow \{x_n\} = M \Leftarrow M$ סופי. $\Rightarrow$ תוצאה.

תוצאה: הרעיון שהקדוזה היא איננה קומפקטית.

$$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$$

פתרון: $[0,1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$. נניח שיש לכסוי זה תת-כסוי סופי.

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^k [\frac{1}{n_i}, 1]$$

נקח n מקסימלי ו- $\frac{1}{n}$ מינימלי. קיבלנו את $[\frac{1}{n}, 1]$ אבל $\frac{1}{n}$ לא שייך לאיחוד, ולכן זה לא כיסוי. *לע*

תוצאה 4

2.5.12

תוצאה: הוכיח שאתן סופית דמיון בין קדוזה הצטרפות.

פתרון: יהי (X,d) ונתן $A \subseteq X$ תת-סופית.

נניח דגלית $a \in A$ של הצטרפות. ראוי שכתוב שזה אינו סתירה שכל אידיה שונים בק $a \rightarrow x_n$.
אבל $a_n = a$, וכן $|A| < \aleph_0$ דסתירה. ולכן a אינו נקודה הצטרפות.

מסקנה: ראיתם דמיון שטעם קומפקט $\Rightarrow$ לכל קדוזה אינסופית יש נקודה הצטרפות.
לכן, שיטה טובה להוכיח שטעם אינו קומפקטית יהיה למצוא קדוזה אינסופית ללא נקודה הצטרפות.

תוצאה: הוכיח כי $\mathbb{Z}$ היא קדוזה סדורה $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

פתרון: דרך ①: נראה ש- $\mathbb{Z}^c$ פתוחה. $\mathbb{Z}^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$ ולכן $\mathbb{Z}^c$ פתוחה באיחוד של קדוזה פתוחות.

דרך ②: [קדוזה סדורה מכלי ארץ של נקודה הצטרפות שלה]

נראה של- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ אין נקודה הצטרפות ולכן סדורה.

שאלה 1: תהי $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. נראה ש- x אינו נקודה הצטרפות. נניח דגלית $x_n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x_n \rightarrow x$.

ע"פ $x_n \rightarrow x$ חייב להתקיים $d(x_n, x) \rightarrow 0$, אבל, אם נסתכן $t = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\}$, נקבל $d(x_n, x) \geq t > 0$. *סוף שאלה 1*

שאלה 2: תהי $x \in \mathbb{Z}$. נראה שהיא אינה נקודה הצטרפות.

נניח דגלית: $x_n \in \mathbb{Z}$ ולכן קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ כך ש- $x_n \rightarrow x$.

וראיתם דגלית: סדרה מתכנסת $\mathbb{Z}$ אדם היא קדוזה לנסות. כלומר $x_n = x$ החל מ- n מסוי, דסתירה. *סוף שאלה 2*

לכן אין ל- $\mathbb{Z}$ נקודה הצטרפות ולכן $\mathbb{Z}$ סדורה $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

שאלה: מדוע $\mathbb{R}$ אינו קומפקט?

כי ממצאו תת-אינסופית ($\mathbb{Z}$) שאין לה נקודה הצטרפות.

הצגה: קוביחו של $\mathbb{Q}$ לא יתקן את מנהי של $\mathbb{R}$ אינה פתורה.
פתיחה: יהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נניח $a \in A$ (ייתכן $A \neq \emptyset$). לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $a \in B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$.
 אבל $N = \{a - \varepsilon, a + \varepsilon\} \subseteq A$ דומה.

הצגה: נאמר ש $\mathbb{Q}$ הוא שלם אם $\mathbb{Q}$ סגור קושי מתכנס (לנקודה) במרחב זה.

הצגה / דוגמה: נראה שהמרחב $(\mathbb{Z}, d_5)$ אינו שלם.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{5^{k(x, y)}} & x \neq y \end{cases}$$

$$k(x, y) = \max\{i \in \mathbb{N}_0 : 5^i \mid x - y\}$$

פתיחה: נמצא סדרת קושי שאינה מתכנסת ב- $\mathbb{Z}$.

$$x_n = 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n$$

טענה 1: $\{x_n\}$ סדרת קושי.

$$k(x_n, x_m) = \max\{i : 5^i \mid (5^m + 5^{m+1} + \dots + 5^{n-1} + 5^n) - (5^m + 5^{m+1} + \dots + 5^{n-1})\} = \max\{i : 5^i \mid 5^n\} = n$$

$$\text{ולכן } d_5(x_n, x_m) = \frac{1}{5^{n+1}}$$

יהי $\varepsilon > 0$: אזי קיים N הנתון $\frac{1}{5^{N+1}} < \varepsilon$ ולכן $d_5(x_n, x_m) = \frac{1}{5^{n+1}} \leq \frac{1}{5^{N+1}} < \varepsilon$ ולכן $\{x_n\}$ סדרת קושי. נכון

כעת יש להראות ש- $\{x_n\}$ אינה מתכנסת ב- $(\mathbb{Z}, d_5)$.

$$x_n \xrightarrow{d_5} x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$$

טענה 2: נניח x אינו $5 \mid x$. אז $5 \nmid x$ ולכן $d_5(x_n, x) = \frac{1}{5} \nrightarrow 0$.

$$x_n \xrightarrow{d_5} x \iff x_n \xrightarrow{d_5} \frac{x-5}{5}$$

הוכחה:

$$d_5(x_n, x) = d_5(x_n, \frac{x-5}{5}) \iff k(x_n, \frac{x-5}{5}) = \max\{i : 5^i \mid x_n - \frac{x-5}{5}\}$$

$$k(x_n, \frac{x-5}{5}) = j \iff j+1 = k(x_n, x) = \max\{i : 5^i \mid x_n - x\}$$

$$\frac{1}{5} d_5(x_n, x) = d_5(x_n, \frac{x-5}{5})$$

$$x_{n-1} = \frac{x_n - 5}{5} \quad \text{ולכן } \frac{1}{5} d_5(x_n, x) = d_5(x_n, \frac{x-5}{5}) = d_5(x_{n-1}, \frac{x-5}{5})$$

$$x_n \rightarrow x \iff x_{n-1} = \frac{x_n - 5}{5} \rightarrow \frac{x-5}{5} \iff x = \frac{x-5}{5} \iff x = -\frac{5}{4} \notin \mathbb{Z} \quad \text{נכון}$$

למטה: יהי (X, d) מרחב קושי. אם $\{x_n\}$ תת-סדרה מתכנסת ל- x אז $\{x_n\}$ מתכנסת ל- x .

הוכחה: $x_n \rightarrow x$ ולכן קיים k כך שכל $k \geq k_0$: $d(x_{k_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\{x_n\}$ היא קושי, ולכן קיים n_1 כך שכל n_1, n_2 מתקיים $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$, ונניח $n_1 \leq n_2$: אז $k_0 \leq n_1$ ונניח $n_1 \leq n_2$ כך שכל n_1, n_2 מתקיים $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$d(x_{n_1}, x) \leq d(x_{n_1}, x_{n_2}) + d(x_{n_2}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

הצגה: קוביחו כי מרחב $\mathbb{Q}$ קומפקט הוא שלם.

פתיחה: הצגה: $\mathbb{Q}$ קומפקט $\iff$ לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת.

יהי (X, d) מרחב קומפקט, נניח $\{x_n\}$ סדרת קושי מתכנסת. תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי.

לפי ההצגה יש לה $\mathbb{Q}$ מתכנסת. אבל לפי הניחה $\mathbb{Q}$ אינו מתכנסת. נכון

הוכחת טופולוגיה

הדבר: מרחב טופולוגי הוא זוג (X, τ) , X קבוצה כלשהי.
 $\tau \subseteq P(X)$ מוגדר להיות אוסף תת קבוצות של X המקיימים:

- ① $X, \emptyset \in \tau$
- ② יהיו $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.
- ③ $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$.

נקרא לקבוצות τ "הקבוצות הפתוחות" (ההדבר דואליט עבר קבוצות סגורות)

הדבר: הטופולוגיה הקוספית co-finite.
 תהי $X \neq \emptyset$:

$$\tau_{\text{co-finite}} = \{U \subseteq X \mid |U^c| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

זמנים אחרות: A סגורה $\Leftrightarrow A^c \in \tau_{\text{co-finite}}$ או $A = X$.

תרשום: הוכיחו ש- $\tau_{\text{co-finite}}$ היא אכן טופולוגיה.
 פתרון: נראה זאת באמצעות הקז' הסגורות.

- ① סגורה $\emptyset$ סגורה.
- ② יהיו $\{U_i\}_{i \in I}$ סגורות וזוג $U_i = X$ לכל $i \in I$ ולכן $U_i^c = \emptyset$ סגורה אם לא, אזי קיים $i_0 \in I$ כך ש: $U_{i_0}^c \neq \emptyset$ ולכן סופית כי $U_{i_0} \subseteq U_{i_0}^c$ ולכן קבוצת $U_{i_0}^c$ סופית ולכן סגורה.
- ③ יהיו U, V סגורות וזוג $U \cap V$ סגורה. אם $U = X$ או $V = X$ אז $U \cap V = X$ סגורה. אחרת, $U^c \neq \emptyset$ ו- $V^c \neq \emptyset$ סופיות ולכן $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ סופית ולכן $U \cap V$ סגורה.

9.5.12

תרשום 5

ההוכחה של פרינסטון שיש אינסוף ראשוניים: (ההוכחה הקלאסית באמצעות קבוצות)
 הרעיון: להגדיר טופולוגיה "מוצגת" על $\mathbb{Z}$
 הדבר: הטופוס הפתוח-סופית על $\mathbb{Z}$:

נאמר שקבוצת $0 \subseteq \mathbb{Z}$ היא פתוחה $\Rightarrow$ לכל $a \in \mathbb{Z}$ קיימת סדרה חשוקית $a, a+d, a+2d, \dots$ ו- $0 \subseteq S$ מהי סדרה חשוקית דו-צדדית? קז' מהצורה:

$$a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} \quad a + d\mathbb{Z} \\ \dots, a-d, a, a+d, \dots$$

זמנים אחרות: קבוצה היא פתוחה $\Leftrightarrow$ היא איחוד של סדרות חשוקיות דו-צדדיות.
 טכניק שטופולוגיה הפתוח-סופית היא אכן טופולוגיה.
 (א) $\emptyset$ פתוחה באופן הריג $\mathbb{Z}$ פתוחה, כי לכל $a \in \mathbb{Z}$, $a \in a + d\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.
 (ב) איחוד כלשהו של פתוחות $\mathbb{Z}$.

$\bigcup_{i \in I} O_i$ פתוח כי: יהי $x \in \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow x \in O_{i_0}$ קיים $i_0 \in I$ כך ש- $x \in O_{i_0} \Rightarrow$ קיימת סדרה חשוקית דו-צדדית $S = x + d\mathbb{Z} \subseteq O_{i_0}$ כך ש- $x \in S \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$
 (ג) חיתוך: זוג אם O_1, O_2 פתוחה ואם $O_2 \cap O_1$ פתוחה. אזי $O_1 \cap O_2$ פתוחה.
 יהי $x \in O_1 \cap O_2 \Rightarrow x \in O_1, x \in O_2 \Rightarrow x \in S_1 = x + d_1\mathbb{Z} \subseteq O_1$ ו- $x \in S_2 = x + d_2\mathbb{Z} \subseteq O_2$ ו- $S_1 \cap S_2 = x + d\mathbb{Z} \subseteq O_1 \cap O_2$ נראה ש- $O_1 \cap O_2 \supseteq S_3 = x + d\mathbb{Z}$
 $S_3 = x + d\mathbb{Z} \subseteq S_1 \subseteq O_1$
 $S_3 \subseteq O_2$ לכן $S_3 \subseteq O_1 \cap O_2$ ולכן $O_1 \cap O_2$ פתוחה.

טענה: הראו שכל סדרה חשוקית דו-צדדית היא סגורה.
 הוכחה: $S = a + d\mathbb{Z}$ פתוחה. לכל $x \in S$ מתקיים $x + d\mathbb{Z} = a + d\mathbb{Z} = S$.
 $a \in x + d\mathbb{Z} \Leftrightarrow a = x - dm \Leftrightarrow x = a + dm$ (המשק דדיט)

ליכר ליהם מודולו d על $\mathbb{Z}$: $a \equiv b \pmod{d}$ הוא יחס שקילות.

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \{[0], \dots, [d-1]\}$$

$$a + d\mathbb{Z} = [a]$$

$$x \in [a] \Rightarrow [x] = [a]$$

$$[x] = x + d\mathbb{Z}$$

$$a + d\mathbb{Z} = [a] \text{ נראה ש-}$$

$$[a]^c = [0] \cup \dots \cup [\hat{a}] \cup \dots \cup [d-1]$$

המשמאל אר המחלקה

$[a]^c$ פתוח באיחוד של קבוצות פתוחות $\Rightarrow [a]$ סגורה. נ"ל

הצבה: (היתכנסות זמנית) נאמר $x \xrightarrow{T} x_n$ אם לכל סדרה $x \in \mathcal{U}$ קיים N כך לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in \mathcal{U}$.
הצבה: טופולוגיית קו-מניה $\tau_{co-\mathcal{M}}$, זהו הקבוצות האחרות בין הקבוצות הקטנות-מניה או $\mathcal{G}$ המרחב.

$$\tau_{co-\mathcal{M}} = \{A \subseteq X \mid |A^c| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$$

נאכין את הסדרות המתכנסות $\tau_{co-\mathcal{M}}$ -2

נניח $a \rightarrow x_n$. נשים לב שכל סדרה $\{x_n\}$ היא זר-מניה $\Leftarrow \{x_n\}$ סגורה.

$$\mathcal{U} = (X \setminus \{x_n\}) \cup \{a\}$$

אז $\mathcal{U}$ פתוח. כי $\mathcal{U}^c$ מוכל ב- $\{x_n\}$ שהוא זר-מניה.

$a \in \mathcal{U}$, ולפי ההצבה היתכנסות קיים N כך לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in \mathcal{U}$ $\Leftarrow x_n = a$ לכל $n \geq N$.
 $\Leftarrow$ אם סדרה מתכנסת אז היא קטנה לסוף. (זו ההסקה נטו).

תהליך: X קטנה כך ש- $|X| > \aleph_0$, ונבדוק $(X, \tau_{co-\mathcal{M}})$

(א) הראו ש- $\tau_{co-\mathcal{M}} \neq \tau_{disc}$

פתרון: כל קבוצה τ_{disc} פתוחה, ולכן מספיק למצוא קבוצה שאינה פתוחה ב- $\tau_{co-\mathcal{M}}$.
 $a \in X$. האם $\{a\}$ פתוח ב- $\tau_{co-\mathcal{M}}$? לא, $\{a\}^c = X \setminus \{a\}$ אינה זר-מניה. נ"ל

(ג) האם $(X, \tau_{co-\mathcal{M}})$ הוא מרחב מטריזציה? (צגור X לא זר-מניה)

פתרון: זהויות (X, d) $\Leftarrow$ ניתן ליצור $\mathcal{M}$ (X, d) שמושבה מהמטריקה.

מחפשים תכונה של מרחבים מטריים, שאינה קיימת במרחב שלנו ואז נדע שהמרחב אינו מטריזציה.

נניח שהמרחב שלנו מטריזציה $(X, \tau_{co-\mathcal{M}})$. כלומר מטריקה d המשרה אותו.

$$x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_{co-\mathcal{M}}} a$$

סדרות קטנות

זה נני שכל סדרות מטריזציה המטריקה היחידה
 זה כל הסדרות המתכנסות קטנות לסוף
 היא המטריקה הדיסקרטית

$d \Leftarrow$ המטריקה הדיסקרטית $\Leftarrow$ המטריקה המושיית מ- d היא τ_{disc} , אבל $\tau_{co-\mathcal{M}} \neq \tau_{disc}$, סתירה. נ"ל

הצבה: מרחב ייזרא מרחב האוסבורג אם לכל $x \in X$ $\exists y \in X$ כך ש- $x \neq y$ קיימת סדרה $x_n \in X$, $x_n \neq x$ כך ש- $U_x \cap U_y = \emptyset$.



חברה: כל מרחב מטרי הוא האוסבורג. לכן לא האוסבורג $\Leftarrow$ לא מטריזציה.

נראה ש- $(X, \tau_{co-\mathcal{M}})$ אינו מרחב האוסבורג. נניח שהיא כן האוסבורג.

$$x \neq y, \exists x \in X, \exists y \in X \text{ כך ש- } U_x \cap U_y = \emptyset \Leftrightarrow X = U_x^c \cup U_y^c$$

$\uparrow$
 פתוח
 וזקן
 מניה

$\uparrow$
 פתוח
 וזקן
 מניה

$\uparrow$
 פתוח
 וזקן
 מניה

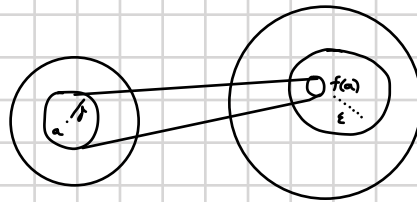
ולכן X זר-מניה. סתירה.

הצבה: האטו גרעיל האחרון שטעט לא נקדע צי הסדרות המעבוסות 12. $T_{co-a} \neq T_{disc}$
 ממ כן נקדע צי המעבוסות הסדרות כי (X, d_1) שקול (X, d_2) $\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_1} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} a$.

משפט: יהיו $\tau \leq \sigma$ שתי טופולוגיות על X אזי $x_n \xrightarrow{\tau} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\sigma} a$.
הצבה: (הישר של סוראפרי) נקדע את הטופולוגיה τ על $\mathbb{R}$. נסמן $\mathbb{R}_\sigma = (\mathbb{R}, \tau)$.
 קבוצה היא פתוחה $\Leftrightarrow$ היא איחוד של קבוצות מהצורה (a, b) .

בתרגיל בית: $\mathbb{R}_1$ גל, כך ש- τ מכילה את הטופולוגיה היחידה על $\mathbb{R}$ (ימשיך את מהטרגיל)
תרגיל: היאו שהסדרה $\{ \frac{1}{n} \}$ אינה מעבוסת בישר של סוראפרי.
פתרון: אם $\{ \frac{1}{n} \}$ מעבוסת בסוראפרי אזי היא מעבוסת ב- $\mathbb{R}$, $\{ \frac{1}{n} \} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$.
 לכן גם בסוראפרי נקבל ש- $\{ \frac{1}{n} \} \xrightarrow{\mathbb{R}_1} 0$.
 ונציג להראות שזה לא ייתכן. מספיק למצוא סביבה של 0 שאיננה אינדיקס של $\{ \frac{1}{n} \}$ לא נמצאים בה.
 נבחר את הסדרה $(0, \frac{1}{n})$, $0 \in (0, \frac{1}{n})$ לא $\frac{1}{n}$ סתירה. גל

רצפי קוקודה: $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$. נרצה להקדיר וציפות נק' $a \in X$. נבחר נעצרת ציור וציפות נק' ממנו

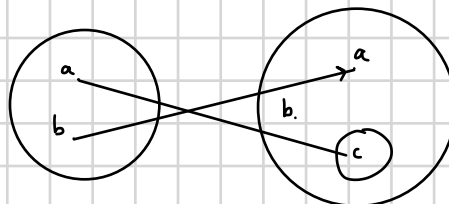


הצבה: נאמר ש- f וציפה ב- a אם $f(x_n) \in U$ קיימת סביבה U של $f(a)$ כך ש- $f(V) \subseteq U$.
תרגיל: $X = \{a, b\}$, $Y = \{a, b, c\}$

$\tau_X = \{ \emptyset, X \}$, $\tau_Y = \{ \emptyset, \{a, b\}, Y \}$

פונקציה $f: X \rightarrow Y$, $f(a) = c$, $f(b) = a$

רציפות ב- a, b



האם f וציפה ב- b ? כן.
 נקדור על כל הסביבות האפשריות של $f(b) = a$ ב- Y . הסביבה היחידה היא Y . צריך למצוא סביבה V של b ב- X כך ש- $f(V) \subseteq Y$. נבחר $V = X$ (זאת הסביבה היחידה של b) ומתקיים $f(X) \subseteq Y$.
 האם f וציפה ב- a ? לא. למה? כי צלף סביבה של $f(a) = c$ והסביבה היחידה של a ב- X היא $V = X$.
 $f(V) \not\subseteq \{c\}$

לכן לא ניתן "להשחיל" סביבה של a מתוך הסביבה של $f(a)$.

הצבה: (רציפות לוגיקלית) נאמר ש $f: X \rightarrow Y$ היא רציפה אם היא רציפה לכל $a \in X$.

משפט: f רציפה $\Leftrightarrow f(V)$ פתוחה לכל V פתוחה. כעלים אחרות: תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.

f רציפה $\Leftrightarrow$ תמונה הפוכה של סגורה היא סגורה.

(רציפות לפי היינע לא עוזקת רעל)

משפט: יהיו X, Y ויהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה. יהיו $f_i: U_i \rightarrow Y$ פונקציות יחידה לכל $i \in I$ ונניח שלכל $x \in X$ אם $x \in U_i$ אז $f_i(x) = f(x)$. אז $f_i(x) = f(x)$ לכל $x \in X$ הפונקציה $F: X \rightarrow Y$ המוגדרת על האיחוד של הפונקציות היא יחידה.

שימו לב: קיים משפט דומה רק עבור סופי של סדרות.

דוגמה: נתבונן בפונקציה $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 2-x & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
פונקציה $f_1(x) = x$

$[0, 1] \cup [1, 2] = [0, 2]$
כיסוי סגור סופי
התחום

$f_2: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
פונקציה $f_2(x) = 2-x$

זכשו, צריך שיהיו יתלכדו על החיתוך:

$$[0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$$

$$f_1(1) = 1 = f_2(1) = 2-1$$

$\Leftrightarrow$ תנאי המשפט מתקיימים ולכן f יחידה.

דוגמה: נתבונן ב- $(\mathbb{R}, T)$ (טופולוגיה). נגדיר פונקציה $f: (\mathbb{R}, T) \rightarrow \mathbb{Z}$ ע"י $f(x) = [x]$. נרצה להראות ש- f יחידה. נרצה למצוא כיסוי פתוח של $(\mathbb{R}, T)$: $\mathbb{Z} \times (-1, 1)$. על כל איבר בכיסוי נגדיר פונקציות

$$f_n: [n, n+1) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f_n(x) = n$$

* התנאי של המשפט מתקיים באופן הדרוש (כי אין חיתוך בין איברי הכיסוי)

נותר להראות ש- f אכן מוגדרת באמצעות f_n . לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n_0 \in \mathbb{Z}$ יחיד: $n_0 \leq x < n_0 + 1$
 $f(x) = f_{n_0}(x) = n_0$

תרגיל: יהי X טופולוגיה. יהיו $f, g: X \rightarrow Y$ פונקציות.

(1) הוכחו כי הקבוצה $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ היא סגורה ב- X .

(2) החליפו את הטופולוגיה על $\mathbb{R}$ ומצאו דוגמה נגדית.

פתרון: (1) $A = \{x \in X : (f-g)(x) = 0\}$

$$= (f-g)^{-1}(\{0\})$$

סגורה
רצפה בהפרס
רצפות

ולכן A סגורה.

(2) נחליף את הטופולוגיה לטופולוגיה הטריבאלית.

$$f, g: (\mathbb{R}, \tau_{\text{triv}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{triv}})$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \\ 1 & \text{else} \end{cases}, \quad g(x) = 0$$

קל לראות ש- $A = [0, 1]$ (אולי ה"ק קטן f, g ממשכנים) וזה לא A אינה סגורה ב- $\mathbb{R}$.

פונקציות פתוחות/סגורות

הדבר הבא: יהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה. נאמר ש- f פתוחה [סגורה] אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה $\leftarrow f(U) \subseteq Y$ פתוחה
[סגורה] $\leftarrow f(U) \subseteq Y$ סגורה $\forall U \subseteq X$

דוגמה: $f: (X, \tau_{\text{triv}}) \rightarrow Y$ "זו", אז f פתוחה. $[f(\emptyset) = \emptyset, f(X) = Y]$

תרגיל: יהי $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון. הוכחו:

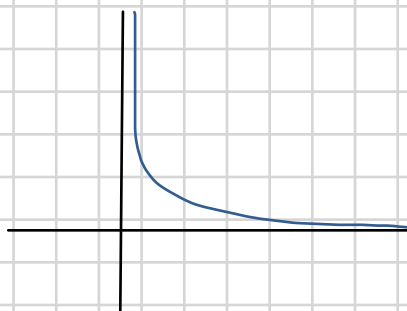
(1) P רצפה. (2) P פתוחה. (3) P אינה סגורה.

פתרון: (1) $\checkmark$ (2) נוכיח ש- P פתוחה. כלומר, יהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה, ונרצה להראות ש- $P(U)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$.

יהי $x \in P(U)$. נרצה להראות שקיים סביבה V של x כזו ש- $V \subseteq P(U)$. יהי $x = P(u)$ עבור $u \in U$. קיים $\epsilon > 0$ כך ש- $u \in (u-\epsilon, u+\epsilon)$.

אבל $u \in \mathbb{R}^2$ פתוחה ולכן קיים סביבה V של u כזו ש- $V \subseteq (u-\epsilon, u+\epsilon) \times \mathbb{R}$. [נרצה להראות: $P(V) \subseteq P(u) + \epsilon$]

נראה את ההכרח $B(x, \epsilon) \subseteq P(U)$. יהי $z \in B(x, \epsilon)$. נרצה להראות $z \in P(U)$.
 $z \in B(x, \epsilon) \iff d(x, z) < \epsilon$. הנק' (y, z) קשורה את הדיוש $d((y, z), (x, y)) = |z - x| < \epsilon$.
 ולכן $U \ni (y, z)$, מכאן $P(y, z) \subseteq P(U) \iff z \in P(U)$.



⑤ $A = \{x \mid x > 0\}$ (ראו שהיא סגורה)
 $P(A) = (0, \infty)$ לא סגורה ב- $\mathbb{R}$.
 ולכן P אינה סגורה.

קשרים

הזכרה: נאמר ש- X לא-קשיר אם קיימות שתי קבוצות U, V פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש- $X = U \cup V$.
 אחרת נאמר ש- X קשיר (Connected).

הזכרות שקולות: ① כגון אם קבוצת סגורות.
 ② X לא קשיר אם קיימת כזו קבוצה סגורה לא טריוויאלית.

המשל: יהי X טל ויה $I = \{0, 1\}$ אם הטופולוגיה הדיסקרטית. עבור $A \subseteq X$ נגדיר $\chi_A: X \rightarrow I$ כי

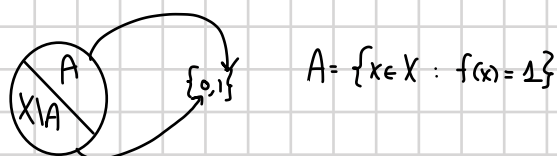
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

קוביחו: χ_A רציפה $\iff A$ סגורה.
 פתרון: $\implies$ נניח ש- A סגורה, ונזן χ_A רציפה.

$$\begin{aligned} \chi_A^{-1}(I) &= X \text{ פתוחה} \\ \chi_A^{-1}(\{0\}) &= X \setminus A \text{ פתוחה (כי סגורה ולכן משלימה)} \\ \chi_A^{-1}(\{1\}) &= A \text{ פתוחה} \\ \chi_A^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \text{ פתוחה} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \chi_A \text{ רציפה ונזן } A \text{ סגורה} & \quad A = \chi_A^{-1}(\{1\}) \text{ פתוחה} \\ A = \chi_A^{-1}(\{1\}) \text{ סגורה} & \quad \chi_A^{-1}(\{1\}) \text{ סגורה} \end{aligned}$$

מסקנה: X לא קשיר $\iff$ קיימת פונקציה רציפה ואל $\chi_A: X \rightarrow I$.



משל: A סגורה, כי אז יבא ש- X לא קשיר (A זוגיות אצל טריוויאלית)
 אנשן אפשר להשתמש בזוגיות של רציפה ולמחשה $\chi_A = f$. לכן מהתכונות נקל ש- A סגורה (לא טריוויאלית) ולכן
 X אינה קשיר.

משפט: יהיו X, Y טל, $f: X \rightarrow Y$ רציפה. אזי אם X קשיר $\implies f(X)$ קשיר.
 תרגיל: נתון $Z = GL_n(\mathbb{R})$ כח' של $M_n(\mathbb{R})$. האם $GL_n(\mathbb{R})$ קשיר?
 פתרון: $\det: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 אם $GL_n(\mathbb{R})$ היה קשיר אז לא $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ היה קשיר (וכן לא נכון).

סגור זמל

הזכרה: יהי X טל ותה $S \subseteq X$ קבוצה.

$$S \text{ סגור} = cl(S) = \text{הקבוצה הסגורה המינימלית שמתכילה את } S$$

$$= \bigcap_{S \subseteq F} F$$

אפיון נוסף: $\text{ped}(A) \Rightarrow$ לכל סביבה של p חותכת את A לא טריוויאלית. במילים אחרות, $U \cap A \neq \emptyset$.

תרגיל: יהי (X, d) מרחב מטרי. $A \subseteq X$ קרויה נחשבת: $\text{ped}(A) \Rightarrow$ קיימת סדרה $\{x_n\} \subset A$ כך ש- $x_n \rightarrow p$.
 פתרון: $\Rightarrow$ נכון אם קיבלנו כללי. $\Leftarrow$ נכון רק נגד.

$\Rightarrow$ $\{x_n\} \subset A$, $x_n \rightarrow p$ וקרויה נחשבת ש- $\text{ped}(A)$. אזי לכל סביבה U של p קיים n כזה ש- $x_n \in U \cap A$.
 אבל $x_n \in A$ ולכן $x_n \in U \cap A$. ולכן חותכת את A לא טריוויאלית ולכן $\text{ped}(A)$.

* נמצא דוגמה נקודתית לחלף השני. קיבלנו כללי (שאינו טריוויאלי).
 נבחר $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, ונגד $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, שכן $0 \in \text{ped}(A)$ (במקום $A \neq \mathbb{R}$).

$$\text{cl}(A) = \mathbb{R}$$

נניח $p \in \mathbb{R} \setminus A$ ונניח $p \in \text{ped}(A)$. (כל הסדרות הן: דוגמה נחשבת למרחב זה יתן הקדמות נוספות)
 נניח

תרגיל 7

23.5.12

הגדרה: (פנים) יהי $A \subseteq X$. $\text{int}(A) = \bigcup_{U \subset A} U$ (האיחוד על כל הפתוחות U ש- $U \subset A$).

[פנים A היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמכילה את A]

אפיון נוסף: $x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow$ קיימת פתוחה U כך ש- $x \in U \subset A$.
 תרגיל: מצאנו סדרה ופנים של הקבוצה הזו $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \neq 0\}$$

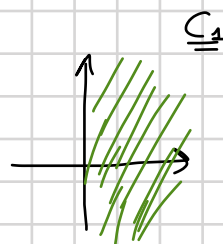
בניסוי: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \neq 0\}$
 טענה: $\text{int}(A) = C$

הוכחה: הכלה דו-כיוונית:

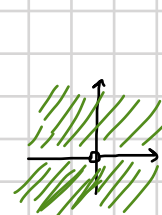
$C \subseteq \text{int}(A)$, $A \supseteq C$ אבל C פתוחה ולכן $C \subseteq \text{int}(A)$.
 חסר טרם להראות שאין C פתוחה.

$$C = \underbrace{\{(x, y) : x > 0, y \neq 0\}}_{C_1} \cap \underbrace{\{(x, y) : y \neq 0\}}_{C_2}$$

נראה למי C_1, C_2 פתוחות [ואז C יהיה פתוחה כחיתוך סופי של קבוצות פתוחות]



$$P_1(C_1) = (0, \infty) \\ C_1 = P_1^{-1}((0, \infty))$$



$$P_2(C_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ C_2 = P_2^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$A \setminus \text{int}(A) \supseteq A \setminus C \Leftrightarrow \text{int}(A) \subseteq C$$

יהי $(x, y) \in A \setminus \text{int}(A)$. שיהי $(x, y) \in A$ אבל $(x, y) \notin C$. כי לכל סביבה של (x, y) יש נקודה שאינה נמצאת ב- A .
 וזאת כי לכל סביבה U של (x, y) קיים כדור פתוח $B((x, y), \epsilon)$ אבל: $(-\epsilon, x) \in B((x, y), \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ מכל $\epsilon > 0$.

סלר

יהי $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \neq 0\}$

טענה 2: $\text{cl}(A) = B$

הוכחה 2: הכלה דו-כיוונית.

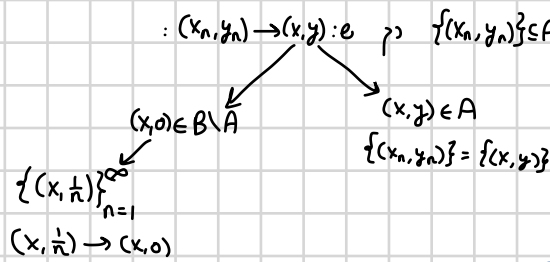
• $cl(A) \subseteq B \leftarrow (A \subseteq B \wedge B \text{ סגורה})$.
 נראה ש- B אכן סגורה.

$$P_1(B) = [0, \infty)$$

$$B = P_1^{-1}([0, \infty))$$

סגורה

ולכן B סגורה.



← הראת ש- $(x, y) \in cl(A)$. נגד סעיף 2 + תרגיל

הצגה: יהי X מני. $A \subseteq X$. נאמר ש- A צבופה ב- X אם $cl(A) = A$.
 אופן נוסף: A צבופה ב- $X \iff$ לכל U פתוחה ולא ריקה מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.
 תרגיל: יהי $(\mathbb{R}, \tau_{\text{top}})$. הוכיחו:

- (א) לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים: A פתוח (א) הפנים של A ריק.
- (ב) קבוצה סופית $B \subseteq \mathbb{R}$ היא סגורה.
- (ג) כל קבוצה אינסופית היא צבופה.

פתרון:

(א) שקול להראות:

$$(A \text{ לא פתוח}) \iff (\text{הפנים של } A \text{ ריק})$$

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, ועיז ש- A לא פתוח. צ"ל $int(A) \neq A$. נניח להפך: $int(A) = A$. אז A לא פתוח. $A^c \subseteq U \iff A^c \subseteq U^c \iff U \subseteq A$. אז U לא פתוח או $U = \emptyset$. שתיים להנחה.
 לכן $int(A) \neq A$. נגד (א)

$$(B^c)^c \leftarrow B^c \leftarrow B \text{ סגורה.}$$

(ב) תהי $F \subseteq \mathbb{R}$ אינסופית. צ"ל $cl(F) = \mathbb{R}$. F אינסופית. הסתבר על F זו הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את F . הקבוצות הסגורות נראות כה הן הסופיות ו- $\mathbb{R}$. ולכן ייתכן הסתירה היחידה שמכילה את F הוא $\mathbb{R}$. $cl(F) = \mathbb{R} \leftarrow F$ צבופה.

תרגיל: יהי (X, d) מני. נתון ש- $|X| \leq \aleph_1$. הוכיחו שהמרחק הוא קשיר.
 פתרון: נניח להפך. יהא קשיר ולכן מתקיים את תכונת ערך הדינמי. קיימת $a \in X$:

$$f_a: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_a(x) = d(a, x)$$

קיימת $a \in X$, $a \neq b$, $f_a(b) = \varepsilon$, $f_a(a) = 0$, ולפי משפט ערך הדינמי f_a חייבת לקבל את כל הערכים בין 0 ל- ε .
 אבל $a \in (0, \varepsilon)$. ולכן f_a אינה יכולה לקבל את כל הערכים בקטע $(0, \varepsilon)$.
 לכן X אינו מקיים את תכונת ערך הדינמי ולכן X אינו קשיר. נגד

הצגה: נניח קשר מסילתי (ק.מ.) אם לכל $x, y \in X$ קיימת פונקציה יחידה $f: [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = x$, $f(1) = y$.
 דמיונה זה: f קראית "מסילה בין x ל- y ".

אצבורת: מרחק קשיר מסילתי הוא קשיר.

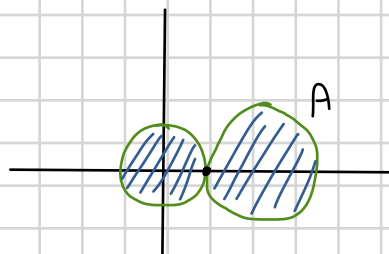
הצגה: תהי C קבוצה קמורה. נאמר ש- C "קמורה" אם לכל $x, y \in C$ ולכל $t \in [0, 1]$ מתקיים $(1-t)x + ty \in C$.
 טענה: יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחק קמורה. תהי $C \subseteq X$ קבוצה קמורה. אז C קשיר מסילתי.

(הוכחה) לכל מרחק קמורה (פתח או סגור) הוא קבוצה קמורה $\iff$ ק.מ. קשיר.

תרגיל: יהי (X, τ) מני. יהי $A \subseteq X$ קשיר. הוכיחו כי $int(A)$ קשיר.

פתרון:

כנים A : הוא איחוד
 של שני כדורים פתוחים
 ולא ריקים ולכן לא קשיר.



טענה: תהי $f = (f_1, \dots, f_n): A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}$. f רציפה $\Leftrightarrow f_i$ רציפה לכל i .

הצבה: הומומורפיזם homeomorphism $f: X \rightarrow Y$ נקראת הומומורפיזם אם:

f רציפה, הפיכה, f^{-1} רציפה שוקל על- f תציפה, הפיכה פתוחה/סגורה.

תוצאה: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהי $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה $G_{r,f} = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$. הוכחנו $G_{r,f} \cong A$.

פתרון: נגדיר $h: A \rightarrow G_{r,f}$ זאמן היא וראת שהיא הומומורפיזם:

$$h(x) = (x, f(x))$$

$$\bar{h}: A \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \bar{h}(x) = h(x)$$

ישו רציפה לפי אינפיניטי 3, כי כל ריבוי של רציף. לכן, לפי משפט מן ההרצאה, h תציפה רציפה כי היא מתקלת מ- h צמצום הטווח.

נגדיר את הפונקציה ההופכית על- h וראת שהיא רציפה.

$$g: G_{r,f} \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}$$

$$g(x, f(x)) = x$$

$$P_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{רציפה.}$$

$$P_1|_{G_{r,f}}: G_{r,f} \rightarrow A$$

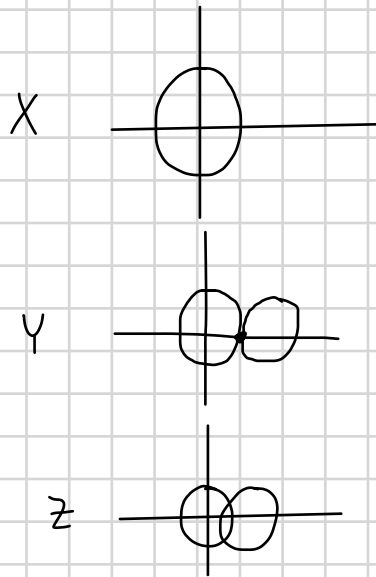
נאמר דיון g ולכן רציפה.

הזינו שאכן h ו- g רבוסות. דדיו דדית שאכן $g \circ h = \text{id}_A$ ולכן h הומומורפיזם ולכן $G_{r,f} \cong A$.

מסקנה: $A \subseteq \mathbb{R}$ תת מרחב $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אז:

⑥ A קטיר $\Leftrightarrow G_{r,f}$ קטיר.

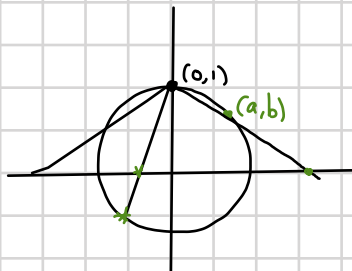
⑦ A ק.מ $\Leftrightarrow G_{r,f}$ ק.מ.



? תוצאה היא נעסין דשאלה האם הם הומומורפיזם אחד לשני.

30/5/12

תרגיל 8



תוצאה: הוכחנו של $\alpha \in S^1$ מתקיים $S^1 - \{\alpha\} \cong \mathbb{R}$.

פתרון: נוכיח $\mathbb{R} \cong S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ (משעיה $S^1 \setminus \{a\} \cong S^1 \setminus \{b\}$)

אזכור: ריבויים למעגל הומומורפיזם: $f: S^1 \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(a, b) = \frac{a}{b-1}$$

דבור שהפונקציה ההופכית היא $g: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \setminus \{(0, 1)\}$

$$g(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)$$

יקל לזכור ש- g רציפה. ולכן f הומומורפיזם. $\leftarrow S^1 \setminus \{(0, 1)\} \cong \mathbb{R}$ מיל.

הצבה: $S^1 \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n$

משפט: יהי X טיפ. יהיו $A, B \subseteq X$ גיט קטירים מסולתת וניה ש- $A \cap B \neq \emptyset$. אז $A \cup B$ קטיר מסולתרת.

הוכחה: לכל a, b צל מסלה בין a ל- b .

מקרה: $a, b \in A$. קיימת $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. רוצים $A \cup B \rightarrow [0, 1]$ ש-

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow A \cup B$$

ואז המסלה הזרושה היא $\gamma: [0, 1] \rightarrow A \cup B$ (מכיוון שפונקציית ההכלה רציפה).

מקרה 2: $a, b \in B$ (דאית אינן) $\gamma: [0, 1] \rightarrow A \cup B$

מקרה 3: $\exists c \in A \cup B \leftarrow A \cap B \neq \emptyset, b \in B \setminus A, a \in A \setminus B$

$\swarrow$
 $c, b \in B$
 $\gamma_2: [0,1] \rightarrow A \cup B$
 $\gamma_2(0) = c, \gamma_2(1) = b$

$\searrow$
 $a, c \in A$
 $\gamma_1: [0,1] \rightarrow A \cup B$
 $\gamma_1(0) = a, \gamma_1(1) = c$
 $\gamma_1(t) = \dots$

המסלול הצמודה היא הסתברות של פתרון:

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ואכן $\gamma: [0,1] \rightarrow A \cup B, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ *לע*

תוצאה: חזיתו של S^n קשורה מסלולית.
 פתרון: $\{b\} \setminus S^1, A = S^1 \setminus \{a\}, B = S^1 \setminus \{a, b\}$ $\Leftarrow A \cap B \neq \emptyset$ לפי משפט: $A \cup B = S^1$ קשר מסלולית *לע*
 תוצאה: חזיתו/הפרטים:

⑥ $(-\infty, 5] \cong [3, \infty)$

② $S^1 \cong S^1$ עקור 1 נח

② האם יש חומאומורפיזם בין שני מרחקים משיעור קוצר:

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\frac{3}{2})^2 + y^2 = 1\}$

פתרון:

② נכון, ראיתם דבריהם אחרת יותר. וכל זאת נמצא חומאלי מפורש:

$f: [3, \infty) \rightarrow (-\infty, 5]$

$f(x) = -x + 8$

רואים ש- f היא רציפה, חזקה ואלו. וההפסטר שלה היא חזקה *לע* ②

② נניח דלילה ש- $S^1 \cong S^1$ אזי קיים חומאלי $f: S^1 \rightarrow S^1$ ולכן לכל $a \in S^1$ $\tilde{f}: S^1 \setminus \{a\} \rightarrow S^1 \setminus \{f(a)\}$ חומאלי

אם $S^1 \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}, S^1 \setminus \{f(a)\} \cong \mathbb{R}$ ומתקיים $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ סתירה. *לע* ②

② נניח דלילה $X \cong Z$, ולכן קיים חומאלי

$f: Z \rightarrow X$

לכן אם הפונקציה הזאת היא חומאליזם:

$\tilde{f}: Z \setminus \{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\} \rightarrow X \setminus \{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\}$

① $\{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\} \subset Z$ קיים $\leftarrow$ נמשך דמיון

שהוכחנו היום: $\{(0,1), (0,-1)\} \subset B$ קיים $\wedge \{(1,0), (-1,0)\} \subset A$ קיים

$A \cap B \neq \emptyset \Leftarrow A \cup B = Z \setminus \{(0,1), (0,-1)\}$ קיים

$X \setminus \{(0,1), (0,-1)\} \cong \mathbb{R}$ קיים $\Leftarrow X \setminus \{(0,1), (0,-1)\} \cong \mathbb{R}$ ולכן קשר.

$\mathbb{R} \setminus \{(0,1), (0,-1)\} \cong \mathbb{R} \setminus \{(0,1), (0,-1)\}$ *לע*

תוצאה: יהי $f: X \rightarrow Y$ רציפה. יהי $A \subset X$ קבוצה.

⑥ $f(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(f(A))$

⑦ נניח ש- f חומאליזם. הוכחנו $f(\text{cl}(A)) = \text{cl}(f(A))$

פתרון:

⑧ $f(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(f(A))$

נוכח תחילה $\text{cl}(A) \subset f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$ *סגורה*

מספיק להראות $A \subset f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$

$f(A) \subset \text{cl}(f(A))$ $\Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$

$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$

$A \subset f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$

$\text{cl}(A) \subset f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$

נפיל f : $f(\text{cl}(A)) \subset f(f^{-1}(\text{cl}(f(A)))) \subset \text{cl}(f(A))$

ולכן $f(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(f(A))$ *לע* ②

② f חומאלי, הוכחנו $f(\text{cl}(A)) = \text{cl}(f(A))$

פתרון: מספיק להראות $\text{cl}(f(A)) \subset f(\text{cl}(A))$

- $A \subset \text{cl}(A)$ קבוצה

- $f(A) \subset f(\text{cl}(A))$ קבוצה

- $\text{cl}(A)$ סגורה $\Leftarrow f(\text{cl}(A))$ סגורה כי f חומאלי.

- $\text{cl}(f(A)) \subset f(\text{cl}(A))$ (מכיוון של סגורה) *לע*

מסקנה: יהי $\gamma: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה ואל. יהי $A \subseteq X$ צבופה. אזי $f(A)$ צבופה γ .
(דפול, הוסיאן מעזר קוצב צבופה לקוצב צבופה)

הוכחה: נל: $cl(f(A)) = \gamma$

הוכחה: $\gamma = f(X) = f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$. $\gamma \subseteq cl(f(A)) \rightarrow \gamma = cl(f(A))$ נ"ל

טענה: יהי $\gamma: X \rightarrow Y$ הוסיאן. אזי f מעזר מרכז קשיות של X למרכז קשיות של Y .

הוכחה: יהי $C \subseteq X$ מרכז קשיות. $f(C) \subseteq Y \leftarrow$ קשר.

$\leftarrow$ נניח דפול $Y \subseteq \mathbb{R}$ קשרה: $D \subseteq f(C) \rightarrow f^{-1}(D) \subseteq C$ קשיתה.

דפול C מרכז קשיות. אכן קוצב קשיתה שמלה אותה נמש. נ"ל

ברא: הוכחו $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (רציפה)

האם הילף של f (G_f) קשר? קשר מסלית? כמה מרכז קשיות?

הוכחה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ יש שני מרכז קשיות: $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$

כא מים קשר וקטע הם נע הוויזים הקשר של $\mathbb{R}$. (לכן גם f יש שני מרכז קשיות דפול מה שקובע נל. הוסיאן)
מרכז ק.מ: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ פתוחה ולכן מרכז קשיות מלכבם עם מרכז קשיות מסלית.

תוצא: יהיה $\gamma: X \rightarrow Y$ פונקציות רציפות.

- X, Y נ"ל

- Y האוסדול

- $A \subseteq X$ צבופה

- $f(a) = g(a)$ לכל $a \in A$.

הוכחה: $\forall x \in X \quad f(x) = g(x)$

פתרון: נניח דפול $x \in X$ שזכור $f(x) \neq g(x)$.

Y האוסדול ולכן קיימת שני קוצב פתוחות γ :

$$\begin{cases} f(x) \in U, g(x) \in V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

מחזר f X : $x \in f^{-1}(U)$, $x \in g^{-1}(V)$ פתוח

נשים $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$

יש קליצב פתוח X

ולכן חופרת את A לא טריואלית

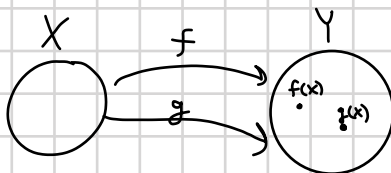
לומר, קיימת $a \in A \cap (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V))$

$a \in f^{-1}(U)$ $a \in g^{-1}(V)$

$f(a) \in U$ $g(a) \in V$

דפול שטק $f(a) = g(a)$

נקל: $f(a) \in U \cap V \neq \emptyset$ וזאת סתירה.

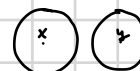
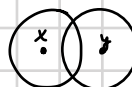


תוצאות פ

הערה: נאמר (X, τ) הוא T_1 אם לכל $x \neq y$ קיימת סביבות U של x ו- V של y כך ש- $x \notin V$, $y \notin U$

T_1 :

T_2 :



תוצא: יהי (X, τ) נ"ל. בהסתמך אל הערה היל, הוכחו שהנשים שקולים:

א) (X, τ) הוא T_1

ב) כל נקודון (X, τ) סדור.

ג) כל קוצב סופית $A \subseteq X$ סדור (X, τ) .

ד) $\tau_{\text{cofinite}} \subseteq \tau$

פתרון: א $\leftarrow$ יהי $x \in X$ ונל $f(x) = cl(f(x)) \subseteq cl(f(A))$ דחה. ולכן נותר להראות ש- $cl(f(x)) \subseteq cl(f(A))$.

נניח דפול $x \in cl(f(A))$. אז, לפי ההערה של הסדור, כל סביבה V של x מקיימת $V \cap f(A) \neq \emptyset$. $x \in V \Leftrightarrow$

לומר, יוצא ש- x שייך לכל סביבה של x דסתירה לכך ש- (X, τ) הוא T_1 . נ"ל א $\leftarrow$

מתקיים: $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ ולכן $A = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$. אז כל מקורבן סדר ולכן A סדירה כאיחוד סופי של קוצרות סדירות. $\square$

$x \neq y, x, y \in X$ ויהי T_x הן (X, τ_x) ו τ_x , $\tau_{\text{cof}} \leq \tau$: $k \leftarrow 2$

John Fein

תלמוד:

② טענה: עבור $A \subseteq X$ יהי A קומפקט. $\Leftrightarrow$ $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ כיסוי סגור X של A אז X סגור תחת כיסוי סגור X של A .

④ משפט: יהי X קומפקט. $A \subseteq X$ סגור, אזי A קומפקט.

④ קריצה קומפקטית שלמה סלורה.

פערין:

טעזע: לכל $A, A \subseteq X$ קומפאקט:

$\Leftarrow A \subseteq U_i \cup (X \setminus U_i) : \text{זוהר} \quad x \in U_i : i \text{ ק"י} \Leftarrow$
 $A \setminus U_i \subseteq X \setminus U_i \quad \text{אם } A \setminus U_i = \emptyset \quad \text{אז } A \subseteq U_i \quad \text{ולפי } U_i \text{ נצטרך להוסיף.}$

$$A \subseteq u_1 \cup \dots \cup u_n \cup u_i$$

זאס צום מיינער אר היזאמא היזאמא, ניקח $A \subseteq X$ נק e - $A \not\subseteq X$, $|A| = \infty$, זא דווארס הא אנה סגורה (לפי הדרת T_{cof})
ואם קומטקית [לפי מה שהוכחנו] $\text{גלגל } (A)$

יהי $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ ונגדיר C כפונקציה: $T = \{\emptyset, \{x\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \dots, X\}$. נגדיר שיש זכרן C כפונקציה.

ה'תשנ"ח

$$X = \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}, \text{ אנג'ר } \text{ סופ' וזיה :}$$
$$T = \{\emptyset, \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}, \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

דדקי דדיר שוילא אכן אפולאזיה. נמנא טי אָמ קומטלעם χ^2 שוה'טיק אים קומטלע.

$\{ A = \mathbb{Z}U\{\infty\} \subseteq U u_i$
 $B = \mathbb{Z}U\{-\infty\}$

קאד13 פֿען $\mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, \dots, n\}$ ווערט דערפֿאר $A \cap B = \mathbb{Z}$ געזאגט

הערות: כל מרחק מציגה הן האסדרה.

דוגמא: למרחק האוסדורף שני מרחקים:

היה $\mathbb{R} \neq \emptyset$, ויהי $X = \mathbb{R} \cup \{0\}$. תהי $\tau = \{0 \leq X : p \in 0 \vee |0| \leq \lambda \leq \infty\}$. האוסדורף.

היכסה: יהיו $X \neq Y$. נפרד למקרים:

- ① $X \neq Y$, $X \neq Y$. כל $\{x\}$, $\{y\}$ פתחים ולכן זה הסגירות שמשתר את העוצמה.
- ② זהב $p=y$, $X \neq p$, $X \neq y$, $X \neq y$, $X \neq y$, $X \neq y$. וזה $p=y \in V=X$, $X \neq y$, $X \neq y$. ולכן X האוסדורף τ .

תצורה:

- ① $f: X \rightarrow Y$ רציפה. X קומפקטי, Y האוסדורף $\Leftarrow f$ סגורה.
- ② $f: X \rightarrow Y$ רציפה והפיכה. X קומפקטי, Y האוסדורף $\Leftarrow f$ הומומורפי.

תהליך: יהי (X, τ) נט קומפקטי והאוסדורף. הוכיחו:

- ① אם $\tau \leq \tau'$ ו- (X, τ') קומפקטי, אז $\tau = \tau'$.
- ② אם $\tau \leq \tau''$ ו- (X, τ'') האוסדורף, אז $\tau = \tau''$.

פתרון:

① נשקוף $\tau: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ Id .

- Id תמיד הפיכה.
- לפי תצורה (ב) - Id הומומורפי $\Leftarrow \tau = \tau'$.

② דאית אופן, יהי $\text{Id}: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau'')$ τ .

תהליך: נראה כי $[0, \infty]$ הוא תת מרחב לא קומפקטי של $(\mathbb{R}, \tau_{\text{strong}})$, ממית שהוא בן קומפקטי $\mathbb{R}$.

פתרון:

$(\mathbb{R}, \tau)$ $(\mathbb{R}, \tau)$

נניח ששליפה τ קומפקטי. ראיתם $\tau \leq \tau'$. אז לפי התהליך הקודם $\tau = \tau'$. אבל נראה ש- $\tau \neq \tau'$:

- $\{0\}$ לא פתוח τ - (τ, τ) .
- $\{0\}$ פתוח τ' - (τ, τ) כי $\{0\} = \tau \cap \tau = \tau$.

13.6.12

דפיס'ם

תרגיל 10

הצבה: יהי X נט משפחה של קבוצות פתוחות X . נקראת "קבוצה של X " אם כל קבוצה פתוחה X היא איחוד של קבוצות פתוחות M .

הצבה שקולה: β קבוצה של X היא קבוצה של X אם:

- ① β אוסף של קבוצות פתוחות.
- ② לכל קבוצה פתוחה U ולכל $x \in U$ קיימת $V \in \beta$ כך ש- $x \in V \subseteq U$.

תהליך: תהי X קבוצה אינסופית. נגדיר משפחה של קבוצות: $\beta = \{V \subseteq X : 1000 \leq |V| \leq \infty\}$

הוכיחו ש- β קבוצה של X היא קבוצה של X .

פתרון:

- ① דבר שכל קבוצה β פתוחה (X, τ_{β}) שכן המשפחה β סגורה.
- ② תהי $G \in \tau_{\beta}$ ויהי $x \in G$ וזריק למצא $V \in \beta$: $x \in V \subseteq G$.

$G \in \tau_{\beta} \Leftarrow |G| \leq \infty \Leftarrow G \in \tau_{\beta}$ אינסופית. לכן קיימת G פתוחה β כך ש- $x \in G \subseteq U$.

נגדיר $V = G \setminus \{x_1, \dots, x_{1000}\}$ $V \in \beta \Leftarrow V^c = G^c \cup \{x_1, \dots, x_{1000}\} \subseteq G$ והוכחנו בדיוק τ_{β} .

הצבה: ראיתם דבריהם של $f: X \rightarrow Y$ פונקציה, ואם B קבוצה β אז $f(B)$ מתקיים $f(V)$ פתוח X .

תצורה: $\alpha \in \text{cl}(A) \Leftarrow \alpha$ לכל U סגורה α , $U \cap A \neq \emptyset$.

טענה: טכני $\alpha \in \text{cl}(A) \Leftarrow \alpha$ לכל סגורה B כזו ש- $U \cap B \neq \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ טריוויאלי.

$\Rightarrow$ תהי V סגורה α וזו U סגורה α כזו ש- $U \cap A \neq \emptyset$. מכיון ש- B סגורה, קיימת U סגורה α כזו ש- $U \cap B \neq \emptyset$.

אז $U \cap A \neq \emptyset$ לפי הנתון ולכן $U \cap A \neq \emptyset$ τ_{β} .

מכפלה מכפלה

יהיו X, Y מרחב טופולוגי. נגדיר מכפלה $X \times Y$ על ידי: נגדיר קואורדינטות זמניות:

$$B = \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \tau_X, O_2 \in \tau_Y\}$$

B הוא הקבוצה הטופולוגית המכפלה על $X \times Y$. זוהי הטופולוגיה החלשה ביותר שבה ההטופולוגיות רציפות.

למטה: יהי B_1 קבוצת זמניות (X, τ) . יהי $B_2 \in B$. אז B_2 קבוצת זמניות (X, τ) $\Leftrightarrow$ לכל $u \in B_2$ ולכל $x \in u$ קיימת $V \in B_1$ כן $x \in V \subseteq u$.
הוכחה: תרגיל.

למעלה: (קבוצת זמניות) יהיו $\{O_i\}_{i=1}^n$ ויהיו $\{B_i\}_{i=1}^n$ קבוצות זמניות. אז אוסף כל הקבוצות מהצורה:

$$\{G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n : G_i \in B_i \forall 1 \leq i \leq n\}$$

טופולוגית המכפלה על $X = X_1 \times \dots \times X_n$

הוכחה: יהי $O_1 \in \tau_1, \dots, O_n \in \tau_n$, $u = O_1 \times \dots \times O_n$ ויהי $x = (x_1, \dots, x_n) \in u$. לכל i , $x_i \in O_i$. B_i קבוצת זמניות X_i כן $x_i \in G_i \subseteq O_i$.

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1 \times \dots \times G_n \subseteq O_1 \times \dots \times O_n = u$$

וסיימנו! למעלה

למעלה: יהיו $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ מרחבי זמניות. אז $X = \prod_{i=1}^n X_i$ מרחבי זמניות (זו הטופולוגיה המכפלה).
הוכחה: (X, τ) מרחבי זמניות ולכן לכל $u \in \tau$ קיימת מכפלה $u = \prod_{i=1}^n u_i$ וזו המכפלה τ .
 נגדיר מכפלה על X $\forall x, y \in X$:

$$d_{\max}(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i)\}$$

זכשו! יש לנו את $(X, \tau_{\max})$ כאשר $\tau_{\max}$ זו הטופולוגיה המושגת מ- $d_{\max}$. מכפלה על $\tau = \tau_{\max}$.

למעלה: ההטופולוגיה $(X, d_{\max}) \rightarrow (X, \tau_{\max})$ קבוצות זמניות.

הוכחה: נוכיח רציפות דרך X : $\forall x \in X$: $\forall \epsilon > 0$: $\exists \delta > 0$ כך $d_{\max}(x, y) < \delta \Rightarrow d_{\max}(x, y) < \epsilon$.
 נבחר $\delta = \epsilon$ ואכן:

למעלה

$$d_{\max}(x, y) < \delta = \epsilon \Rightarrow d_{\max}(x, y) < \epsilon \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : d_i(x_i, y_i) < \epsilon \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : y_i \in B_{\delta_i}(x_i, \epsilon)$$

מסקנה: $\tau_{\max} \subseteq \tau$. כל ההטופולוגיות τ_i רציפות ולכן $\tau_{\max} \subseteq \tau$, כי טופולוגיה המכפלה זו הטופולוגיה המינימלית זה ההטופולוגיה רציפות.

$$B_{\max}(x, \epsilon) = B_{\delta_1}(x_1, \epsilon) \times \dots \times B_{\delta_n}(x_n, \epsilon)$$

הוכחה:

$$y \in B_{\max}(x, \epsilon) \Leftrightarrow d_{\max}(x, y) < \epsilon \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : d_i(x_i, y_i) < \epsilon \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : y_i \in B_{\delta_i}(x_i, \epsilon)$$

$$\Leftrightarrow y = (y_1, \dots, y_n) \in B_{\delta_1}(x_1, \epsilon) \times \dots \times B_{\delta_n}(x_n, \epsilon)$$

ולכן $\tau_{\max} \subseteq \tau$ למעלה

ולכן $\tau = \tau_{\max}$ ולכן X מרחבי זמניות.

מכפלה אינסופית

יהי I קבוצה של אינדקסים ויהיו $\{X_i\}_{i \in I}$ אוסף של קבוצות זמניות. נגדיר את המכפלה הקרטזית שלהן באופן הבא:

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : f(i) \in X_i\}$$

ההטופולוגיה: $p_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$

$$p_j(f) = f(j)$$

טופולוגיית המכפלה: יהיו $\{O_i\}_{i \in I}$ מרחבי זמניות. אז $\prod_{i \in I} O_i$ קבוצת זמניות $\prod_{i \in I} X_i$ אשר זמנית. הוא

$$B = \left\{ \prod_{i \in I} A_i : A_i \in \tau_i : \begin{array}{l} \text{שלב 1: } \exists \text{ סדר } F \subseteq I \text{ כך} \\ \text{שלב 2: } A_i = X_i \text{ לכל } i \notin F \end{array} \right\}$$

ראיתם זכיתם שטופולוגיה הזו הטופולוגיה החלשה ביותר שבה הטופולוגיות רציפות. זו הטופולוגיה החלשה ביותר שבה הטופולוגיות רציפות.

למעלה: יהיו (X_i, τ_i) מרחבי זמניות. אז $\tau = \prod_{i \in I} \tau_i$ טופולוגיה על $\prod_{i \in I} X_i$. ע"פ טיפוס $\tau = \prod_{i \in I} \tau_i$ רציפות.

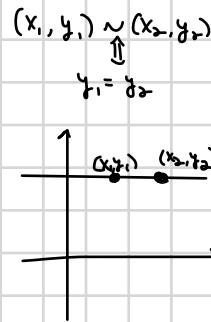
הוכחה: על פ' תרגיל שטופולוגיה רציפות. מספיק להראות שכל קבוצת זמניות של τ שייכת ל- τ .

יהי A קבוצת זמניות של τ . $A_i \in \tau_i$, $A = \prod_{i \in I} A_i$ וקיימת קבוצת זמניות τ של אינדקסים F כך $A_i = X_i$ לכל $i \notin F$.

$A_i \in \tau_i \Leftrightarrow p_i^{-1}(A_i) \in \tau$. $p_i^{-1}(A_i) = \prod_{j \in I} A_j$ כן $p_i^{-1}(A_i) = \prod_{j \in I} A_j$ ו- $A = \bigcap_{i \in F} p_i^{-1}(A_i)$ ופירושה כחיתוך של פחות מ- $\aleph_1$ קבוצות זמניות.

כח, נגזר $z: X \rightarrow Y$. P על X . ניקח X את X כפונקציה המה. (כלומר, האינפוזיציה החזקה ביותר זה P רציפה)

מבטל: נגזיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$:



היכחי ש- $\mathbb{R}^2/\sim \cong \mathbb{R}$.

טענה שמשפט: X, Y מני, $\sim$ יחס שקילות על X , $f: X \rightarrow Y$ מנגזרת יחס השקילות. אז:

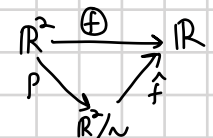
א. $\hat{f}$ רציפה $\iff f$ רציפה.

ב. $\hat{f}$ מנה $\iff f = \hat{f} \circ p$ מנה.

פתרון: עלינו לננות פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ שמנגזרת יחס השקילות.

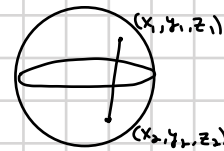
$$f(x, y) = y$$

מה ידוע על f ? f היא הטלה על ציר ה- y , ולכן f מנה $\iff \hat{f} = f$ מנה. $\hat{f} \leq f$ מנה ולכן $\hat{f} = f$ מנה + מנה $\iff$ הומומורפיזם.



הראינו $\hat{f}$ מנגזרת מנה, מספיק להראות ש- f מנה כדי לקבל ש- f הומומורפיזם.

מבטל: $X = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$



נאמר ש- $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

מבטל: $X/\sim$ הומומורפיזם.

פתרון: נראה ש- $X/\sim \cong \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$ נגזיר $f(x, y, z) = (x, y)$.

f רציפה: נסתכל על $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, כדי להראות ש- f רציפה מספיק להראות ש- f_1, f_2 רציפות אבל הן רציפות הלוך ממש מ- $\mathbb{R}^3$ ולכן רציפות. נמצא $\mathbb{R}^3 \supseteq S^2$ ונקבל ש- f רציף רציפה.

$$f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(S^2) = D$$

ולכן $f: S^2 \rightarrow D$ רציפה כזו, $f: S^2 \rightarrow D$ רציפה + f קומפקט. ו- Y האוסמרה $\iff f$ סגורה. ולכן f מנה. כי $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$.

ולכן $\hat{f}$ מנגזרת היטב + $\hat{f}$ מנה ולכן f הומומורפיזם.

זה הכל. בזכותה לכולם!! 😊

מבחן 2012 מעד מוחב, טאה 4

תה $\mathbb{R} \neq P$, $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, ותה $\tau = \{0 \leq x \mid x \in \mathbb{R} \cup \{p\}\}$, ותה τ טופולוגיה על X .
 תיכונ:

- ① (X, τ) טופולוגיה.
 ② קיימת $Y \subseteq X$ כך ש- Y היא טופולוגיה.

פתרון:
 ② אולי $Y = \mathbb{R}$?

האם $\mathbb{R}$ סדורה? כי אם $\mathbb{R}$ לא סדורה אז $\text{cl}(\mathbb{R}) = X$.
 קפ - קיומה לא פתורה! $\mathbb{R} \subseteq \text{cl}(\mathbb{R}) = X \iff \mathbb{R} \subseteq \text{cl}(\mathbb{R}) = X$ בפיסה X .
 נותר להראות ש- $\mathbb{R} \subseteq X$ טופולוגיה.

$\mathbb{R}$ היא דיסקרטי, שכן אם $0 \leq x \in \mathbb{R}$ אז $0 \notin x$ ולכן 0 פתורה (למשל - כל תת קבוצה של $\mathbb{R}$ פתורה)
 ולכן $\mathbb{R}$ דיסקרטי ולכן טופולוגיה.

מבחן 2011 א, טאה 5

נסמן $\mathbb{R}_1$ - מס' ממשיים עם הטופולוגיה הזו:

קבוצה היא פתורה אם היא איחוד של קטעים
 מהצורה (a, b) (כלומר הישר של סדרגה)

① מצא סדור, פנים ושפה של

$$A = \underbrace{[2, 5]}_B \cup \underbrace{\{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}}_C$$

② מצא מרכיבי קשיות של $\mathbb{R}_1$ - $\alpha = 5$ - 2 .

פתרון: $\tau_{1,1} \subseteq \tau$

$$\begin{aligned} A = B \cup C \quad \text{cl}(A) &= \text{cl}(B) \cup \text{cl}(C) \\ &= \text{cl}([2, 5]) \cup \text{cl}\left(\left\{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) \\ &= [2, 5] \cup \end{aligned}$$

כעת, קבוצת $\{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ סדורה - $\tau_{1,1}$ ולכן סדורה τ .
 $\text{cl}(\{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ שכן $\{f\} \cap [2, 5] = \emptyset$
 $\text{cl}(f - \frac{2}{n}) = f - \frac{2}{n}$

ולכן סה"כ A סדורה ולכן $\text{cl}(A) = A$.

פנים: $A = [2, 5] \cup \{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. נחש: $\text{int}(A) = [2, 5]$. נניח $x \in \text{int}(A)$ שייך D פתורה.
 $[2, 5] \subseteq D \subseteq [2, 5] \cup \{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

① אם $5 \in D$ אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש- $[5, 5+\epsilon] \subseteq D$. ולכן $5 + \frac{\epsilon}{2} \in D$, אבל זה לא אפשרי, סתירה.

② אם קיים $f - \frac{2}{n} \in D$ עבור $n \in \mathbb{N}$. האם זה ייתכן?

לא. למה? כי אם $f - \frac{2}{n} \in D$ אז D פתורה, כי אם קיים $\epsilon > 0$ אי-רציונלי כך ש- $(f - \frac{2}{n} - \epsilon, f - \frac{2}{n} + \epsilon) \subseteq D$.
 אבל $f - \frac{2}{n} \in D$ ולכן זו סתירה (כי $D \subseteq A$).

לכן סה"כ $\text{int}(A) = [2, 5]$

שפה: $\partial(A) = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A)$

$$= ([2, 5] \cup \{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) \setminus [2, 5] = \{f - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

② מרכיב קשיות של $\alpha = 5$.

C_α : לכל $F \subseteq \mathbb{R}_1$, אם $|F| \leq 1$ אז F היא קשר.

נניח שיש $\alpha < b$. הקבוצות $(-\infty, b)$, $[b, \infty)$ פתוחות ולכן

$$((-\infty, b) \cap F) \cup ([b, \infty) \cap F) = F$$

ולכן יש פירוק לא C ויחידאלי ולכן F לא קשר. מכאן, מרכיב קשיות של $\alpha = 5$ הוא S .

יהי X מרחב T_3 . והוא לכל $x \neq y$ יש קבוצת פתחים U, V כך ש- $x \in U, y \in V$, $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
פתרון:

למה: במרחב X שזה T_3 מתקיים: יהי $x \in X$ ו- W פתחה בק- x . אזי קיימת U פתחה בק- x ש- $\bar{U} \subseteq W$.
הוכחה: $x \in W$ פתחה, $x \notin W^c$ סגורה ולכן לכל T_3 קיימות A_1, A_2 פתחות בק- x :

$$\begin{cases} x \in A_1, W^c \subseteq A_2 \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset \end{cases}$$

נניח. $x \in A_1, \text{cl}(A_1) \subseteq W \Leftrightarrow A_1 \subseteq \text{cl}(A_1) \subseteq A_2 \subseteq W \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2^c \subseteq V$ ונתקיים $x \in A_1$.
 T_3 הוא דפלט האיסודי (T_2) לכל זוג $x \neq y$ קיימות W_1, W_2 :

$$\begin{cases} x \in W_1, y \in W_2 \\ W_1 \cap W_2 = \emptyset \end{cases}$$

אז לכל x קיימת פתחה U, V ש- $x \in U, y \in V$ ו- $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

$$\begin{aligned} x \in U, \text{cl}(U) \subseteq W_1 \\ y \in V, \text{cl}(V) \subseteq W_2 \end{aligned}$$

ולכן ההפרדה הצדקה:

$$\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset \quad U, V$$