

טור טיילור

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \text{ } c \text{ between } x \text{ and } x_0$$

הפיכת מטריצה 2x2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

שגיאות

שגיאה מתפשטת

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$$

$$C = \left| \frac{\delta y}{\delta x} \right| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{y' \cdot x}{y} \right|$$

מספר מצב

אינטרפולציה

פולינום האינטרפולציה של לגרנז'

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i, \quad l_i = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

פולינום האינטרפולציה של ניוטון

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})$$

כאשר

$$a_{k+1} = f[x_{k+1}, \dots, x_0] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_1] - f[x_k, \dots, x_0]}{x_{k+1} - x_0}$$

שגיאת האינטרפולציה $R_n(x)$ (לצורת ניוטון ולצורת לגרנז')

יש n+1 נקודות אינטרפולציה.

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n), \quad x_0 \leq c \leq x_n$$

נקודות צ'בישב

פולינום צ'בישב:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

נוסחה רקורסיבית לפולינום צ'בישב:

$$\left. \begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 0 \\ T_1(x) &= x \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned} \right|$$

מציאת שורשי פולינום צ'בישב:

N - הוא סדר פולינום צ'בישב שאת שורשיו מחפשים.

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

מעבר לקטע [a,b]:

t מייצג את נקודות צ'בישב בקטע [-1,1]: x מייצג את נקודות צ'בישב בקטע [a,b]:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

גזירה נומרית

גזירה נומרית ע"י אינטרפולציה:

$$f'(x) = P_n'(x) + R_n'(x)$$

$$\varphi_{n+1}(x) = (x-x_0) \cdots (x-x_n), \quad f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot \varphi_{n+1}(x) \right]$$

$$R_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!} \underbrace{\varphi_{n+1}'(x)}_{O(h^n)} + \frac{f^{(n+2)}(c_2)}{(n+2)!} \underbrace{\varphi_{n+1}(x)}_{O(h^{n+1})}$$

ציבות חישובית בגזירה נומרית

השגיאה הכללית מורכבת משגיאת קיטוע ושגיאת העיגול:

$$Err(f, h) = Err_{\text{round-off}}(f, h) + Err_{\text{cut-off}}(f, h)$$

ריבועים מינימאליים

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_0, \phi_n \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_1, \phi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_0 \rangle & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_0, f \rangle \\ \langle \phi_1, f \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_n, f \rangle \end{pmatrix},$$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot w(x) dx$$

אינטגרציה נומרית

שיטות אינטגרציה

1. שיטת הטרפז

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + f_n); \quad f_0 = f(a), f_n = f(b), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה:

$$|E_{\text{total}}| \leq \frac{|f''(c)| \cdot h^2 \cdot (b-a)}{12}$$

2. שיטת סימפסון

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + f_{2n});$$

$$f_0 = f(a), f_n = f(b), h = \frac{b-a}{2n}$$

שגיאה:

$$|E_{\text{total}}| \leq \frac{|f^{(4)}(c)| \cdot h^4 \cdot (b-a)}{180}$$

דרגת דיוק (אלגברית) של נוסחאות קירוב

דרגת דיוק אלגברית היא דרגת הפולינום הגדולה ביותר עבורה השיטה מדויקת.

אינטגרציה של גאוס

משפחות פולינומים אורתוגונליים:

שם	פונקציית משקל	תחום הגדרה	פולינומי המשפחה
צ'בישב	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	$T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_2(x) = 2x^2 - 1$ $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
לג'נדר	1	$[-1, 1]$	$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
לאגר	e^{-x}	$[0, \infty]$	$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = 1 - x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$ $P_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$ $P_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$

שגיאה כללית באינטגרציית גאוס

$$\int_a^b f(x) w(x) dx - \int_a^b P_n(x) w(x) dx = \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 w(x) dx$$

שגיאה באינטגרציית גאוס-לג'נדר:

$$Err = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b$$

שיטות פתרון משוואות לא ליניאריות

שיטת החצייה:

שגיאת השיטה:

$$n \text{ באיטרציה } \alpha - c_n = | \alpha - c_n | \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

סדר ההתכנסות: $p = 1$.

שיטת המיתר:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} : \text{ סדר ההתכנסות של שיטה זו הוא } p$$

שיטת ניוטון-רפסון:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

סדר ההתכנסות עבור שורש פשוט $p = 2$.

שיטת ניוטון-רפסון עבור שורש מרובה:

$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ כאשר } x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \quad (2)$$

שיטת Fixed Point

תנאי מספיק להתכנסות:

נניח כי $G(x), G'(x)$ פונקציות רציפות ב- $[a, b]$; $K -$ קבוע חיובי; $x_0 \in (a, b)$;

$G(x) \in [a, b]$ עבור כל $x \in [a, b]$.

א. אם $|G'(x)| \leq K < 1$ לכל $x \in [a, b]$, אזי האיטרציה $x_{n+1} = G(x_n)$

תתכנס לנקודת שבת יחידה $\alpha \in [a, b]$.

ב. אם $|G'(x)| > 1$ לכל $x \in [a, b]$, אזי האיטרציה $x_{n+1} = G(x_n)$ לא תתכנס ל-

α .

הערכת שגיאה:

$$|\alpha - x_n| \leq K^n |\alpha - x_0|, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} \cdot |x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \dots$$

קבוע/ סדר התכנסות

הגדרת קבוע / סדר ההתכנסות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n^p} \right| = K$$

משפט: תהי $x_{n+1} = G(x_n)$ איטרציה מתכנסת כך ש- $\alpha = G(\alpha)$ ו- $G(x)$

גזירה ברציפות לפחות מ פעמים בסביבת השורש α

$$G^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (1) \text{ ידוע}$$

$$G^{(m)}(\alpha) = \text{const} \neq 0 \quad (2)$$

אזי מ הוא סדר התכנסות ו- $\frac{1}{m!} G^{(m)}(\alpha)$ הוא קבוע התכנסות.

נורמות

נורמות של וקטור $x \in \mathbb{R}^n$ תכונות של נורמות:

$$\begin{aligned} x = (0, 0, \dots, 0) &\Leftrightarrow \|x\| = 0 \\ \|x\|_p &= \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p} \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\ \|Ax\| &= \|A\| \cdot \|x\|, \quad A - \text{matrix} \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

נורמות של מטריצה:

$$\|A\|_i = \max \|A \cdot x\|_i, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}, \quad \|A\|_{fro} = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

$$\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Condition number:

$$\text{cond}(A) = \|A\|_i \cdot \|A^{-1}\|_i, \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

פתרון נומרי של מערכת משוואות ליניאריות $Ax = b$

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, \quad \|A\|_i \geq \rho(A) \quad \text{רדיוס ספקטראלי}$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \quad \text{שיטת יעקובי}$$

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} U x^{(k)} + (D+L)^{-1} b \quad \text{שיטת גאוס-זיידל}$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1} L x^{(k+1)} - D^{-1} U x_k + D^{-1} b \quad \text{או לחילופין}$$

פירוק QR

בניית מטריצת Householder – שלב k

$$1. \text{ Set } w_1 = w_2 = \dots = w_{k-1} = 0$$

$$2. g = \sqrt{x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2}, \quad \alpha = \text{sign}(x_k) \cdot g$$

$$3. s = \sqrt{2g(g + |x_k|)}$$

$$4. w_k = (x_k + \alpha) / s;$$

$$w_i = x_i / s, \quad i = k+1, \dots, n$$

$$5. H_k = I - 2ww^T$$

הפירוק:

$$R = H_m \cdot H_{m-1} \cdot \dots \cdot H_1 \cdot A$$

$$Q = H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_m$$

פתרון מערכת משוואות לא ליניאריות

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = \overrightarrow{x_n} - \left(J(\overrightarrow{x_n}) \right)^{-1} \cdot \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x_n})$$

$$J(\overrightarrow{x_n}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{x_n}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overrightarrow{x_n}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\overrightarrow{x_n}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overrightarrow{x_n}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overrightarrow{x_n}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\overrightarrow{x_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{x_n}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overrightarrow{x_n}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\overrightarrow{x_n}) \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$