

פתרון תרגיל בית 8 – טופולוגיה

שאלה 1

נתבונן בשלושה תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

ראינו בכיתה ש- Z אינו הומיאומורפי ל- X . האם Y הומיאומורפי ל- X או ל- Z ?
הוכיחו את תשובתכם!

פתרון

עשינו הוכחות מלאות כאלה בכיתה ולכן כאן נרשום רק את הרעיון. הרעיון הוא שב- X וב- Z , הוצאת כל נקודה לא פוגעת בקשירותו של המרחב. עם זאת ב- Y , ישנה נקודה אחת שהוצאתה פוגעת בקשירות (נקודת ההשקה).

שאלה 2

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

פתרון

אם X סופי אז הטופולוגיה הקו-סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית כי כל תת-קבוצה היא סופית ולכן סגורה. (מה שאומר שגם כל תת-קבוצה פתוחה). טופולוגיה זו קשירה אם ורק אם ב- X יש רק איבר אחד (אם יש יותר מאיבר אחד אז $X = \{x\} \cup (X - \{x\})$ ולכן X לא קשיר).

נראה שאם X אינסופי המרחב קשיר. אחרת, קיימת ב- X תת-קבוצה סגורה לא טריוויאלית A .

אם A סגורה ושונה מ- X הרי ש- A סופית. אם A פתוחה ולא ריקה הרי ש- A^c סופית. מכאן $X = A \cup A^c$ סופי וזו סתירה.

מסקנה: x קשיר אם הוא אינסופי או בעל איבר אחד ולא קשיר אם הוא סופי בעל יותר מאיבר אחד.

שאלה 3

תזכורת – הישר של סורגנפריי. נסמן ב- $\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הבאה T :

$O \in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a, b)$ (כולל איחוד ריק).

א. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם A הוא תת-מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

ב. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

פתרון

א. יהי A תת-מרחב בעל יותר מנקודה אחת ונכיח שהוא אינו קשיר. קיימות

ב- A לפחות שתי נקודות שנסמן $x, y \in A$. בה"כ נניח $x < y$. נגדיר

$U = (-\infty, y) \cap A$, $V = [y, \infty) \cap A$. ברור ש- U, V זרות ולא ריקות

(שכן $x \in U, y \in V$). נותר להראות שהן פתוחות בתת המרחב A .

מספיק להראות ש- $(-\infty, y), [y, \infty)$ פתוחות ב- $\mathbb{R}_\ell$. מכיוון שראינו

שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה האוקלידית

(הסטנדרטית) על $\mathbb{R}$, ידוע ש- $(-\infty, y)$ פתוחה. כעת, את $[y, \infty)$ ניתן

להציג כ: $[y, \infty) = \bigcup_{y < c} [y, c)$ ולכן היא פתוחה כאיחוד פתוחות.

מכאן, מכיוון ש- $U \cup V = A$ נקבל ש- A לא קשיר.

ב. קודם כל, הוכחתם טענה כללית לפיה פונקציה קבועה בין מרחבים

טופולוגיים היא רציפה. נוכיח שאלה הן כל הפונקציות הרציפות

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\ell$.

נניח בשלילה שקיימת $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\ell$ פונקציה רציפה שאינה קבועה.
מכיוון ש- $\mathbb{R}$ קשיר, נקבל ש- $f(\mathbb{R})$ הוא תת מרחב קשיר של $\mathbb{R}_\ell$.
הפונקציה אינה קבועה ולכן ב- $f(\mathbb{R})$ יש יותר מנקודה אחת, וזאת
בסתירה לסעיף א'.

שאלה 4

הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}^n$ עבור $n > 1$.

פתרון

נראה כי לכל $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$. אם נזרוק נקודה מ- $\mathbb{R}$ נקבל
מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור $b \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R} - \{b\} = (-\infty, b) \cup (b, \infty)$.
לעומת זאת לכל $n > 1$, אם נזרוק נקודה מ- $\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית
ולכן קשיר.

הסבר: $\mathbb{R}^n - \{a\}$ קשיר מסילתית לכל $n > 1$ ולכל $a \in \mathbb{R}^n$. נתבונן בשתי נקודות
 $x, y \in \mathbb{R}^n - \{a\}$. אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך a אז המסילה
הסטנדרטית מקשרת בין x ו- y גם ב- $\mathbb{R}^n - \{a\}$.

אחרת, מכיוון ש- $n > 1$ ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר את x ו- y) שעובר
דרך x . ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ- x ונסמנה z . ברור שהמסילה
הסטנדרטית מקשרת בין x ו- z (לא נמצאת על ישר זה). כמו כן, a לא
נמצאת על הישר המחבר בין z ו- y ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית)
המחברת בין y ל- z . אם יש מסילה ב- $\mathbb{R}^n - \{a\}$ בין x ל- y וכן מסילה בין y
ל- z אז יש גם מסילה בין x ל- z (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס
שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאומורפיזם $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ אז גם הפונקציה המצומצמת
 $f|_{\mathbb{R}^n - \{a\}}: \mathbb{R}^n - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} - \{f(a)\}$ הייתה הומיאומורפיזם. אבל כפי

שתיארנו, המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

שאלה 5

תרגיל (ממבחן)

יהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הראו שאם A צפוף ב- $\mathbb{R}$ וכן $A \neq \mathbb{R}$ אז A אינו קשיר.

פתרון

תהי $z \in \mathbb{R} \setminus A$ נקודה במשלים.

נסמן $A_1 := (-\infty, z) \cap A$, $A_2 := (z, \infty) \cap A$. נרצה להראות ש- A_1, A_2 הן פתוחות (ב- A) זרות ולא ריקות ואיחודן נותן את A .

ברור $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (כי $(-\infty, z) \cap (z, \infty) = \emptyset$) ולכן הקבוצות זרות.

A_1, A_2 הן קבוצות פתוחות ב- A על-פי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב.

A_1, A_2 לא ריקות כי A צפוף ב- $\mathbb{R}$.

מצאנו את הפירוק הדרוש, ולכן A אינו קשיר.

שאלה 6

יהי (X, τ) מרחב טופולוגי ויהי $A \subseteq X$ תת-מרחב קשיר. הוכיחו שלכל תת-מרחב $B \subseteq X$, אם $A \subseteq B \subseteq cl(A)$ אזי B קשיר.

פתרון

נרצה להשתמש במשפט שלפיו אם $A \subseteq B$ שני תת-מרחבים כך ש- A צפוף ב- B וגם A קשיר, אזי B קשיר.

נרצה להראות $cl_B(A) = B$. מתקיים $cl_B(A) = cl(A) \cap B$ וברור כי $cl(A) \cap B = B$. לכן A צפוף ב- B ומקבלים הדרוש.

שאלה 7

יהי X מ"ט ויהיו $A, B \subseteq X$. נתון כי A קשיר, B סגורה (סגורה ופתוחה) וכן $A \cap B \neq \emptyset$. הוכיחו כי $A \subseteq B$.

פתרון

הקבוצה $A \cap B$ פתוחה וסגורה בתת-מרחב A (לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב) ומכיוון ש- $A \cap B \neq \emptyset$ ו- A קשיר, נקבל $A \cap B = A$ ולכן $A \subseteq B$.

שאלה 8

יהי X מ"ט ותהיינה $A, B \subseteq X$ תת-קבוצות סגורות. נניח כי התת-מרחבים $A \cup B$ ו- $A \cap B$ קשירים. הוכיחו ש- A ו- B קשירים. הדרכה: מ"ל ש- A קשיר שכן ההוכחה ש- B קשיר סימטרית. הניחו בשלילה ש- $A = U \cup V$ כאשר U, V סגורות...

פתרון

נניח בשלילה ש- A לא קשיר אזי קיימות U, V זרות, לא ריקות, וסגורות ב- A כך ש- $U \cup V = A$. מתקיים $(U \cap B) \cup (V \cap B) = A \cap B$ כאשר $A \cap B$ קשיר ו- $U \cap B, V \cap B$ סגורות ב- $A \cap B$ (מדוע?). בה"כ $U \cap B = \emptyset$, $V \cap B = A \cap B$. מתקיים $A \cup B = U \cup (V \cup B)$ כאשר U זר ל- $V \cup B$ (שכן U זר ל- V ו- U זר ל- B), כמו כן $U, V \cup B$ לא ריקות. לבסוף, ניתן להסיק ש- $U, V \cup B$ סגורות ב- $A \cup B$ מכך ש- U, V סגורות ב- A וכן A, B סגורות ב- X . כמובן שהפירוק $A \cup B = U \cup (V \cup B)$ סותר, לאור כל מה שציינו לעיל, את קשירות $A \cup B$.