

פונקציות מרוכבות תרגיל 1

1. נתון המספר המרוכב $z = [(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i](1 + \sqrt{3}i)$. הביאו לצורה קוטבית את המספרים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$

ב. z^{17}

ג. $(\bar{z})^{17}$

ד. חשבו את $b = \text{Im}(z^{2n})$, עבור כל $n \in \mathbb{Z}$.

2. פתרו את המשוואות הבאות. (יש לתת את כל הפתרונות):

א. $z^6 - (1 - i)^3 = 0$

ב. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 2$

ג. $1 + z^2 + z^4 = z + z^3$ (רמז: השתמשו בזהירות בנוסחה של סדרה הנדסית)

ד. $(z-i)^n + 2(z-i)^{-n} + 2 = 0$

3. העזרו ב"נוסחת אוילר" $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ כדי לחשב את הסכומים הבאים:

א. $S_n = \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$

ב. $S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cos \theta + \binom{n}{2} \cos 2\theta + \dots + \binom{n}{n} \cos n\theta$

4. הוכיחו, על ידי חישוב מפורט, כי אם $|z|=1$, אזי $\frac{z+1}{z-1}$ הוא מספר מדומה טהור. יש

לרשום $z = x + yi$, ולעבוד עם x, y .

5. שרטטו את קבוצות הנקודות הבאות במישור המרוכב:

א. $A = \{z : |z + 2 - 3i| \leq 3\}$

ב. $B = \{z : |z-1| + |z+1| = 3\}$

רמז: המרחק בין המספרים המרוכבים $z, w \in \mathbb{C}$ הוא $d(z, w) = |z - w|$.

פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 1

1. ע"י פישוט מקבלים $z = 4 + 4i$. אם כך, $r = 4\sqrt{2}$, $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, כלומר $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{א.}$$

$$z^{17} = 4^{17}\sqrt{2}^{17}e^{i\frac{17\pi}{4}} = 4^{17}2^8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{42}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ב.}$$

$$(\bar{z})^{17} = \overline{z^{17}} = 2^{42}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ג.}$$

$$z^{2n} = 4^{2n}2^n e^{i\frac{n\pi}{2}} = 2^{5n}e^{i\frac{n\pi}{2}} = 2^{5n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i2^{5n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{ד.}$$

$$\operatorname{Im}(z^{2n}) = 2^{5n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

2.

$$z^6 = (1-i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} \quad \text{א.}$$

$$z_k = \left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{1}{8}\pi i + \frac{2\pi ki}{6}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi}{8}i + \frac{2\pi ki}{6}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{ב. נציב } w = \frac{z-1}{z+1} \text{ ואז } w^5 = 2e^0 \Rightarrow w_k = 2^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2\pi ik}{5}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, 3, 4. \text{ ניתן לחלץ את } z$$

$$\text{חזרה. } z_k = \frac{w_k + 1}{1 - w_k} = \frac{2^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2\pi ik}{5}} + 1}{1 - 2^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2\pi ik}{5}}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, 3, 4. \text{ (רצוי להכפיל ולחלק בצמוד של המכנה).}$$

$$\text{ג. המשוואה היא } 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = \sum_{n=0}^4 (-z)^n = 0 \quad \text{אם המנה בסכום ההנדסי, } q = -z \text{ היא לא}$$

$$\text{אחד (ז.א. } z \neq -1), \text{ ניתן להשתמש בנוסחה לסכום הנדסי ולקבל } \frac{1 - (-z)^5}{1 + z} = 0 \quad \text{מקבלים לכאורה}$$

$$\text{חמישה פתרונות למשוואה } (-z)^5 = 1 \text{ והם } z_k = -e^{\frac{2\pi ik}{5}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, 3, 4 - \text{ אך יש לשים לב}$$

שהפתרון $z_0 = -1$ לא חוקי (הנוסחה ההנדסית לא עובדת במקרה זה). אפשר לבדוק שמינוס אחד

לא פותר את המשוואה, ונשארים עם ארבעת הפתרונות z_1, z_2, z_3, z_4 .

ד. נציב $w = z - i$ ונקבל משוואה דו-ריבועית $w^2 + 2w + 2 = 0$. אפשר לפתור משוואה זו בקלות:

$$w_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

מכאן מקבלים שתי משוואות בשביל z , שכל אחת מהן תתן n

פתרונות. הראשונה $(z - i)^n = -1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$ נותנת $z_k - i = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{3\pi}{4n}i + \frac{2\pi ik}{n}}$ כלומר,

$$z_k = i + 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{3\pi}{4n}i + \frac{2\pi ik}{n}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \text{ השנייה באופן דומה נותנת}$$

$$z_k = i + 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{3\pi}{4n}i + \frac{2\pi ik}{n}}, \text{ עם אותם ערכים ל-} k.$$

3.

א. ראשית, אם θ היא כפולה שלמה של π , $S_n = 0$. נניח מעתה את ההפך, ונקבל

$$\begin{aligned} S_n &= \operatorname{Im}(e^{i\theta}) + \operatorname{Im}(e^{2i\theta}) + \dots + \operatorname{Im}(e^{ni\theta}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - \frac{\overline{1 - e^{i(n+1)\theta}}}{\overline{1 - e^{i\theta}}} = \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)\theta}}{1 - e^{-i\theta}} = \frac{1}{2i} \frac{\left[(1 - e^{-i\theta})(1 - e^{i(n+1)\theta}) - (1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i(n+1)\theta})\right]}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})} = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{\left[1 - e^{i(n+1)\theta} - e^{-i\theta} + e^{in\theta} - 1 + e^{-i(n+1)\theta} + e^{i\theta} - e^{-in\theta}\right]}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{1}{2i} \frac{\left[\left(e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta}\right) + \left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) + \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{\left[2i \sin(-(n+1)\theta) + 2i \sin(n\theta) + 2i \sin\theta\right]}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{-\sin[(n+1)\theta] + \sin(n\theta) + \sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \end{aligned}$$

.ב.3

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Re}((e^{i\theta})^k 1^{n-k}) = \operatorname{Re}(e^{i\theta} + 1)^n$$

אבל

$$\begin{aligned}(e^{i\theta} + 1)^n &= (\cos \theta + 1 + i \sin \theta)^n = (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + i \sin \theta)^n = (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^n \\ &= (2 \cos \frac{\theta}{2})^n (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})^n = (2 \cos \frac{\theta}{2})^n (\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2})\end{aligned}$$

ולכן

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} + 1)^n = (2 \cos \frac{\theta}{2})^n \cos \frac{n\theta}{2}$$

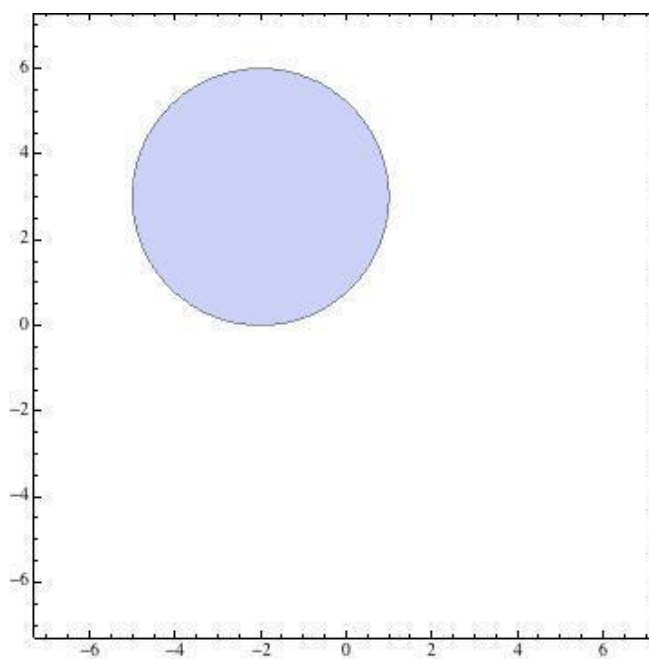
4. נתון כי $x^2 + y^2 = 1$. נתחיל בחישוב:

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} &= \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{(x+1)(x-1) + y^2 + i[(x-1)y - (x+1)y]}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1 + i[\dots]}{[\dots]}\end{aligned}$$

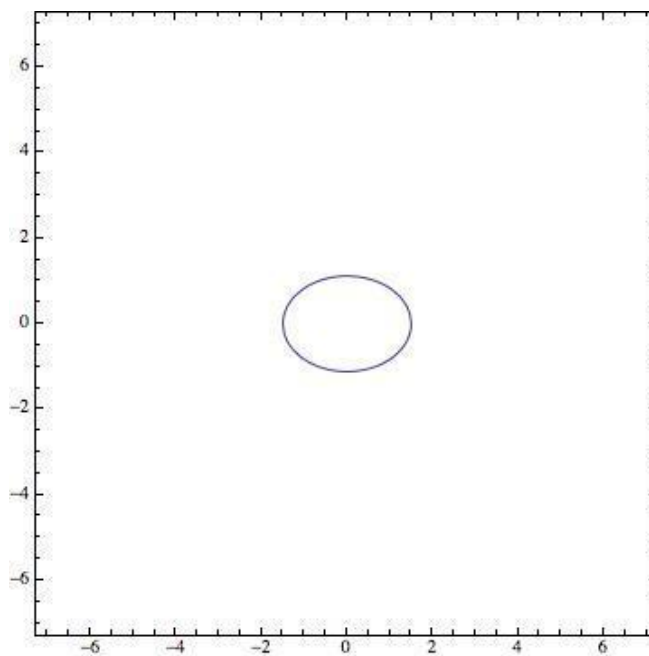
מהנתון, החלק הממשי של זה אפס, ולכן $\frac{z+1}{z-1}$ מדומה טהור.

5.

א. זהו עיגול סגור (עם שפה). מרכזו בנק' $(-2, 3)$, ורדיוסו באורך 3 יחידות.



ב. אליפסה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן משתי נקודות קבועות, הוא קבוע.



פתרון תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z = 0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

$$\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} \quad (\text{א})$$

$$\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2 - z^2}{z\bar{z}} = \frac{x^2 - 2ixy - y^2 - (x^2 + 2ixy - y^2)}{x^2 + y^2} = -i \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

לפי כלים של אינפי 3, זה לא מתכנס (למשל מתקדמים לאורך $y = 0$ ולאורך

$$(x = y$$

$$\frac{\text{Im}(z)}{\bar{z}}) \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\text{Im}(z)}{\bar{z}} = \frac{y}{x - iy} = \frac{xy + iy^2}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} + i \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

החלק הממשי והמדומה מתבדרים ולכן הגבול לא קיים.

2. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

$$f(z) = x^3 + iy^3 \quad (\text{א})$$

$$f(z) = z + \text{Re}(z) \quad (\text{ב})$$

$$f(z) = x^3 + y^5 \quad (\text{ג})$$

3. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \bar{z}e^{-17z^2}$ גזירה. פתרון: נניח ש $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 כלשהיא. נשים לב שהפונקציה e^{17z^2} גזירה בכל נקודה ולכן גם ב z_0 ולכן הפונקציה $\bar{z} \cdot e^{17z^2} = f(z)$ גזירה גם כן ב z_0 , אבל ידוע ש $\bar{z}$ אינה גזירה באף נקודה. לכן גם $f(z)$ אינה גזירה באף נקודה.

4. תהי $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x + y) - iu(x - y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x).

פתרון: נסמן $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ כלומר

$$U(x, y) = u(x + y), \quad V(x, y) = -u(x - y)$$

היות ש u גזירה ברציפות, נקבל שהנגזרות U_x, U_y, V_x, V_y קיימות ורציפות ולכן U, V דיפרנציאביליות בכל נקודה ובפרט על הציר הממשי. נותר לבדוק את קיום משוואות קושי רימן

$$U_x(x, y) = u'(x + y), \quad U_y(x, y) = u'(x + y)$$

$$V_x(x, y) = -u'(x - y) \quad V_y(x, y) = u'(x - y)$$

לכן

$$U_x(x, 0) = u'(x) = V_y(x, 0), \quad U_y(x, 0) = u'(x) = -V_x(x, 0)$$

כנדרש ולכן f גזירה על ציר x .

5. מצאו פונקציה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$. פתרון: אם משוואות קושי רימן ייצאו לנו

$$x^2 + y^2 = 2 \quad x^2 = y^2$$

אז קל לראות שהנקודות שבהן הפונקציה גזירה הן רק הנקודות הרצויות. צריך למצוא פונקציה שאלו משוואות קושי רימן שלה. נכתוב את המשוואות בתור

$$x^2 = 2 - y^2 \quad x^2 = y^2$$

נחליט ש $u_x = x^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}x^3 + C(y)$ כאשר $C(y)$ היא פונקציה שתלויה רק ב y . כמו כן נחליט ש $u_y = y^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}y^3 + C(x)$ כלומר בינתיים נראה שאפשר לקחת

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2$$

בהתאמה נקבל לפי משוואות קושי רימן

$$v_y = 2 - y^2 \quad v_x = -x^2$$

ולכן

$$v(x, y) = 2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + i(2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3)$$

מתאימה לדרישות.

6. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה. פתרון: אם נסמן

$$g(z) = (f(z))^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$$

היות ש $\operatorname{Re}(g)$ היא פונקציה קבועה, ו $g(z)$ גזירה, נקבל ש $g(z)$ קבועה. כלומר $(f(z))^2 = D$ קבוע. אם במקרה $D = 0$ סיימנו. אם לא, נסמן את שני השורשים של D בתור d_1, d_2 , זה מחייב שלכל ערך z

$$f(z) \in \{d_1, d_2\}$$

נותר להוכיח ש f שווה רק לאד משני הערכים האלה. נזכור ש $f(z)$ גזירה ולכן בוודאי רציפה. נניח בשלילה שקיימים z_1, z_2 כך ש $f(z_i) = d_i$. נבחר מסילה $\gamma(t)$ כלשהיא בין z_1 ל z_2 . לפי משפט ערך הביניים תמונתה תחת f היא מסילה בין d_1, d_2 אבל מצד שני $f(\gamma(t)) \subseteq \{d_1, d_2\}$ בסתירה. ולכן לכל z מתקיים $f(z) = d_1$ או $f(z) = d_2$ כלומר f קבועה כנדרש.

7. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\bar{z})}$ גזירה שם. פתרון: ראשית נשים לב ש $\overline{f(\bar{z})}$ מוגדרת בתחום המדובר כי $z \in \{z \mid |z| < R\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \{\bar{z} \mid |\bar{z}| < R\}$ אם נכתוב

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\overline{f(\bar{z})} = U(x, y) + iV(x, y)$$

אז בעצם

$$U(x, y) = u(x, -y) \quad V(x, y) = -v(x, -y)$$

ולכן U, V בוודאי דיפרנציאביליות כנדרש ובנוסף

$$U_x(x, y) = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) = V_y(x, y)$$

$$U_y(x, y) = -u_y(x, -y) = v_x(x, -y) = -V_x(x, y)$$

כלומר משוואות קושי רימן מתקיימות כנדרש.

תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z = 0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

(א) $\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}}$

(ב) $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\bar{z}}$

2. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

(א) $f(z) = x^3 + iy^3$

(ב) $f(z) = z + \operatorname{Re}(z)$

(ג) $f(z) = x^3 + y^5$

3. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \bar{z}e^{-17z^2}$ גזירה.

4. תהי $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x)

5. מצאו פונקציה $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.
רמז: אם $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ אפשר לנסות לחפש u, v מהצורה

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), \quad v(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$$

6. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.

רמז: הגדירו $g(z) = (f(z))^2$

7. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\bar{z})}$ גזירה שם.

תרגיל 4 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציה הבאה

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

מצאו תנאים על a, b, c וכן פונקציה $v(x, y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

תהיה גזירה ב $\mathbb{C}$. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

2. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

(א) $\sin(i)$

(ב) $\cos(-i)$

(ג) $\tan(1+i)$

3. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \bar{z}$ גזירה.

4. פתרו את המשוואה $e^{e^z} = 1$.

5. מצאו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

(א) $(1+i)^{2i}$

(ב) $(-i)^{-i}$

(ג) $\operatorname{Im}((1-i)^{1+i})$

6. הראו שחוק החזקות $e^{zw} = (e^z)^w$ נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף העיקרי של הלוגריתם) ע"י בחירה של z, w מתאימים.

7. מצאו נוסחא רב ערכית עבור $\arctan z$.

פתרון 3 בפונקציות מרוכבות

1. קודם כל היא צריכה להיות הרמונית ולכן צריך שיתקיים

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

במקרה שלנו

$$u_{xx} + u_{yy} = 2a + 2c$$

ולכן תנאי הכרחי הוא $c = -a$ אז אפשר להניח ש

$$u(x, y) = ax^2 + bxy - ay^2$$

כעת נחפש את $v(x, y)$. לפי קושי רימן

$$v_y = u_x = 2ax + by$$

$$v(x, y) = 2axy + \frac{b}{2}y^2 + D(x)$$

לפי המשוואה השנייה

$$2ay + D'(x) = v_x = -u_y = -bx + 2ay$$

$$D'(x) = -bx$$

$$D(x) = -\frac{b}{2}x^2 + D$$

ולכן

$$v(x, y) = 2axy + \frac{b}{2}y^2 - \frac{b}{2}x^2 + D$$

עכשיו נמצא את $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax^2 + bxy - ay^2 + i(2axy + \frac{b}{2}y^2 - \frac{b}{2}x^2 + D) = \\ &= ax^2 + 2iaxy - ay^2 + \frac{i}{2}(by^2 - i2bxy - bx^2) + iD = \\ &= a(x + iy)^2 - \frac{i}{2}(bx^2 + 2ibxy - by^2) + iD = \\ &= az^2 - \frac{i}{2}b(x + iy)^2 + iD = az^2 - \frac{i}{2}bz^2 + iD = \\ &= Ez^2 + D \end{aligned}$$

כאשר $E \in \mathbb{C}$ ו $D \in \mathbb{R}$.

2. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

(א) $\sin(i)$

פתרון: לפי נוסחא

$$\sin i = i \sinh(1) = i \frac{e - e^{-1}}{2}$$

(ב) $\cos(-i)$

פתרון: שוב לפי נוסחא

$$\cos(-i) = \cos i = \cosh 1 = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

(ג) $\tan(1+i)$

פתרון: נסמן $z = 1 + i$ ואז

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin z \cos \bar{z}}{\cos z \cos \bar{z}} = \frac{\sin(z + \bar{z}) + \sin(z - \bar{z})}{\cos(z + \bar{z}) + \cos(z - \bar{z})}$$

במקרה שלנו זה יוצא

$$\frac{\sin(2) + \sin(2i)}{\cos(2) + \cos(2i)} = \frac{\sin(2)}{\cos(2) + \cosh(2)} + i \frac{\sinh(2)}{\cos(2) + \cosh(2)}$$

3. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \bar{z}$ גזירה.

פתרון:

$$\cos \bar{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^y + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i \sin x)e^y + e^{-y}(\cos x - i \sin x)$$

כלומר

$$u(x, y) = \cos x(e^y + e^{-y}) \quad v(x, y) = \sin x(e^y - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$u_x = -\sin x(e^y + e^{-y})$$

$$u_y = \cos x(e^y - e^{-y})$$

$$v_x = \cos x(e^y - e^{-y})$$

$$v_y = \sin x(e^y + e^{-y})$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y + e^{-y}) = \sin x(e^y + e^{-y})$$

$$\cos x(e^y - e^{-y}) = -\cos x(e^y - e^{-y})$$

היות ש $e^y + e^{-y} > 0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x = 0$ כלומר ש $x = \pi k$
 לכן $\cos x \neq 0$ והמשוואה השנייה אומרת ש

$$e^y - e^{-y} = 0$$

שזה בקלות מכריח $y = 0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

4. פתרו את המשוואה $e^z = 1$.

פתרון: לפי התכונות של e אנחנו יודעים בעצם ש

$$e^z = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$$

אם $k = 0$ כמובן שאין לזה פתרון. עבור $k > 0$ נקבל

$$2\pi i k = e^{\ln(2\pi k)} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ולכן

$$z = \ln(2\pi k) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi i n \quad n \in \mathbb{Z}$$

ועבור $k < 0$ נקבל בדומה

$$z = \ln(2\pi|k|) - i\frac{\pi}{2} + 2\pi i n \quad n \in \mathbb{Z}$$

אם נאחד את הפתרונות נקבל

$$z = \ln(2\pi|k|) + i\frac{\pi}{2} + \pi i n \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$

5. (א)

$$(1+i)^{2i} = e^{2i \log(1+i)} = e^{2i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k))} = e^{i \ln 2} e^{-(\frac{\pi}{4} + 4\pi k)}$$

(ב)

$$(-i)^{(-i)} = e^{-i(\ln(|-i|) + i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k))} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

(ג)

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}((1-i)^{1+i}) &= \operatorname{Im}(e^{(1+i)(\ln \sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k))}) = \\ &= \operatorname{Im}(e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k + i(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k)}) = \\ &= e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k} \sin(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k)\end{aligned}$$

6. ניקח $w = i$ ו $z = 2\pi i$ ואז

$$(e^z)^w = 1 \neq e^{-2\pi} = e^{zw}$$

7. נניח $\tan w = z$, כלומר

$$\frac{\sin w}{\cos w} = z$$

$$\frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = z$$

$$e^{iw} - e^{-iw} = iz e^{iw} + iz e^{-iw}$$

$$e^{2iw} - 1 = iz e^{2iw} + iz$$

$$e^{2iw}(1 - iz) = iz + 1$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$2iw = \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

מרוכבות תרגיל 4

1. חשבו $\int_{\gamma} z \sin x dz$ כאשר $x = \operatorname{Re} z$ ו- γ מסילה המורכבת משלושה קטעים ישרים: מ- i ל- 0 , מ- 0 ל- $1-i$ ומ- $1-i$ ל- $1+i$.

2. חשבו $\int_{\gamma} [\sin z + \bar{z}] dz$ כאשר γ היא המסילה המוגדרת ע"י $z(t) = \begin{cases} e^{it} & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1-2t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

3. חשבו $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^3 - 8}{\bar{z} - 2} dz$ כאשר γ היא המסילה שמורכבת מהקטע הישר מ- i עד 0 , ואח"כ הקטע הישר מ- 0 עד 1 .

4. השתמשו במשפט ההערכה (חסם ML) כדי להוכיח את אי השוויונות הבאים:

א. $\left| \int_{\gamma} (e^z - e^{\bar{z}}) dz \right| \leq 2(\pi + 2)e$ כאשר γ היא המסילה המורכבת משלושת הקטעים

הישרים: מ- $1-i$ ל- $1+\frac{\pi}{2}i$, מ- $1+\frac{\pi}{2}i$ ל- $-1+\frac{\pi}{2}i$ ומ- $-1+\frac{\pi}{2}i$ ל- -1

ב. $\left| \int_{\gamma} \frac{2-z}{2+\bar{z}} dz \right| \leq 3\pi + 6$ כאשר γ היא המסילה המורכבת מחצי המעגל (עם רדיוס 1 ומרכז

באפס) מ- $1-i$ ל- $-1-i$ ומהקטע הישר מ- $-1-i$ ל- $1-i$

5. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
לכל פונקציה אנליטית, $f(z)$ ולכל מסילה חלקה γ מתקיים

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\gamma} f(z) dz\right) = \int_{\gamma} \operatorname{Re} f(z) dz$$

1. נפצל את המסילה שלנו לשלושה חלקים

$$\gamma_1(t) = i(1-t), \quad \gamma_2(t) = t, \quad \gamma_3(t) = 1+it$$

כאשר בכל חלק $0 \leq t \leq 1$. נחשב כל חלק של האינטגרל

$$\int_{\gamma_1} z \sin x dz = \int_0^1 i(1-t) \sin 0 \cdot (-i) dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} z \sin x dz = \int_0^1 t \sin t \cdot 1 dt = -t \cos t \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos t dt = -\cos 1 + \sin t \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

$$\int_{\gamma_3} z \sin x dz = \int_0^1 (1+it) \sin 1 \cdot i dt = i \sin 1 \left(t + \frac{i}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 = i \sin 1 - \frac{1}{2} \sin 1$$

נסכום הכל ונקבל

$$i \sin 1 + \frac{1}{2} \sin 1 - \cos 1$$

2. רואים מייד ש

$$\int_{\gamma} \sin z dz = -\cos z \Big|_{\gamma(-\pi)}^{\gamma(1)} = -\cos z \Big|_{-1}^{-1} = 0$$

למעשה, זה נובע מכך שהאינטגרל על מסילה סגורה (חלקה למקוטעין) של פונקציה אנליטית (לפחות בפנים המסילה) הוא 0.
לכן נותר לחשב את

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz$$

נפצל אותו לפי שני הקטעים של המסילה ונקבל

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{-\pi}^0 e^{-it} e^{it} i dt + \int_0^1 (1-2t)(-2) dt = it \Big|_{-\pi}^0 + t - t^2 \Big|_0^1 = i\pi$$

3. ע"י הזהות $\frac{w^3-8}{w-2} = w^2 + 2w + 4$ מקבלים שהאינטגרנד הוא $\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 4$. על הציר המדומה,

$$\int_i^0 (4 - 2z + z^2) dz = 4z - z^2 + \frac{z^3}{3} \Big|_i^0 = -\left(4i + 1 - \frac{i}{3}\right) = -1 - \frac{11}{3}i$$

והאינטגרל שם הוא $\bar{z} = -z$

על הקטע הממשי $\bar{z} = z$ והאינטגרל עליו הוא

$$\int_0^1 (z^2 + 2z + 4) dz = \frac{z^3}{3} + z^2 + 4z \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + 4 = \frac{16}{3}$$

האינטגרל הכולל הוא הסכום של השניים: $\frac{13}{3} - \frac{11}{3}i$

4. א. פשוט לראות כי אורך המסילה הוא $L = 2 + \pi$. האינטגרנד בערך מוחלט הוא

$$|e^z - \overline{e^z}| = |2i \operatorname{Im}(e^z)| = |2ie^x \sin y| = 2e^x |\sin y| \leq 2e^x$$

1, ולכן $e^x \leq e$. מכאן ש- $M = \max_{z \in \gamma} |e^z - \overline{e^z}| \leq 2e$. בסה"כ האינטגרל חסום ע"י

$$ML = 2(\pi + 2)e$$

ב. קל לראות כי אורך המסילה הוא $L = \pi + 2$. האינטגרנד בערך מוחלט (על המסילה) הוא

$$\left| \frac{2-z}{2+\bar{z}} \right| \leq \frac{2+|z|}{2-|\bar{z}|} \leq \frac{3}{1} = 3$$

כלומר $M \leq 3$. בסה"כ $ML \leq 3\pi + 6$.

5. שטויות במיץ. אם ניקח את $f(z) = z$ עם $\gamma(t) = it$ עבור $0 \leq t \leq 1$ אז

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^1 it \cdot i = -\frac{1}{2}$$

ו

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz = 0$$

ולכן השוויון לא מתקיים.

תרגיל 5 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz$$

(ב)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$$

(ג)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$$

כאשר $\gamma(t) = it \quad -1 \leq t \leq 1$

(ד)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$

2. יהי $k \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta = 0$$

רמז: חשבו את

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$$

3. נגדיר פונקציה בתחום $|z| < 3$ לפי

$$f(z) = \int_{|w|=3} \frac{3w^2 + 7w + 1}{w - z} dw$$

מצאו את $f'(1+i)$.

4. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה.

(ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה.

5. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תרגיל 5 מרוכבות

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz$$

שימוש ישיר במשפט קושי ($f(z) = (z+1)^7$) נותן לנו

$$\int_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz = 2\pi i (1+1)^7 = 256\pi i$$

(ב)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$$

שימוש ישיר במשפט קושי נותן לנו

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

(ג)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$$

אפשר כאן פשוט להציב לפי הגדרה

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{-1}^1 \frac{i}{(it)^2-1} dt = \int_{-1}^1 \frac{-i}{t^2+1} dt = -i \arctan t \Big|_{-1}^1 = -i \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = -i \frac{\pi}{2}$$

כאשר $\gamma(t) = it \quad -1 \leq t \leq 1$

(ד)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$.
 שתי נקודות חוסר האנליטיות $\pm i$ נמצאות בתוך התחום ולכן אי אפשר להשתמש
 ישירות במשפט קושי. נגדיר שתי מסילות קטנות. D_1 סביב i ו D_2 סביב $-i$
 ואז

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz = \int_{D_1} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz + \int_{D_2} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz$$

לפי משפט קושי

$$\int_{D_1} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz = \int_{D_1} \frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)} dz = 2\pi i \frac{e^{it}}{2i} = \pi e^{it}$$

ו

$$\int_{D_2} \frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)} dz = 2\pi i \frac{e^{-it}}{-2i} = -\pi e^{-it}$$

בסך הכל מתקבל

$$\pi e^{it} - \pi e^{-it} = 2\pi \sin t$$

אפשר לפתור גם על ידי פיצול לשברים חלקיים.

2. יהי $k \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta = 0$$

רמז: חשבו את

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$$

נחשב את

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$$

בשתי דרכים שונות. מצד אחד לפי פרמטריזציה

$$\gamma(t) = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

שאז האינטגרל יוצא

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{ke^{it}}}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{ke^{it}} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{k \cos t + ki \sin t} dt = i \int_0^{2\pi} e^{k \cos t} (\cos(k \sin t) + i \sin(k \sin t)) dt\end{aligned}$$

כלומר זה שווה ל

$$- \int_0^{2\pi} e^{k \cos t} \sin(k \sin t) dt + i \int_0^{2\pi} e^{k \cos t} (\cos(k \sin t)) dt$$

מצד שני חישוב של האינטגרל לפי משפט קושי נותן לנו ש

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

מהשוואה של חלק ממשי ודמיוני נקבל

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos t} (\cos(k \sin t)) dt = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos t} \sin(k \sin t) dt = 0$$

שזה מה שנדרש

3. נגדיר פונקציה בתחום $|z| < 3$ לפי

$$f(z) = \int_{|w|=3} \frac{3w^2 + 7w + 1}{w - z} dw$$

מצאו את $f'(1+i)$.
נגדיר $g(z) = 3z^2 + 7z + 1$. לפי נוסחת קושי, לכל $z \in \{z \mid |z| < 3\}$ מתקיים

$$\int_{|w|=3} \frac{3w^2 + 7w + 1}{w - z} dw = 2\pi i g(z)$$

ולכן

$$f(z) = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1)$$

ואז

$$f'(z) = 2\pi i(6z + 7)$$

כלומר

$$f'(1+i) = -12\pi + 26\pi i$$

4. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה.

i. לא נכון. $f(z) = z^4$ היא דוגמה נגדית.

(ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה.

i. על עיגול היחידה $\{z \mid |z| \leq 1\}$ אנחנו יודעים ש $f(z)$ חסומה כי היא רציפה. כלומר קיים M כך שלכל z המקיים $|z| \leq 1$ מתקיים $|f(z)| \leq M$
אבל לכל $z \in \mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש $|\frac{z}{3^n}| \leq 1$ ואז

$$|f(z)| = |f(\frac{z}{3})| = |f(\frac{z}{3^2})| = \dots = |f(\frac{z}{3^n})| \leq M$$

ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

5. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(א) נגדיר $g(z) = f(z) - f(2z)$ היא גם פונקציה שלמה אבל היא חסומה ולכן $g(z)$ קבועה. כלומר קיים c כך ש $f(z) - f(2z) = c$. אם נציב $z = 0$ נגלה ש $c = 0$ ולכן $f(z) = f(2z)$. מכאן מוכיחים ש f קבועה כמו בשאלה 4ב.

תרגיל 6 מרוכבות

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

(ב)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

2. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת כי $|f(z)| \leq M|z|^n$ עבור $M > 0$ כלשהוא. הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה n לכל היותר. רמז: חזרו על ההוכחה של משפט ליוביל.

3. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

בעיגול $\{z \mid |z| \leq 1\}$

הדרכה: כתבו $z = x + iy$ (והשתמשו כמובן בעקרון המקסימום).

4. תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה (כלומר ב $\{z \mid |z| < 1\}$) עם התכונה שלכל z כך ש $0 < |z| < 1$ מתקיים ש $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$. הוכיחו כי f היא פונקציית האפס.

5. תהי $f(z)$ אנליטית בפנים ועל השפה של העיגול $\{z \mid |z - a| = R\}$. f כמובן חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב M חסם, כלומר $|f(z)| \leq M$ לכל z כך ש $|z - a| = R$. הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

תרגיל 6 מרוכבות

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

פתרון: לפי נוסחת קושי לנגזרות עם

$$f(z) = e^{2z}$$

נקבל ש

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1) = \frac{2\pi i}{6} \cdot 8e^{-2} = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

(ב)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

פתרון: קל לראות שבעצם יש לנו:

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2} dz$$

בתחום המדובר

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2}$$

אנליטית ולכן

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = 2\pi i \frac{-\sin \pi \cdot 4 - 2(1+1) \cos \pi}{2^4} = \frac{\pi i}{2}$$

2. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת כי $|f(z)| \leq M|z|^n$ עבור $M > 0$ כלשהוא. הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה n לכל היותר. רמז: חזרו על ההוכחה של משפט ליוביל.

פתרון: מספיק להוכיח שלכל z_0 מתקיים $f^{n+1}(z_0) = 0$. לפי משפט קושי, לכל $R > 0$ מתקיים

$$f^{n+1}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz$$

לפי משפט של חסם לאיטגרל

$$\begin{aligned} |f^{n+1}(z_0)| &= \left| \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz \right| \\ &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{M|z|^n}{R^{n+2}} 2\pi R \leq (n+1)! \frac{M(R+|z_0|)^n}{R^{n+1}} \end{aligned}$$

אם נשאיף את R לאינסוף, הביטוי הימני ישאר ל 0 ולכן $f^{n+1}(z_0) = 0$ כנדרש.

3. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

בעיגול $\{z \mid |z| \leq 1\}$
הדרכה: כתבו $z = x + iy$ (והשתמשו כמובן בעקרון המקסימום).
פתרון: נכתוב $z = x + iy$ ונקבל ש

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3yi + 2 \\ &= x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2x - 3)y \end{aligned}$$

אנחנו מחפשים למעשה מקסימום של הפונקציה

$$|f(z)| = \sqrt{(x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x - 3)^2 y^2}$$

לשמחתנו פונקציה זו מקבלת מקסימום בדיוק איפה שהפונקציה

$$|f(z)|^2 = (x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x - 3)^2 y^2$$

מקבלת מקסימום מה שמביא אותנו לביטוי טיפה יותר נחמד.
אנחנו כמובן יודעים בוודאות שהמקסימום קיים כי כל הפונקציות רציפות על קבוצה סגורה וחסומה
לפי עקרון המקסימום, ידוע שמקסימום מתקבל בנקודה שנמצאת על שפת המעגל, דהיינו בנקודה שמקיימת $y^2 = 1 - x^2$. נציב גם את האינפורמציה הזאת ונקבל שמחפשים מקסימום עבור

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1 + x^2 - 3x + 2)^2 + (2x - 3)^2 (1 - x^2) \\ &= (2x^2 - 3x + 1)^2 + (4x^2 - 12x + 9)(1 - x^2) \\ &= 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x^3 + 9x^2 - 3x + 2x^2 - 3x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x^4 + 12x^3 - 9x^2 \\ &= 8x^2 - 18x + 10 \end{aligned}$$

כלומר אנחנו מחפשים מקסימום של

$$f(x) = 8x^2 - 18x + 10$$

אבל נשים לב שאנחנו חיים בקטע $[-1, 1]$ (אלה הערכים האפשריים של x). נגזור ונקבל

$$f'(x) = 16x - 18$$

כלומר הפונקציה יורדת לאורך כל תחום ההגדרה ולכן המקסימום יהיה בנקודה $x = -1$ כלומר מקסימום יתקבל בנקודה $x = -1$

4. תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה (כלומר ב $\{z \mid |z| < 1\}$) עם התכונה שלכל z כך ש $0 < |z| < 1$ מתקיים ש $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$. הוכיחו כי f היא פונקציית האפס. **פתרון:** היות ש

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1}{x} = 0$$

ולפי סנדויץ אנחנו מקבלים ש

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = 0$$

ולכן אם נגדיר $g(z)$ לפי

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & |z| < 1 \\ 0 & |z| = 1 \end{cases}$$

אז זאת תהיה פונקציה אנליטית בפנים עיגול היחידה ורציפה על שפתו. לפי עקרון ה $\max$ היא מקבלת מקסימום על השפה. אבל הערך של $|g(z)|$ על עיגול היחידה עצמו הוא 0. ולכן בהכרח

$$g(z) = 0$$

ובפרט

$$f(z) = 0$$

כנדרש.

5. תהי $f(z)$ אנליטית בפנים ועל השפה של העיגול $\{z \mid |z - a| = R\}$. f כמובן חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב M חסם, כלומר $|f(z)| \leq M$ לכל z כך ש $|z - a| = R$. הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

פתרון: נסמן ב Γ_R את העיגול שמרכזו ב a ורדיוסו R . לפי נוסחת קושי מתקיים

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

ולכן

$$|f^{(n)}(a)| \leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right|$$

לפי חסם ML מתקיים

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{2\pi M}{R^n}$$

וכך מקבלים הדרוש.

תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{א})$$

$$z \neq 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! (z^3 - i)^n \quad (\text{ג})$$

2. מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות:

$$z = 0 \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{א})$$

$$z = \frac{\pi}{2} \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{ב})$$

$$z = 0 \quad \text{סביב } \frac{z}{z^4+9} \quad (\text{ג})$$

$$z = 1 \quad \text{סביב } \frac{z}{(z+2)(z+3)} \quad (\text{ד})$$

3. יהי $\sum a_n$ טור המתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n z^n$ הוא 1.

4. פתחו לטור טיילור סביב 0 את הפונקציה

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2} dw$$

תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{א})$$

פתרון: במקרה שלנו

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ברור כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

ולכן

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

זה עוד לא אומר לנו בדיוק מה תחום ההתכנסות כי צריך לבדוק את השפה.
אם z מספר מרוכב כך ש $|z+i|=1$ אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$$

בוודאי מתכנס כי הוא מתכנס בהחלט שהרי

$$\left| \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

ולכן לסיכום תחום ההתכנסות הוא $E = \{z \mid |z+i| \leq 1\}$

$$z \neq 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n \quad (\text{ב})$$

פתרון: נציב $w = \frac{z+1}{z-1}$ ונקבל את טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} w^n$$

נשים לב ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n}} = \frac{1}{3}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות של הטור הוא

$$R = 3$$

שוב צריך לבדוק את השפה אבל שוב ברור שאם $|w| = 3$ אז הטור מתכנס בהחלט כי

$$\left| \frac{1}{n^2 3^n} w^n \right| = \frac{1}{n^2}$$

ולכן תחום ההתכנסות של הטור הזה הוא

$$\{w \in \mathbb{C} | |w| \leq 3\}$$

כדי למצוא את תחום ההתכנסות של הטור המקורי צריך לפתור את

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq 3$$

כלומר

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 \leq 9$$

נכתוב $z = x + iy$ ואז

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \leq 9$$

כלומר

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2$$

$$8x^2 - 20x + 8 + 8y^2 \geq 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + y^2 \geq -1$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 \geq \frac{9}{16}$$

וקיבלנו שתחום ההתכנסות הוא המשלים של מעגל פתוח שרדיוסו $\frac{3}{4}$ ומרכזו ב $z = \frac{5}{4}$, מהמעגל הזה צריך להוציא את הנקודה $z = 1$ שמחוץ לתחום הגדרה בכלל.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n \quad (ג)$$

פתרון: נציב $w = z^3 - i$ ונקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n$$

היות ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

במקרה זה רדיוס ההתכנסות הוא $R = 0$ כלומר יש התכנסות רק עבור $w = 0$.
זה מתאים לערכי z עבורם

$$z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

כלומר

$$z = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

נשים לב שהפתרון האחרון הוא למעשה

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

2. מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות:

$$z = 0 \text{ סביב } z^2 \sin z \quad (\text{א})$$

פתרון: סביב $z = 0$ היות שידוע ש

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ברור שהטור שאנחנו מחפשים הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

$$z = \frac{\pi}{2} \text{ סביב } z^2 \sin z \quad (\text{ב})$$

פתרון: נציב $w = z - \frac{\pi}{2}$ כדי שהפיתוח יהיה סביב 0. הפונקציה הופכת להיות

$$\begin{aligned} \left(w + \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(w + \frac{\pi}{2}\right) &= \left(w + \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(w) \\ &= w^2 \cos(w) + \pi w \cos w + \frac{\pi^2}{4} \cos w \end{aligned}$$

היות שהפיתוח של $\cos w$ הוא

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

נקבל שהטור המבוקש הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+2}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר הטור הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

כאשר

$$a_k = \begin{cases} \frac{\pi(-1)^n}{(2n)!} & k = 2n + 1 \\ (-1)^n \left(\frac{\pi^2}{4(2n)!} - \frac{1}{(2n-2)!} \right) & k = 2n \quad k \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{4} & k = 0 \end{cases}$$

(ג) סביב $z = 0$ $\frac{z}{z^4+9}$
פתרון: נשים לב ש

$$\frac{1}{9+z^4} = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - (-\frac{z}{\sqrt{3}})^4} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^{4n} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^n} z^{4n}$$

ולכן הטור שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9(\sqrt{3})^n} z^{4n+1}$$

(ד) סביב $z = 1$ $\frac{z}{(z+2)(z+3)}$

פתרון: נפרק לפי שברים חלקיים. קל לראות ש

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{-2}{z+2} + \frac{3}{z+3}$$

כעת,

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - (-\frac{z}{3})} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^n}$$

בדומה

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n}$$

ולכן

$$\frac{-2}{z+2} + \frac{3}{z+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} \right) z^n$$

3. יהי $\sum a_n$ טור המתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n z^n$ הוא 1.

פתרון: נסמן את רדיוס ההתכנסות ב R . היות ש $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אנחנו יודעים ש $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z = 1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1. מצד שני רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum |a_n| z^n$ הוא גם R והטור הזה דווקא מתבדר עבור $z = 1$ כלומר $R \leq 1$ ולכן לסיכום $R = 1$.

4. פתחו לטור טיילור סביב 0 את הפונקציה

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2} dw$$

פתרון: הפיתוח של e^{w^2} לטור טיילור הוא כמובן

$$e^{w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!}$$

ולכן לפי אינטגרציה איבר איבר

$$\begin{aligned} \int_0^z e^{w^2} dw &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{w^{2n}}{n!} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Big|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned}$$

וזהו.

תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f''(\frac{1}{n!}) + f(\frac{1}{n!}) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
2. תהינה $f_1(z), \dots, f_m(z)$ מספר סופי של פונקציות אנליטיות ב $A = \{z \mid |z| < 1\}$ ונתון כי לכל $z \in A$
$$f_1(z) \cdots f_m(z) = 0$$
הוכיחו כי לפחות אחת מהפונקציות האלה היא פונקצית האפס.
3. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f(f(z)) = f(z)$.
4. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב $\{z \mid |z| < 2\}$ המקיימות $f(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
5. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = |1 - |z||$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
6. מצאו את האפסים של הפונקציות הבאות ומצאו את הסדר שלהם.

$$(e^z - 1) \sin z \cos z \quad (\text{א})$$

$$\sin z^2 \quad (\text{ב})$$

תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f''(\frac{1}{n!}) + f(\frac{1}{n!}) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
פתרון: נזכור שאם f שלמה אז בוודאי f'' שלמה. לכן, לפי משפט היחידות

$$f''(z) + f(z) = 0$$

זאת משוואה דיפרנציאלית שפתרונה:

$$f(z) = c_1 e^{iz} + c_2 e^{-iz}$$

2. תהינה $f_1(z), \dots, f_m(z)$ מספר סופי של פונקציות אנליטיות ב $A = \{z \mid |z| < 1\}$ ונתון כי לכל $z \in A$

$$f_1(z) \cdots f_m(z) = 0$$

הוכיחו כי לפחות אחת מהפונקציות האלה היא פונקצית האפס.
פתרון: נגדיר

$$E_i = \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2} \text{ and } f_i(z) = 0\}$$

לפי הנתון, ברור ש

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$$

ולכן לפחות אחת מבין קבוצות אלו היא אינסופית. בלי הגבלת כלליות E_1 היא אינסופית. E_1 היא קבוצה אינסופית וחסומה, ולכן לפי בולצאנו ווירשטראס יש לה נקודת הצטברות, נניח p . ברור ש $p \in A$ (למעשה $p \in \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$ כי זאת קבוצה סגורה) וגם $E_1 \subseteq A$ ו A קבוצה פתוחה. אז בעצם f_1 מתאפסת על E_1 שהיא קבוצה ב A עם נקודת הצטברות ב A ולכן לפי משפט היחידות

$$f_1(z) = 0 \quad \forall z \in A$$

3. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f(f(z)) = f(z)$.

פתרון: ראשית נשים לב שכל הפונקציות הקבועות מקיימות את הדרישה. אם $f(z)$ שלמה אבל לא קבועה, אז $f(\mathbb{C})$ היא קבוצה עם נקודת הצטברות ב $\mathbb{C}$. (ראינו בתרגול ש $f(\mathbb{C})$ צפופה ב $\mathbb{C}$ ולכן כל נקודה היא נקודת הצטברות של $f(\mathbb{C})$) אבל לפי הנתון, לכל $a \in f(\mathbb{C})$ מתקיים $f(a) = a$ ולכן לפי משפט היחידות $f(z) = z$. כמו כן, $f(z) = z$ באמת מקיימת את התנאי. לסיכום הפונקציות שמקיימות את התנאי הן"ל הן בדיוק הפונקציות הקבועות ו $f(z) = z$.

4. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב $\{z \mid |z| < 2\}$ המקיימות ש $f(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

פתרון: אנחנו רוצים כמובן להשתמש במשפט היחידות. נסמן $z = 1 - \frac{1}{n}$, כלומר $n = \frac{1}{1-z}$ ונציב זאת באגף ימין:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = (1-z)^2 - (1-z) = 1 - 2z + z^2 - 1 + z = z^2 - z$$

כלומר, אם נגדיר $g(z) = z^2 - z$ אז יתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = g\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

ולכן לפי משפט היחידות

$$f(z) = z^2 - z$$

בכל התחום המדובר.

5. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = |1 - |z||$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
פתרון: נניח שקיימת כזו פונקציה, אז לכל z על מעגל היחידה מתקיים

$$|f(z)| = |1 - |z|| = 0$$

כלומר $f(z) = 0$ על מעגל היחידה, ולפי עקרון היחידות $f(z) = 0$. אבל $f(z)$ לא מקיימת את התנאי שלעיל ולכן אין פונקציות כנ"ל.

6. מצאו את האפסים של הפונקציות הבאות ומצאו את הסדר שלהם.

$$(e^z - 1) \sin z \cos z \quad (\text{א})$$

ל $e^z - 1$ יש אפס בנקודות $z = 2\pi ik$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת (שהיא e^z) לא מתאפסת.

ל $\sin z$ יש אפס בנקודות $z = \pi k$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת $\cos z$ לא מתאפסת בנקודות אלו.

ל $\cos z$ יש אפס בנקודות $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ושוב אלו אפסים מסדר 1 כי הנגזרת $-\sin z$ לא מתאפסת בנקודות אלה.

בסך הכל למכפלה יש:

בנקודות $z = 2\pi ik$ כאשר $k \neq 0$ יש אפס מסדר 1.

בנקודות $\frac{\pi}{2}k$ כאשר $k \neq 0$ יש אפס מסדר 1.

בנקודה $z = 0$ יש אפס מסדר 2.

$$\sin z^2 \quad (\text{ב})$$

כזכור $\sin z$ מתאפסת כאשר $z = \pi k$ וזה אומר שהאפסים של הפונקציה הם בנקודות

$$z = \pm\sqrt{\pi k} \quad z = \pm i\sqrt{\pi k} \quad k \geq 0$$

הנגזרת של הפונקציה היא

$$2z \cos z^2$$

האפס היחיד שבו הנגזרת גם מתאפסת הוא $z = 0$. בנקודה זו יש אפס מסדר 2 ואת זה קל לראות לפי הפיתוח טיילור

$$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots$$

ולכן לסיכום $z = \pm i\sqrt{\pi k}$ $k \in \mathbb{N}$ הם כולם אפסים מסדר 1 ו $z = 0$ הוא אפס מסדר 2.

תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0 . בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{א})$$

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{ב})$$

2. תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.

3. תהי z_0 סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל N טבעי ולכל M ממשי קיימת סדרה $z_n \rightarrow z_0$ כך ש

$$|(z - z_0)^N f(z_n)| \geq M$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0 . בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{א})$$

פתרון: לפי הנתונים

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2} \quad g(z) = (z-z_0)^3 \tilde{g}(z)$$

$$r(z) = (z-z_0)^2 \tilde{r}(z) \quad h(z) = (z-z_0) \tilde{h}(z)$$

כאשר כל הטילדות אנליטיות ולא מתאפסות ב z_0 . כעת,

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{(z-z_0)\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$$

מה שנשאר אנליטי ב z_0 ולכן z_0 סינגולריות סליקה.

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{ב})$$

פתרון: עם אותם סימונים של הסעיף הקודם

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2} + (z-z_0)^3 \tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2 \tilde{r}(z) + (z-z_0) \tilde{h}(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^3} \frac{\tilde{f}(z) + (z-z_0)^5 \tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z) + \tilde{h}(z)}$$

הפונקציה $\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$ אנליטית ב z_0 ולכן z_0 היא קוטב מסדר 3.

2. תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$. היות ש $g(z)$ אינה פונקציה קבועה, קיימים a, b כך ש

$$g(a) \neq g(b)$$

היות ש z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של f , קיימות סדרות a_n, b_n המתכנסות ל z_0 כך ש

$$f(a_n) \rightarrow a$$

$$f(b_n) \rightarrow b$$

היות ש g אנליטית ולכן רציפה, יתקיים כי

$$gf(a_n) \rightarrow g(a)$$

$$gf(b_n) \rightarrow g(b)$$

כאמור $g(a) \neq g(b)$ ולכן הגבול

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z))$$

לא קיים, כלומר z_0 היא נקודת סינגולריות עיקרית של ההרכבה.

3. תהי z_0 סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל N טבעי ולכל M ממשי קיימת סדרה $z_n \rightarrow z_0$ כך ש

$$|(z_n - z_0)^N f(z_n)| \geq M$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

יהי N טבעי ו M ממשי. נגדיר $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$. נניח כי יש סביבה U מנוקבת של z_0 שבה

$$|g(z)| < M$$

אז $g(z)$ בעלת סינגולריות סליקה ב z_0 ובהתאמה $f(z)$ בעלת קוטב (מסדר לכל היותר N) ב z_0 . זאת בסתירה לכך ש z_0 היא סינגולריות עיקרית של f . לכן אין סביבה מנוקבת של z_0 שבה מתקיים

$$|g(z)| < M$$

לכן אפשר לייצר סדרה $z_n \rightarrow z_0$ שעבורה

$$|g(z_n)| \geq M$$

(בדרך הרגילה, בכדור ברדיוס 1 יש נקודה כ"ל - מסמנים אותה z_1 . באופן כללי בכדור ברדיוס $\frac{1}{k}$ יש נקודה כ"ל, מסמנים אותה z_k וכו')

תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$$

לסור לורך בטבעת הנתונה

(א) הטבעת $|z-2| > 2$

(ב) הטבעת $0 < |z-2| < 2$

2. מצאו את החלק העיקרי (דהיינו החלק עם חזקות שליליות) של טור לורך של הפונקציה

$$\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$$

סביב הנקודה $z_0 = 3i$

3. הראו כי אם ל f קוטב ב z_0 ול g יש סינגולריות עיקרית ב z_0 אז ל $f+g$ יש סינגולריות עיקרית ב z_0 .

4. נניח כי ל f סינגולריות מבודדת ב z_0 . הוכיחו כי $\text{Res}(f', z_0) = 0$.

5. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} dz \quad (\text{א})$$

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6} dz \quad (\text{ב})$$

$$\int_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z} dz \quad (\text{ג}) \quad \text{כאשר } \gamma \text{ הוא הריבוע שקודקדיו } 4+4i, 4-4i, -4+4i, -4-4i$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(e^z-1)} dz \quad (\text{ד})$$

תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$$

לטור לורך בטבעת הנתונה

(א) הטבעת $|z-2| > 2$

קודם כל יותר נוח להציב $w = z - 2$ ואז לדבר על

$$\frac{1}{(w+2)^2 w}$$

בטבעת $|w| > 2$. ברור שהגורם של $\frac{1}{w}$ לא יעשה לנו בעיות. נסתכל רק על

$$\frac{1}{(w+2)^2}$$

ונשתמש בגזירה איבר איבר. אנחנו יודעים ש

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w+2)} &= \frac{1}{w} \frac{1}{1 + \frac{2}{w}} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - (-\frac{2}{w})} \\ &= \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{w^{n+1}} \end{aligned}$$

נגזור איבר איבר כדי לקבל

$$-\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-n-1) \frac{2^n}{w^{n+2}}$$

ולכן

$$\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{2^n}{w^{n+2}}$$

$$\frac{1}{(w+2)^2 w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{2^n}{w^{n+3}}$$

(ב) הטבעת $0 < |z-2| < 2$

כאן צריך לפתח

$$\frac{1}{(w+2)^2 w}$$

בטבעת $0 < |w| < 2$. שוב אפשר להתמקד רק ב

$$\frac{1}{(w+2)^2}$$

אבל זאת פונקציה אנליטית בטבעת זו ולכן יש טור טיילור רגיל

$$\frac{1}{w+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{2^n}$$

ולכן שוב ע"י גזירה איבר איבר

$$\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \frac{w^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{w^n}{2^{n+1}}$$

1

$$\frac{1}{(w+2)^2 w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

2. מצאו את החלק העיקרי (דהיינו החלק עם חזקות שליליות) של טור לורן של הפונקציה

$$\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$$

סביב הנקודה $z_0 = 3i$

פתרון:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2(z-3i)^2}$$

נשים לב שבסביבת $3i$ הפונקציה

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}$$

היא אנליטית ולכן טור לורן שלה הוא טור טיילור

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3i)^n$$

ולכן

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-3i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3i)^{n-2}$$

כלומר החלק העיקרי הוא

$$a_0(z-3i)^{-2} + a_1(z-3i)^{-1}$$

אבל כידוע,

$$a_0 = g(3i) \quad a_1 = g'(3i)$$

כלום

$$a_0 = \frac{3ie^{-3}}{(6i)^2} = \frac{3i}{e^3(-36)} = -\frac{i}{12e^3}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{(e^{iz} + iz e^{iz})(z + 3i)^2 - 2(z + 3i)(z e^{iz})}{(z + 3i)^4} \\ &= e^{iz} \frac{(1 + iz)(z + 3i) - 2z}{(z + 3i)^3} \end{aligned}$$

ולכן

$$g'(3i) = \frac{1}{e^3} \frac{(-2)(6i) - 6i}{(6i)^3} = \frac{1}{e^3} \frac{-3}{-36} = \frac{1}{12e^3}$$

כלומר החלק העיקרי הוא:

$$-\frac{i}{12e^3}(z - 3i)^{-2} + \frac{1}{12e^3}(z - 3i)^{-1}$$

3. הראו כי אם ל f קוטב ב z_0 ול g יש סינגולריות עיקרית ב z_0 אז ל $f+g$ יש סינגולריות עיקרית ב z_0 .

די טריויאלי מהסתכלות על טור לורן סביב z_0 . החלק העיקרי של טור לורן של f הוא סופי והחלק העיקרי של טור לורן של g הוא אינסופי ולכן החלק העיקרי של טור לורן של $f+g$ יהיה אינסופי גם כן ולכן זו תהיה סינגולריות עיקרית.

4. נניח כי ל f סינגולריות מבודדת ב z_0 . הוכיחו כי $\text{Res}(f', z_0) = 0$. נסמן ב γ מעגל קטן סביב z_0 . נזכור כי

$$\text{Res}(f', z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f'(z) dz$$

אבל היות של f' יש פונקציה קדומה (הלוא היא f) נקבל ש

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$$

כנדרש.

5. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} dz \quad (\text{א})$$

פתרון: נזכור ש

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{z^2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$$

$$\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n+3}$$

הסינגולריות היחידה היא 0 והשארת בה מתקבלת כאשר $n = 2$ כלומר

$$\text{Res}\left(\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}, 0\right) = \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} dz = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6} dz \quad (\text{ב})$$

פתרון: בתוך התחום יש סינגולאריות אחת שהיא $z = 1$ וזהו כמובן קוטב מסדר 6. נשתמש בנוסחה

$$\text{Res}\left(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1\right) = \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^5}{dz^5} \left(\frac{z^6}{(z-3)} \right)$$

נבצע חישוב לפי לייבניץ

$$\begin{aligned} \frac{d^5}{dz^5} \frac{z^6}{(z-3)} &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \frac{d^k}{dz^k} ((z-3)^{-1}) \frac{d^{5-k}}{dz^{5-k}} (z^6) = \\ &= (z-3)^{-1} 720z + 5 \cdot (-(z-3)^{-2}) \cdot 360z^2 + 10 \cdot 2(z-3)^{-3} \cdot 120z^3 \\ &\quad + 10 \cdot (-6(z-3)^{-4}) \cdot 30z^4 + 5 \cdot 24(z-3)^{-5} \cdot 6z^5 - 120(z-3)^{-6} \cdot z^6 \end{aligned}$$

נציב $z = 1$ ונקבל:

$$-\frac{720}{2} - \frac{5 \cdot 360}{4} - \frac{20 \cdot 120}{8} - \frac{60 \cdot 30}{16} - \frac{30 \cdot 24}{32} - \frac{120}{64}$$

ולכן

$$\text{Res}\left(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1\right) = \frac{1}{5!} \left(-\frac{720}{2} - \frac{5 \cdot 360}{4} - \frac{20 \cdot 120}{8} - \frac{60 \cdot 30}{16} - \frac{30 \cdot 24}{32} - \frac{120}{64} \right) = -\frac{665}{64}$$

ולכן

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6} dz = 2\pi i \frac{-665}{64} = -\pi i \frac{665}{32}$$

(ג) $\int_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z} dz$ כאשר γ הוא הריבוע שקודקודיו $4+4i, 4-4i, -4+4i, -4-4i$

פתרון: בתוך התחום יש כמה סינגולריות. $z = 0, z = \pm\pi$. שאר הסינגולריות כבר מחוץ לתחום. כל הסינגולריות הן קטבים מסדר 1 (כי הן אפסים מסדר 1 של $\sin z$).

$$\text{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, 0\right) = \frac{1+0}{\cos 0} = 1$$

$$\text{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, \pi\right) = \frac{1+\pi}{\cos \pi} = -1 - \pi$$

$$\text{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, -\pi\right) = \frac{1-\pi}{\cos -\pi} = -1 + \pi$$

ולכן סכום הסינגולריות הוא -1 ולכן

$$\int_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z} dz = -2\pi i$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(e^z - 1)} dz \quad (\text{ד})$$

יש נקודות סינגולריות אחת ב $z_0 = 0$. צריך להבין מה השארית שם. נזכור כי 0 הוא אפס מסדר 1 של $e^z - 1$ ולכן הוא קוטב מסדר 3 של

$$\frac{1}{z^2(e^z - 1)}$$

ננסה להבין מה השארית בטור לורן. קודם נבין כמה איברים בטור לורן של

$$\frac{1}{(e^z - 1)} = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

$$1 = \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right)(e^z - 1) = \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right)\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots\right)$$

נבצע השוואת מקדמים: עבור z^0 :

$$1 = a_{-1}$$

עבור z^1 :

$$0 = \frac{a_{-1}}{2} + a_0$$

כלומר

$$a_0 = -\frac{1}{2}$$

עבור z^2 :

$$0 = \frac{a_{-1}}{6} + \frac{a_0}{2} + a_1$$

כלומר

$$a_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

זה מספיק כי מכאן ברור ש

$$\frac{1}{z^2(e^z - 1)} = \frac{1}{z^3} + \frac{-\frac{1}{2}}{z^2} + \frac{\frac{1}{12}}{z} + \dots$$

ולכן השארית היא $\frac{1}{12}$ והאינטגרל שווה ל

$$\frac{\pi i}{6}$$

תרגיל 11 בפונקציות מרוכבות

1. הראו כי

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta = \sqrt{2}\pi$$

רמז: לעניות דעתי יהיה יותר קל לפשט קצת את האינטגרל לפני שעוברים לאינטגרל מרוכב.

2. חשבו את

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1 + x^2)^2} dx \quad (\text{ג})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta \quad (\text{ד})$$

3. (אין חובה להגיש תרגיל זה) הראו כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

הדרכה: הביטו באינטגרל

$$\int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz$$

כאשר C_N הוא ריבוע שמרכזו ב 0 ואורך צלעו $2N + 1$.

תרגיל 11 בפונקציות מרוכבות

1. הראו כי

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta = \sqrt{2}\pi$$

רמז: לעניות דעתי יהיה יותר קל לפשט קצת את האינטגרל לפני שעוברים לאינטגרל מרוכב.

פתרון:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3 - \cos 2\theta} d\theta$$

נציב $t = 2\theta$ ולכן $dt = 2d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3 - \cos 2\theta} d\theta = \int_0^{4\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt$$

קל לראות ש

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt$$

(מי שמתעקש יכול להוכיח זאת ע"י הצבה של $\varphi = t - 2\pi$ ולכן

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt$$

עכשיו נבצע הצבה מרוכבת

$$z = e^{it}$$

$$dz = ie^{it} dt = iz dt$$

$$\cos t = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{2}{3 - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)} \frac{1}{iz} dz &= \int_{|z|=1} \frac{4}{6 - z - \bar{z}} \frac{1}{iz} dz = 4i \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - 6z + 1} dz \\ &= 4i \int_{|z|=1} \frac{1}{(z - (3 - \sqrt{8}))(z - (3 + \sqrt{8}))} dz \end{aligned}$$

נשים לב ש $3 - \sqrt{8}$ היא סינגולריות בתוך התחום ו $3 + \sqrt{8}$ מחוצה לו. קל לראות ש

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(z - (3 - \sqrt{8}))(z - (3 + \sqrt{8}))}, 3 - \sqrt{8}\right) = \frac{1}{3 - \sqrt{8} - 3 - \sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{8}}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$4i \int_{|z|=1} \frac{1}{(z - (3 - \sqrt{8}))(z - (3 + \sqrt{8}))} dz = 2\pi i \cdot 4i \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{8}}\right) = \sqrt{2}\pi$$

כנדרש.

2. חשבו את:

פתרון: בכל השאלה הזאת נסמן $\Gamma_R = \{z \mid z \in \mathbb{R} \quad -R \leq z \leq R\} \cup \{z \mid |z| = 1, \text{Im}(z) \geq 0\}$
 $\Delta_R = \{z \mid |z| = 1, \text{Im}(z) \leq 0\}$ כנ"ל. לכן ברור שלכל פונקציה $f(z)$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{\Delta_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(z) dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx \quad (\text{א})$$

פתרון: ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (לפי השוואה עם $\frac{1}{x^2}$) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \frac{1}{(z - (1 + 2i))^2(z - (1 - 2i))^2}$$

לכן אם R מספיק גדול (נניח $R > 5$) אז כל הסינגולריות שיש לפונקציה בחצי המישור העליון (במקרה הזה, $1 + 2i$) נמצאים כבר בתוך Γ_R ולכן לפי משפט השאריות

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z - (1 + 2i))^2(z - (1 - 2i))^2} dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 1 + 2i)$$

כמובן ש $1 + 2i$ הוא קוטב מסדר 2 ולכן אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z - (1 - 2i))^2}$$

השארית היא

$$\text{Res}(f(z), 1+2i) = \lim_{z \rightarrow 1+2i} g'(z) = \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{-2}{(z - (1-2i))^3} = \frac{-2}{-64i} = -\frac{i}{32}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \frac{-i}{32} = \frac{\pi}{16}$$

לכל $R > 5$. כעת נעבור לאינטגרל

$$\int_{\Delta_R} f(z) dz = \int_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz$$

נוכיח שכאשר $R \rightarrow \infty$ האינטגרל שואף ל 0. נתחיל ממה שהוא די ברור, ש $f(z)$ מתנהג בערך כמו $\frac{1}{R^4}$ וליתר דיוק:
נשים לב ש

$$|z^2 - 2z + 5| \geq ||z|^2 - |-2z + 5|| = |R^2 - |-2z + 5||$$

אבל

$$|-2z + 5| \leq 2|z| + 5 = 2R + 5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים

$$R^2 \geq 2R + 5 \geq |-2z + 5|$$

נקבל ש

$$|z^2 - 2z + 5| \geq |R^2 - |-2z + 5|| = R^2 - |-2z + 5| \geq R^2 - 2R - 5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (שבהם בפרט $R^2 - 2R - 5$ חיובי)

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 2R - 5)^2}$$

נזכור שהאורך של Δ_R הוא πR ולכן לפי משפט על חסם ML מתקיים ש

$$\left| \int_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 2R - 5)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

ולכן אם נזור לשווייון

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{\Delta_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(z) dz$$

ונפעיל $\lim_{R \rightarrow \infty}$ נקבל ש

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = \frac{\pi}{16}$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx = \frac{\pi}{16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx \quad (\text{ב})$$

פתרון: נשתמש בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (נניח, לפי מבחן דירכלה כי קל לבדוק ש $\frac{x}{x^2 - 2x + 2}$ מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$$

ואז עבור $z \in \mathbb{R}$ מתקיים ש

$$\frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} = \operatorname{Re} f(z)$$

כלומר

$$\int_{-R}^R \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_{-R}^R \operatorname{Re} f(z) dz = \operatorname{Re} \int_{-R}^R f(z) dz$$

(השייון האחרון נכון כי האינטגרל על תחום ממשי) כלומר הערך המבוקש הוא

$$\operatorname{Re} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz$$

את זה נחשב בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב ש

$$z^2 - 2z + 2 = (z - (1 + i))(z - (1 - i))$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (כך ש $1+i$ נמצא בתוך Γ_R) אנחנו יודעים לפי משפט השאריות ש

$$\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(z - (1+i))(z - (1-i))} dz = 2\pi i \frac{(1+i)e^{i-1}}{2i} = \pi(1+i)e^{i-1}$$

כעת לפי משפט ז'ורדן

$$\left| \int_{\Delta_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz \right| \leq \pi \max_{z \in \Delta_R} \frac{z}{z^2 - 2z + 2}$$

וכמו קודם בגלל ש $\left| \frac{z}{z^2 - 2z + 2} \right|$ הוא בערך $\frac{1}{R}$ נקבל שכאשר R שואף ל ∞ גם האינטגרל שלנו שואף ל 0. ולכן

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx &= \operatorname{Re} \pi(1+i)e^{i-1} = \frac{\pi}{e} \operatorname{Re}((1+i)e^i) \\ &= \frac{\pi}{e} (\cos 1 - \sin 1) \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx \quad (ג)$$

פתרון: ראשית נשים לב שהפונקציה המדוברת זוגית ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \frac{1 + \cos 2x}{(1+x^2)^2} dx$$

והאינטגרל בבירור מתכנס ולכן נחשב את

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1 + \cos 2x}{(1+x^2)^2} dx$$

בשיטה הרגילה

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$$

אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$$

אז נקבל

$$g'(z) = \frac{-2}{(z+i)^3}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} dz = 2\pi i g'(i) = 2\pi i \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-4\pi i}{-8i} = \frac{\pi}{2}$$

שוב קל לוודא ש

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Delta_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = 0$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

בעוד שאת

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(1+x^2)^2} dx$$

נחשב עם הפונקציה

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{(1+z^2)^2} = \frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

כרגיל נגדיר

$$g(z) = \frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}$$

ואז

$$g'(z) = \frac{2ie^{2iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{2iz}}{(z+i)^4}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} dz = 2\pi i g'(i) = 2\pi i \frac{2ie^{-2}(-4) - 4ie^{-2}}{16} = e^{-2} \frac{16\pi + 8\pi}{16} = \frac{3\pi}{2e^2}$$

כמו כן אם $|z| = R$ אז עבור ערכי R מספיק גדולים

$$|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$$

ולכן

$$\left| \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2}$$

ואז לפי הלמה של ז'ורדן מתקיים ש

$$|\int_{\Delta_R} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2} dz| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ולכן זה מתכנס ל 0 כאשר R שואף לאינסוף. לסיכום

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2} dz = \frac{3\pi}{2e^2}$$

1

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2e^2} \right) = \frac{\pi}{8} \left(1 + \frac{3}{e^2} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta \quad (\text{ד})$$

פתרון: לפי הזהות $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ נקבל ש

$$\frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} = \frac{1}{2} \frac{1+\cos 6\theta}{5-4\cos 2\theta}$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 6\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta$$

נבצע הצבה

$$\begin{aligned} t &= 2\theta \\ dt &= 2d\theta \end{aligned}$$

ונקבל

$$\frac{1}{4} \int_0^{4\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t} dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t} dt + \frac{1}{4} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t} dt$$

אבל נשים לב שאם מציבים

$$s = t + 2\pi$$

מקבלים ש

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t} dt = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1+\cos(3s-6\pi)}{5-4\cos(s-2\pi)} ds = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1+\cos(3s)}{5-4\cos(s)} ds$$

ולכן

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt + \frac{1}{4} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt$$

עכשיו נבצע את ההצבה המרוכבת הטריגונוטרית

$$z = e^{it}$$

$$dz = iz dt$$

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\cos 3t = \frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}$$

וקיבלנו את האינטגרל

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{1 + \frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}}{5 - 2(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} &= \frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{z^3 + 2 + \frac{1}{z^3}}{5 - 2(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{z} = \frac{i}{4} \int_{|z|=1} \frac{z^3 + 2 + \frac{1}{z^3}}{2z - 5 + \frac{2}{z}} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{i}{4} \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 2z^3 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3} dz \end{aligned}$$

זה הזמן לחפש את הסינגולריות של הפונקציה שלנו. ברור שיש סינגולריות ב $z = 0$. כמו כן יש סינגולריות ב

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

שזה בעצם הנקודות

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}, 2$$

הנקודה 2 נמצאת מחוץ למעגל ולכן היא לא משנה לנו. אבל $\frac{1}{2}$ היא סינגולריות שצריך להתחשב בה.

נשתמש במשפט השאריות. ברור ש $\frac{1}{2}$ היא קוטב מסדר 1 (היא לא מאפסת את המונה). ולכן

$$\text{Res}\left(\frac{z^6 + 2z^3 + 1}{2(z - \frac{1}{2})(z - 2)z^3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(\frac{1}{2})^6 + 2(\frac{1}{2})^3 + 1}{2(\frac{1}{2} - 2)(\frac{1}{2})^3} = \frac{\frac{1}{64} + \frac{1}{4} + 1}{-\frac{3}{8}} = -\frac{81}{24} = -\frac{27}{8}$$

נרצה לחשב גם שארית ב $z = 0$. נשים לב ש

$$\frac{z^6 + 2z^3}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}$$

היא פונקציה אנליטית בסביבת 0 (או ליתר דיוק, הסינגולריות ב $z = 0$ היא סליקה) ולכן

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^6 + 2z^3 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}, 0\right) = \frac{g''(0)}{2}$$

כאשר

$$g(z) = \frac{1}{2z^2 - 5z + 2}$$

היות ש

$$g'(z) = -\frac{4z - 5}{(2z^2 - 5z + 2)^2}$$

$$g''(z) = -\frac{4(2z^2 - 5z + 2)^2 - 2(2z^2 - 5z + 2)(4z - 5)^2}{(2z^2 - 5z + 2)^4}$$

ולכן

$$g''(0) = -\frac{16 - 4 \cdot 25}{16} = -\frac{84}{16} = \frac{21}{4}$$

כלומר

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}, 0\right) = \frac{21}{8}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$\frac{i}{4} \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 2z^3 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3} dz = \frac{i}{4} 2\pi i \left(\frac{21}{8} - \frac{27}{8}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{6}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

וזה האינטגרל המבוקש

3. (אין חובה להגיש תרגיל זה) הראו כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

הדרכה: הביטו באינטגרל

$$\int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz$$

כאשר C_N הוא ריבוע שמרכזו ב 0 ואורך צלעו $2N + 1$.
פתרון: נסתכל בפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin \pi z}$$

הסינגולריות שלה הם בנקודות $\mathbb{Z}$. אם z שלם שאינו 0 אז זה קוטב מסדר 1 (כי זו לא סינגולריות של z^2 והשלמים לא מאפסים את הנגזרת של $\sin \pi z$).

נחשב שארית עבור $z = k \neq 0$: אפשר לסמן

$$g(z) = \frac{1}{z^2}$$

ו

$$h(z) = \sin \pi z$$

ואז לפי נוסחא מוכרת

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 \sin \pi z}, k\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, k\right) = \frac{g(k)}{h'(k)} = \frac{1}{k^2 \pi \cos \pi k} = \frac{(-1)^k}{\pi k^2}$$

עכשיו, הנקודה $z = 0$ היא קוטב מסדר 3. כמובן שהשארית של

$$\frac{1}{z^2 \sin \pi z}$$

בנקודה $z = 0$ היא המקדם של z^1 בפיתוח לורן של

$$\frac{1}{\sin \pi z}$$

עכשיו, הטור לורן נראה ככה:

$$\frac{1}{\sin \pi z} = a_{-1} \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

ולכן

$$1 = \left(a_{-1} \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right) \sin \pi z = \left(a_{-1} \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right) \left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \dots\right)$$

לפי השוואת מקדמים נקבל:

השוואה של z^0 :

$$1 = \pi a_{-1}$$

כלומר

$$a_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

השוואה של z^1 :

$$0 = \pi a_0$$

ולכן

$$a_0 = 0$$

השוואה של z^2 :

$$0 = -\frac{a_{-1}\pi^3}{3!} + \pi a_1$$

כלומר

$$a_1 = \frac{\pi}{6}$$

כלומר

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2 \sin \pi z}, 0\right) = \frac{\pi}{6}$$

עכשיו, לפי משפט השארית נקבל ש

$$\int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz = 2\pi i \left(\frac{\pi}{6} + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{\pi k^2} + \sum_{k=-1}^{-N} \frac{(-1)^k}{\pi k^2} \right)$$

כלומר

$$\int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz = 2\pi i \left(\frac{\pi}{6} + 2 \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{\pi k^2} \right)$$

כעת אם נצליח להוכיח ש

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz = 0$$

זה יגרור ש

$$\frac{\pi}{6} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k^2} = 0$$

כלומר

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

כלומר

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

אם כך כדי לסיים נשאר רק להוכיח כי

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz = 0$$

נבצע זאת כרגיל באמצעות חסם ML . אורך הריבוע הוא

$$4 \cdot (2N + 1) = 8N + 4$$

כמו כן אם $z \in C_N$ אז

$$|z|^2 \geq N^2$$

ולכן

$$\left| \frac{1}{z^2} \right| \leq \frac{1}{N^2}$$

לכן ברור שכדי לסיים צריך רק להראות שהחל מ N מסוים הערך

$$\left| \frac{1}{\sin \pi z} \right|$$

כאשר $z \in C_N$ הוא חסום. כמובן שמספיק להראות ש

$$\left| \frac{1}{\sin^2 \pi z} \right|$$

חסום. היות ש

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

אז

$$\begin{aligned} |\sin \pi(x + iy)|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x \cosh^2 y + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y \end{aligned}$$

אז צריך להוכיח ש

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}$$

חסום על הריבוע הרלוונטי. נראה בנפרד שהוא חסום על קווים אנכיים וקויים אופקיים. על קו אופקי מתקיים ש

$$y = \pm(N + \frac{1}{2})$$

ולכן

$$\sinh^2(\pm\pi(N + \frac{1}{2})) = \sinh^2(\pi(N + \frac{1}{2})) \rightarrow \infty$$

ולכן

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x + \sinh^2(N + \frac{1}{2})\pi} \leq \frac{1}{\sinh^2(N + \frac{1}{2})\pi} \rightarrow 0$$

ולכן החל מ N מסוים הביטוי חסום. עבור קווים אנכיים, $x = \pm(N + \frac{1}{2})$, ולכן

$$\sin^2 \pi x = \sin^2(\pm(\pi N + \frac{\pi}{2})) = \sin^2(\pi N + \frac{\pi}{2}) = 1$$

ולכן

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x + \sinh^2(N + \frac{1}{2})\pi} \leq \frac{1}{\sin^2 \pi x} = 1$$

כלומר גם כאן חסום ובזה סיימנו.

תרגיל 12 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

כאשר

$$f(z) = e^{2z}(z-1)^3(z-2)^4(z-3)^{-5}(z-5)^{-3}$$

2. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש למשוואה

$$z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4} = 0$$

(א) בטבעת $\frac{1}{4} < |z| < 1$?

(ב) בתחום $|z| > 1$?

3. תהי $g(z)$ פונקציה אנליטית ב $\{z \mid |z| \leq 1\}$ המקיימת כי $|g(z)| < 1$ על המעגל $|z| = 1$. הוכיחו כי קיימת z אחת ויחידה בכדור היחידה שבה $g(z) = z$.

4. יהי $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ פולינום. הוכיחו כי חייבת להיות נקודה z עם $|z| = 1$ שבה $|p(z)| \geq 1$.

תרגיל 12 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

כאשר

$$f(z) = e^{2z}(z-1)^3(z-2)^4(z-3)^{-5}(z-5)^{-3}$$

פתרון: לפי עקרון הארגומנט סופרים את האפסים והקטבים כולל ריבוי

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 3 + 4 - 5 = 2$$

$z = 1, 2, 3$ כי $z = 5$ מחוץ לתחום המדובר.

2. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש למשוואה

$$z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4} = 0$$

(א) בטבעת $\frac{1}{4} < |z| < 1$ נגדיר $f(z) = \frac{1}{4}$ ו $g(z) = z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}$. ואז על המעגל $|z| = \frac{1}{4}$ מתקיים

$$|g(z) - f(z)| = |z^3 - 2z^2| \leq \frac{1}{64} + 2 \cdot \frac{1}{16} < \frac{1}{4} = |f(z)|$$

ולכן לפי משפט רושה, אין אפסים בתוך $|z| < \frac{1}{4}$. גם אין אפסים על $|z| = \frac{1}{4}$ כי במקרה זה

$$|z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}| \geq \frac{1}{4} - |z^3 - 2z^2| > 0$$

מצד שני, על $|z| = 1$ מתקיים ש

$$|z^3 + \frac{1}{4}| \leq \frac{5}{4} < 2 = |2z^2|$$

ולכן לפי משפט רושה לפולינום

$$z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}$$

יש שני אפסים בתוך העיגול $|z| < 1$ ובסך הכל יש שני אפסים בטבעת $\frac{1}{4} < |z| < 1$

(ב) בתחום $|z| > 1$?

פתרון: לפולינום אין אפסים על $|z| = 1$ כי

$$|z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}| \geq |2z^2| - |z^3 + \frac{1}{4}| > 0$$

בכל $\mathbb{C}$ יש 3 אפסים לפי המשפט היסודי של האלגברה ולכן לפי סעיף א' בתחום הנתון יש אפס אחד בדיוק.

3. תהי $g(z)$ פונקציה אנליטית ב $\{z \mid |z| \leq 1\}$ המקיימת כי $|g(z)| < 1$ על המעגל $|z| = 1$. הוכיחו כי קיימת z אחת ויחידה בכדור היחידה שבה $g(z) = z$.
פתרון: נשתמש במשפט רושה ונגדיר $f(z) = -z$ אז לפי הנתון על עיגול היחידה

$$|g(z)| \leq 1 = |-z|$$

ולכן מספר האפסים של $-z$ בתוך כדור היחידה הוא כמספר האפסים של $g(z) - z$ דהיינו 1.

4. יהי $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ פולינום. הוכיחו כי חייבת להיות נקודה z עם $|z| = 1$ שבה $|p(z)| \geq 1$.
פתרון: נניח בשלילה שלכל נקודה z עם $|z| = 1$ מתקיים $|p(z)| < 1$. ונגדיר $f(z) = -z^n$ אז מתקיים שעל מעגל היחידה

$$|g(z)| < |f(z)|$$

ולכן מספר האפסים של $-z^n$ הנתון מעגל היחידה כמספר האפסים של

$$g(z) + f(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

אבל ל $-z^n$ יש n אפסים בתוך מעגל היחידה ול $g(z) + f(z)$ יש לכל היותר $n-1$ אפסים בכל $\mathbb{C}$ (כי הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$) וזאת סתירה.

תרגיל בית מרוכבות - העתקות מביוס

20 ביוני 2016

1. תהי $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ העתקת מביוס. מצאו תנאי מספיק והכרחי על a, b, c, d כך ש ϕ תעתיק את חצי המישור השמאלי לעצמו.
2. לאלו ערכים של z_0 הפונקציה $\phi(z) = \frac{z-1}{z-z_0}$ מעתיקה את עיגול היחידה לעצמו?
3. יהי $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. מהי התמונה של הישר הממשי תחת ההעקה $\phi(z) = \frac{zw+1}{z-w}$?
4. עבור אלו $k \in \mathbb{R}$ תמונת המעגל $|z-1| = k$ תחת ההעקה $\phi(z) = \frac{z-3}{1-2z}$ היא ישר? מצאו את משוואת הישר.

וכן. (2) הן $z \mapsto -1/z$ וכן (1).

כלומר $\phi_1(\phi_2) = \frac{az+b}{cz+d}$ שכן $k=1,2$ $\phi_k(z) = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

וכן $z \mapsto -1/z$

וכן $z \mapsto -1/z$ וכן $z \mapsto -1/z$

כלומר $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b-c+d & -a-b+c+d \\ -a+b-c+d & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

כלומר (2) הן $z \mapsto -1/z$ וכן $z \mapsto -1/z$

$$|(\bar{b}-\bar{d})(a+c) + (\bar{a}-\bar{c})(b+d)| + 2|ad-bc|$$

$$\leq (a+c)(\bar{b}-\bar{d}) + (\bar{a}+\bar{c})(b+d)$$

$$z = \frac{\lambda w + 1}{\lambda + w} \quad \text{שכן} \quad \lambda = \frac{z w + 1}{z - w} \quad \text{וכן (3)}$$

כלומר $z \mapsto -1/z$

$$\frac{\lambda w + 1}{\lambda + w} = \frac{\bar{\lambda} \bar{w} + 1}{\bar{\lambda} + \bar{w}}$$

$$|\lambda|^2 - \lambda \bar{\alpha} - \bar{\lambda} \alpha + 1 = 0$$

כל

$$\alpha = \frac{|w|^2 + 1}{\bar{w} - w}$$

וכן

$$|\lambda - \alpha|^2 = |\alpha|^2 - 1$$

$$|\alpha|^2 - 1 = \left(\frac{|w|^2 + 1}{|\bar{w} - w|} \right)^2$$

וכן

וכן

כלומר $z \mapsto -1/z$ וכן $z \mapsto -1/z$

$$d(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{is a Möbius transformation} \quad (2)$$

$$z = \frac{wd-b}{a-cw} \quad w = \dots$$

$$|z| < 1 \Leftrightarrow |z|^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow |wd-b|^2 < |a-cw|^2$$

$$\Leftrightarrow |w|^2(|d|^2 - |c|^2) - 2\operatorname{Re}\{(b\bar{d} - \bar{a}c)w\} + |b|^2 - |a|^2 < 0 \quad (I)$$

If $|d| = |a|$ then $|c| < |d|$ and $|c| < |d|$ is true. If $|d| > |a|$ then $|c| > |d|$ is true.
 If $|d| = |a|$ then $|c| < |d|$ and $|c| < |d|$ is true.
 If $|d| > |a|$ then $|c| > |d|$ is true.
 If $|d| < |a|$ then $|c| < |d|$ is true.
 If $|d| = |a|$ then $|c| < |d|$ and $|c| < |d|$ is true.
 If $|d| > |a|$ then $|c| > |d|$ is true.
 If $|d| < |a|$ then $|c| < |d|$ is true.

$$\underbrace{\left| w - \frac{b\bar{d} - \bar{a}c}{|d|^2 - |c|^2} \right|}_{w_0}^2 < \underbrace{\frac{|a\bar{d} - b\bar{c}|^2}{(|d|^2 - |c|^2)^2}}_{r_0^2}$$

$$|w_0| + r_0 \leq 1$$

$$\frac{|b\bar{d} - \bar{a}c|}{|d|^2 - |c|^2} + \frac{|a\bar{d} - b\bar{c}|}{|d|^2 - |c|^2} \leq 1$$

$$z = \frac{w+3}{1+2w}$$

$$\text{s/c } w = \frac{z-3}{1-2z}$$

o.k (4)

$$\left| \frac{w+3}{1+2w} - 1 \right| = k$$

$$\text{--- } 1.2 / 1010 \quad |z-1| = k$$

$$|w+3-(1+2w)| = k|1+2w|$$

216

$$|2-w| = 2k|w+\frac{1}{2}|$$

1/k

$$\text{--- } 1.2 / 1010 \quad k = \frac{1}{2} \quad \text{--- } 1.2 / 1010 \quad \text{by } 1010$$

$$|2-w| = |w+\frac{1}{2}| \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$