

שיטות נומריות

מספר קורס: 89-276

מועד: א'

מרצה: פרופ' נתן נתניהו

תשסח

תאריך: 21.08.2008, כ' באב

זמן: שיעורים וחצי

הנחיות:

1. מותר השימוש בדף אחד בלבד של רשימות אישיות ובמחשבון כיס.
 2. חל איסור מוחלט על שימוש כלשהו בטלפונים סלולריים ו/או בכל אמצעי שידור/קליטה אחר בזמן הבחינה.
 3. יש לפתור את כל 5 השאלות.
 4. כל השאלות שוות בערך.
 5. בהצלחה!
- =====

שאלה 1:

נתונה הפונקציה $f(x, y) = \ln(x + 3y^2 + 2)$ עבור $x, y > 0$.

א. מצא חסם עליון על השגיאה האבסולוטית $|\Delta f|$, ביחס לחישוב מדויק, עבור $x = 3$ ו- $y = 3$, אם ידוע כי השגיאות האבסולוטיות ב- x ו- y הן $|\Delta x| = |\Delta y| = 0.1$. (השתמש בנוסחא שניתנה במהלך התרגולים).

ב. הנח כי $x = 3$ (מדויק) והסתמך על מספר המצב (condition number), כפונקציה של y בלבד, לחישוב $|\Delta f|$ עבור $y = 3$ ו- $|\Delta y| = 0.1$.

ג. חזור על סעיף ב' עבור $y = 3$ (קבוע) לחישוב $|\Delta f|$ על-סמך מספר המצב, כפונקציה של x בלבד, עבור $x = 3$ ו- $|\Delta x| = 0.1$.

ד. מה הקשר בין התוצאה שהתקבלה בסעיף א' והתוצאה עבור סעיפים ב' ו-ג'?

שאלה 2:

נתונה הפונקציה $f(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3$.

א. מצא באופן אנליטי את שורשי הפונקציה.

ב. מהי איטרצית ניוטון-רפסון (Newton-Raphson) לחישוב שורשי הפונקציה הנתונה באופן נומרי? הסבר באופן מדויק ומפורט.

ג. חשב (עד) 7 איטרציות לפי ניוטון- רפסון עבור $x_0 = 0.7$ ו(עד) 7 איטרציות עבור $x_0 = 0.8$. האם ההתכנסות היא לאותו השורש או לשורשים שונים ? הסבר באופן מדויק ומפורט את התנהגות הפרוצדורה הנומרית עבור נקודות ההתחלה השונות. (רמז: העזר באיור עקרוני של גרף הפונקציה $f(x)$).

ד. האם ההתכנסויות בסעיף הקודם מתבצעות באותו הקצב ? הסבר באופן מדויק ומפורט, תוך הסתמכות על יחסי השגיאות בין איטרציות עוקבות. מה לדעתך אמור להיות סדר ההתכנסות (התיאורטי) עבור $x_0 = 0.7$ ועבור $x_0 = 0.8$? מדוע?

שאלה 3 :

נתונה מערכת המשוואות הליניאריות :

$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2$$

$$2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

שפתרונה

$$x_1 = 2.6 \quad x_2 = -3.8 \quad x_3 = -5.0$$

(וודא!)

א. פתור את המערכת הנ"ל ע"י אלימינציה לפי גאוס (Gauss elimination) ללא pivoting. השתמש בדיוק של 4 ספרות עשרוניות ונקודה צפה (floating point). יש לעגל באופן מתאים לאחר כל אופרציה.

ב. חזור על סעיף א' תוך שימוש ב- pivoting חלקי. עמוד על הבדלי הדיוק בין התוצאות השונות, והדגם את פירוק מטריצת המערכת (לאחר הפרמוטציות שעברה) למכפלת מטריצות L ו- U בהתאם למה שנלמד בהרצאות.

שאלה 4 :

בהתייחס לבעיית האינטרפולציה שנלמדה במהלך ההרצאות, קרי למציאת פונקציה פולינומיאלית (או אוסף של פונקציות פולינומיאליות במקרה של spline) כך ש-

$$p_n(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

עבור ערכים מספריים $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, ענה על הסעיפים הבאים :

א. בדומה לפונקציה ה-spline שפותחה בהרצאות עבור פולינומים ממעלה שלישית (cubic spline), פתח פונקציה spline $g(x)$ עבור פולינומים ממעלה שנייה. לנוחיותך, העזר בנוטציה הבאה:

$$g(x) = g_i(x) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

באשר $g_i(x)$ מוגדרת באינטרבל $[x_i, x_{i+1}]$ ע"י:

$$g_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

נסח את האילוצים השונים הדרושים לקביעת מקדמי הפולינומים $g_i(x)$. מה מספר הנעלמים ודרגות החופש במקרה זה? הגדר $S_i = g'_i(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), ובטא את המקדמים a_i, b_i, c_i באמצעות S_i, h_i ו- y_i , כאשר $S_n = g'_n(x_n)$. מהי סיבוכיות זמן החישוב של S_i במקרה זה? האם יעיל יותר לחשב משתנים אלו ישירות או בשיטת האלימינציה לפי גאוס/פירוק LU? נמק במדויק.

ב. הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

שגיאות האינטרפולציה המתקבלות ע"י שימוש בפונקציות בסיס x^i , שיטת לגראנז', שיטת חלוקת ההפרשים של ניוטון ושיטת ה-spline זהות. נמק את תשובתך!

שאלה 5:

דרוש לקרב את הפונקציה $f(x) = \cos x$ באינטרבל $[0, \pi]$ ע"י פולינום ממעלה 2.

א. בצע את האפרוקסימציה המבוקשת ע"י פיתוח לפי טור טיילור (סביב $x = 0$). מהי שגיאת האפרוקסימציה המירבית על-פני האינטרבל הנתון?

ב. בצע את האפרוקסימציה המבוקשת ע"י מזעור ריבועי הפרשים (least squares) על-פני האינטרבל הנתון. הסבר באופן מדויק ומפורט את הפיתוח עבור מקדמי הפולינום המבוקש $r_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ במקרה זה, וחשב את השגיאה המירבית על-פני האינטרבל הנתון.

הערה: העזר בנוסחאות הבאות

$$\int (x \cos x) dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int (x^2 \cos x) dx = x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x + C$$

באשר C הוא קבוע כלשהו.

סקיצת פתרון לשאלה 2 (סקיצה בלבד):

א.

$$x^5 - 6x^4 + 5x^3 = 0$$

$$x^3(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$x^3(x-1)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 5$$

ב.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$x_n - \frac{x_n^5 - 6x_n^4 + 5x_n^3}{5x_n^4 - 24x_n^3 + 15x_n^2}$$

ג. עבור 0.7:

$$0.7, -0.6892, -0.4939, -0.3495, -0.2444, -0.169, -0.1158, -0.0788$$

התכנסות ל 0.

עבור 0.8:

$$0.8, 1.472, 1.2138, 1.0686, 1.0102, 1$$

התכנסות ל 1.

התכנסות לשורשים שונים מכיון שיש נק' קיצון בין 0.7 ל 0.8.

ד. לא, ההתכנסות ל 1 הרבה יותר מהירה, מכיון ש 1 הוא שורש פשוט וכפי שלמדנו ההתכנסות של NR ריבועית עבור שורש פשוט. 0, לעומת זאת, הוא שורש מריבוי 3 ולכן ההתכנסות היא ליניארית עם קצב התכנסות 2/3.

ניקוד: 5 נקודות לכל סעיף.

ניקוד לשאלה 3:

דירוג גאוס 4

pivoting 5

עיגול נכון 5

פירוק LU 3

התייחסות למטריצה האלמנטרית P 2

התייחסות להבדלי הדיוק בין הסעיפים (עם שחלוף יותר מדויק כי... וכו') 1

3 rsk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0.6667 & 0.3333 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$m_{21} = 0.3333$$

$$m_{31} = 0.1667$$

.10

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \end{array} \right)$$

$$m_{32} = 16670$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \\ 0 & 0 & 5555 & -27790 \end{array} \right)$$

$$x_3 = -5.003$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 1.335$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0.667 & 0.333 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m_{21} = 0.3333 \\ m_{31} = 0.1667 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{R2} \\ \text{R3} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m_{32} = 5.999 \cdot 10^{-5} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \\ 0 & 0 & -0.3332 & 1.667 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_3 = -5.003}$$

$$1.667X_2 - 1.333(-5.003) = 0.3334$$

$$\quad \quad \quad \cdot 6.669 \quad \quad \quad \underline{8.888} \quad \quad \quad -6.336$$

$$\boxed{X_2 = -3.801}$$

$$6X_1 + 2(-3.801) + 2(-5.003) = -2$$

$$\quad \quad \quad -7.602 \quad \quad \quad -10.01$$

$$6X_1 = -17.612 \Rightarrow \boxed{X_1 = -2.935}$$

$$U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 1.667 & -1.333 \\ 0 & 0 & -0.3332 \end{pmatrix} \quad : LU \quad 7/72$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.333 & 1 & 0 \\ 0.1667 & 5.999 \cdot 10^{-5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$$

שאלה 4

א. הדרגות הן:

$$g_i(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n-1 \quad - \quad n \text{ משוואות}$$

$$g_{n-1}(x_n) = y_n \quad - \quad \text{משוואה אחת}$$

$$g'_i(x_i) = g'_{i+1}(x_{i+1}) \quad \forall i = 0, \dots, n-2 \quad - \quad n-1 \text{ משוואות} \quad \text{סיבוכיות: } O(n)$$

$$g''_i(x_{i+1}) = g''_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{עקמומיות קצובה:}$$

$$g_i(x_{i+1}) = g_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{רציפות:}$$

בסה"כ קיבלנו $4n-2$ משוואות. עם הנדעמים a_i, b_i, c_i ($i=0, \dots, n$) נחזיק $3n+3$ פרמטרים חופשיים.

מתקיים:

$$g(x_i) = a_i(x_i - x_i)^2 + b_i(x_i - x_i) + c_i \Rightarrow c_i = g(x_i) = y_i \Rightarrow \underline{c_i = y_i}.$$

$$g'(x_i) = 2a_i(x_i - x_i) + b_i \Rightarrow b_i = g'(x_i) = S_i \Rightarrow \underline{b_i = S_i}.$$

$$g'_i(x_{i+1}) = g'_{i+1}(x_{i+1}) \Rightarrow 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i = S_{i+1} \Rightarrow \underline{a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{2h_i}}.$$

פירוביות למן החישוב: מאשר, אין צורך להשתמש ב- y_i, x_i, h_i כיוון שאילו הם שמושה משתנים סמליים. על ידי כך שמושה משתנים אחרים a_i, b_i, c_i (בתצורה Cubic Spline) בוחם מחשבים 4 משתנים. בתורה סך כל משוואות מתוק $4n-2$ ופרמטרים $3n+3$ משוואות סמליות חסרות משתנים יקח $O(n^3) \leftarrow O(3n^3)$.

ב. לא נכון. השענו הראשונה להיות, סיבוכיות פולינום יחיד מעלה רביעית חסומה ב- $O(n^4)$ נכון, ולכן כולן יתחילו את אורו הפולינום ולפי כך תהיה חסין אנוני השגיאה.

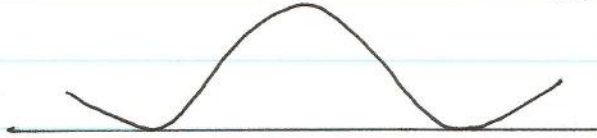
שיטת Cubic Spline שונה במקרה שביא מקרה אחר הפונ' לבחון בערכים מתקדמים של פולינומים שונים, והשגיאה בה טעה (אמורה להיות קטנה יותר).

הפונ' $f(x) = e^x$ נקבע את פולינום:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & e & e^2 & e \\ 1 & e^2 & e^4 & e^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_{22}=m_{32}=1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & e^2 & e-1 \\ 0 & e^2 & e^4 & e^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_{32}=e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & e^2 & e-1 \\ 0 & 0 & e^2e^3 & e-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 0.5 \\ a_2 = 0.05 \end{matrix}$$

$$p_2(x) = 0.05x^2 + 0.5x + 1$$

מחלקה 5: פונקציה



הפונקציה היא פולינום ממעלה

2 (המחלקה) פונקציה

הפונקציה היא פולינום ממעלה 2 (המחלקה) פונקציה

הפונקציה היא פולינום ממעלה 2 (המחלקה) פונקציה

5.1

הפונקציה היא פולינום ממעלה 2 (המחלקה) פונקציה

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \cos 0 - \sin 0(x-0) - \frac{\cos 0(x-0)^2}{2} \Rightarrow$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

הפונקציה היא פולינום ממעלה 2 (המחלקה) פונקציה

הפונקציה היא פולינום ממעלה 2 (המחלקה) פונקציה

$$E(x) = R_3(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-x_0)^3 = \frac{\sin c}{6} \cdot x^3$$

$$|E(x)| \leq 5.168$$

הפונקציה היא פולינום ממעלה 2 (המחלקה) פונקציה

הפונקציה היא פולינום ממעלה 2 (המחלקה) פונקציה

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^\pi 1 dx & \int_0^\pi x dx & \int_0^\pi x^2 dx \\ \int_0^\pi x dx & \int_0^\pi x^2 dx & \int_0^\pi x^3 dx \\ \int_0^\pi x^2 dx & \int_0^\pi x^3 dx & \int_0^\pi x^4 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^\pi \cos x dx \\ \int_0^\pi x \cos x dx \\ \int_0^\pi x^2 \cos x dx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} \\ \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \pi - \sin 0 \\ \pi \sin \pi + \cos \pi - 0 \sin 0 - \cos 0 \\ \pi^2 \sin \pi - 2\pi \sin \pi + 2\pi \cos \pi - 0^2 \sin 0 + 2 \sin 0 - 2 \cdot 0 \cos 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3.142 & 4.935 & 10.34 & 0 \\ 4.935 & 10.34 & 24.35 & -2 \\ 10.34 & 24.35 & 61.20 & -6.283 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_{21}=1.571, m_{31}=3.291} \begin{pmatrix} 3.142 & 4.935 & 10.34 & 0 \\ 0 & 2.587 & 8.106 & -2 \\ 0 & -2.679 & -18.94 & -6.283 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_{32}=-3.741} \begin{pmatrix} 3.142 & 4.935 & 10.34 & 0 \\ 0 & 2.587 & 8.106 & -2 \\ 0 & 0 & 11.38 & -13.74 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3.142 & 4.935 & 10.34 & 0 \\ 0 & 2.587 & 8.106 & -2 \\ 0 & 0 & 11.38 & -13.74 \end{pmatrix} \Rightarrow b_2 = -1.21 \Rightarrow b_1 = \frac{-2 + 8.106 \cdot 1.21}{2.587} = -0.774$$

$$\Rightarrow r_2(x) = -1.21x^2 + 3.017x - 0.7566$$

2008 מועד א' – שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x, y) = \ln(x + 3y^2 + 2)$ עבור $x, y > 0$.

- א. מצאו חסם עליון על השגיאה המוחלטת Δf , ביחס לחישוב המדויק, עבור $x = 3$ ו- $y = 3$, אם ידוע כי השגיאות המוחלטות ב- x וב- y הן $\Delta x = \Delta y = 0.1$ (השתמשו בנוסחא שניתנה במהלך התרגולים).
- ב. הניחו כי $y = 3$ (קבוע) לחישוב Δf על סמך מספר המצב כפונקציה של x בלבד, עבור $x = 3$ ו- $\Delta x = 0.1$.
- ג. חזרו על סעיף ב' עבור $x = 3$ (מדויק) והסתמכו על מספר המצב כפונקציה של y בלבד לחישוב Δf עבור $y = 3$ ו- $\Delta y = 0.1$.
- ד. מהו הקשר בין התוצאה שהתקבלה בסעיף א' והתוצאה שהתקבלה עבור סעיפים ב' ו-ג'?

פתרון

סעיף א'

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + 3y^2 + 2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6y}{x + 3y^2 + 2}$$

$$\Rightarrow \Delta f = \left| \frac{1}{3 + 27 + 2} \right| \cdot 0.1 + \left| \frac{18}{3 + 27 + 2} \right| \cdot 0.1 \approx 0.05937$$

סעיף ב'

כזכור, הנוסחה לחישוב מספר מצב הינה:

$$C_x = \left| \frac{\delta f}{\delta x} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \right| = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$$

ולכן:

$$C_x = \left| \frac{\frac{1}{x + 3y^2 + 2} \cdot x}{\ln(x + 3y^2 + 2)} \right| = \left| \frac{x}{x + 27 + 2} \right| = \left| \frac{x}{x + 29} \right| = \left| \frac{3}{\ln(32)} \right| \approx 0.0271$$

$$C_x = \left| \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \right| \Rightarrow \Delta f(x) = C_x \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \cdot |f(x)| \approx 3.131 \cdot 10^{-3}$$

סעיף ג'

$$C_y = \left| \frac{\frac{6y}{x+3y^2+2} \cdot y}{\ln(x+3y^2+2)} \right| = \left| \frac{\frac{6y^2}{3y^2+5}}{\ln(3y^2+5)} \right| = \left| \frac{\frac{6y^2}{3y^2+5}}{\ln(32)} \right| = \left| \frac{\frac{54}{32}}{\ln(32)} \right| \approx 0.4869$$

$$C_y = \left| \frac{\frac{\Delta f(y)}{f(y)}}{\frac{\Delta y}{y}} \right| \Rightarrow \Delta f(y) = C_y \cdot \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \cdot |f(y)| \approx 0.05625$$

סעיף ד'

סכום השגיאות המוחלטות שהתקבלו בסעיפים ב' ו-ג' שווה לתוצאה שהתקבלה בסעיף א' (השגיאה המוחלטת כאשר שקללנו את 2 המשתנים).

2009 מועד ב' – שאלה 1

לחישוב הערך המספרי $\sqrt{\frac{7}{8}}$ מוצע להשתמש בפונקציות הבאות:

$$f_1(x) = \sqrt{x}$$

$$f_2(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$f_3(x) = \sqrt{x-1}$$

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

- א. הסבירו כיצד לחשב את הערך הנדרש ע"י שימוש בפונקציות הנ"ל
 ב. בהנחה כי חישובי הפונקציות מתבצעים במדויק והשגיאה היחידה נובעת משגיאת הקלט x , איזו פונקציה עדיפה ביותר לשימוש לדעתכם? איזו פונקציה היא הגרועה ביותר? נמקו במדויק על סמך מספרי המצב של הפונקציות הנתונות

פתרון

סעיף א'

$$f_1\left(\frac{7}{8}\right) = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$f_2\left(\frac{49}{64}\right) = \sqrt[4]{\frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$f_3\left(\frac{15}{8}\right) = \sqrt{\frac{15}{8} - 1} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$f_4(8) = \sqrt{\frac{8-1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

סעיף ב'

נחשב את מספר המצב של כל פונקציה. כזכור, הנוסחא לחישוב מספר מצב היא:

$$C = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$$

ולכן:

$$C_1 = \left| \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right| = \left| \frac{x}{2x} \right| = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \left| \frac{\frac{x}{4\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x}} \right| = \left| \frac{x}{4\sqrt[4]{x^4}} \right| = \left| \frac{x}{4x} \right| = \frac{1}{4}$$

$$C_3 = \left| \frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} \right| = \left| \frac{x}{2(x-1)} \right| \rightarrow \left| \frac{\frac{15}{8}}{2\left(\frac{15}{8}-1\right)} \right| = \frac{15}{14} \approx 1.072$$

$$C_4 = \left| \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{x}}{2 \cdot \frac{x-1}{x}} \right| = \left| \frac{1}{2 \cdot (x-1)} \right| = \left| \frac{1}{2x-2} \right| \rightarrow \left| \frac{1}{2 \cdot 8 - 2} \right| \approx 0.07143$$

הפונקציה העדיפה ביותר לשימוש הינה f_4 . הפונקציה הגרועה ביותר לשימוש הינה f_3 . הסיבה לכך נובעת ממספר המצב. מספר המצב מבטא את היחס בין השגיאה היחסית בפלט לבין השגיאה היחסית בקלט.

נשים לב כי מספר המצב בפונקציה הרביעית הינו הקטן ביותר מבין שאר מספרי המצב שחישבנו (וכמו כן, הוא גם קטן מ-1). המשמעות היא ששינוי בקלט כמעט אינו משפיע על הפלט (ניתן לראות זאת אסימפטוטית מגרף הפונקציה C_4)

2008 מועד א' – שאלה 2

נתונה הפונקציה $f(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3$

- מצאו באופן אנליטי את שורשי הפונקציה.
- מהי איטרצית ניוטון-רפסון לחישוב שורשי הפונקציה הנתונה באופן נומרי?
- חשבו (עד) 7 איטרציות לפי שיטת ניוטון-רפסון עבור $x_0 = 0.7$ (עד) 7 איטרציות עבור $x_0 = 0.8$. האם ההתכנסות היא לאותו השורש או לשורשים שונים? הסבירו את התנהגות הפרוצדורה הנומרית עבור נקודות ההתחלה השונות.

ד. האם ההתכנסויות בסעיף הקודם מתבצעות באותו הקצב? הסבירו באופן מדויק ומפורט תוך הסתמכות על יחסי השגיאות בין איטרציות עוקבות. מהו לדעתכם אמור להיות סדר ההתכנסות (התיאורטי) עבור $x_0 = 0.7$ ועבור $x_0 = 0.8$ מדוע?

פתרון

סעיף א'

$$f(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3$$

$$f(x) = x^3(x^2 - 6x + 5)$$

$$f(x) = x^3(x - 5)(x - 1)$$

כלומר, מתקבלים בצורה אנליטית 3 שורשים:

$$x = 0, 1, 5$$

סעיף ב'

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 15x^2$$

$$\Rightarrow g(x) = x - \frac{x^5 - 6x^4 + 5x^3}{5x^4 - 24x^3 + 15x^2}$$

$$= x - \frac{x^3(x - 5)(x - 1)}{x^2(5x^2 - 24x + 15)}$$

$$= x - \frac{x(x - 5)(x - 1)}{5x^2 - 24x + 15} = \frac{5x^3 - 24x^2 + 15x - (x^3 - 6x^2 + 5x)}{5x^2 - 24x + 15} \\ = \frac{5x^3 - 24x^2 + 15x - x^3 + 6x^2 - 5x}{5x^2 - 24x + 15} = \frac{4x^3 - 18x^2 + 10x}{5x^2 - 24x + 15}$$

סעיף ג'

כמובן שיש להראות דרך מלאה ולא תשובות סופיות – זו סקיצה של פתרון כדי שתוכלו לבדוק את עצמכם:

עבור 0.7

$$x_i = 0.7, -0.6892, -0.4939, -0.3495, -0.2444, -0.169, -0.1158, -0.0788$$

עבור 0.8

$$x_i = 0.8, 1.472, 1.2138, 1.0686, 1.0102, 1$$

כלומר ניתן לראות שעבור ערך התחלתי 0.7 ההתכנסות היא לשורש 0 ועבור ערך התחלתי 0.8 ההתכנסות היא לשורש 1.

הסיבה לכך היא שקיימת נקודת קיצון בין הנקודות שבדקנו:

$$f'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 15x^2 = 0$$

$$x^2(5x^2 - 24x + 15) = 0 \Rightarrow x \approx 0.7387$$

הנקודות שהתחלנו את חיפוש השורש נמצאות מ-2 צדדים שונים של נקודת קיצון ולכן המשיקים פונים לצדדים שונים.

סעיף ד'

ההתכנסויות אינן מתבצעות באותו הקצב:

עבור 0.7:

0.984571
0.716628
0.707633
0.699285
0.691489
0.685207
0.680484

עבור 0.8:

2.36
0.451653
0.321794
0.148688

סדר ההתכנסות התיאורטי עבור 0.7 צריך להיות ליניארי ועבור 0.8 צריך להיות ריבועי. הסיבה לכך היא שניתן לראות בפתרון האנליטי מהסעיף הראשון כי 0 הוא שורש מריבוי 3 ואילו 1 הוא שורש פשוט.

2008 מועד א' – שאלה 3

נתונה מערכת המשוואות הליניאריות:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

שפתרונה המדויק: $x_1 = 2.6, x_2 = -3.8, x_3 = -5.0$ (וודאו!)

- א. פתרו את המערכת הנ"ל ע"י אלימינציה לפי גאוס ללא שחלוף. השתמשו בדיוק של 4 ספרות עשרוניות ונקודה צפה. יש לעגל באופן מתאים לאחר כל אופרציה.
- ב. חזרו על סעיף א' תוך שימוש בשחלוף חלקי. עמדו על הבדלי הדיוק בין התוצאות השונות והדגימו את פירוק מטריצת המערכת לאחר הפרמוטציות שעברה למכפלת מטריצות L ו-U בהתאם למה שנלמד בהרצאות.

פתרון

סעיף א'

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0.6667 & 0.3333 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{m_{21}=0.3333 \\ m_{31}=0.1667}} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 \\ 0 & 1.667 & -1.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1.667 \\ 0.3334 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{32}=1.6670}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \\ 0 & 0 & 5555 & -27790 \end{array} \right]$$

נבצע הצבה לאחור ונקבל:

$$x_3 = -5.003$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 1.334$$

סעיף ב'

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0.6667 & 0.3333 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[m_{31}=0.1667]{m_{21}=0.3333} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667 \end{array} \right] \xrightarrow{m_{32}=5.999 \cdot 10^{-5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334 \\ 0 & 0 & -0.3332 & 1.667 \end{array} \right]$$

שוב, נבצע הצבה לאחור ונקבל:

$$x_3 = -5.003$$

$$1.667x_2 - \underbrace{1.333(-5.003)}_{-6.669} = 0.3334 \Rightarrow x_2 = -3.801$$

$$6x_1 = 15.61 \Rightarrow x_1 = 2.602$$

פירוק LU למערכת:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1667 & 1 & 0 \\ 0.3333 & 5.999 \cdot 10^{-5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 1.667 & -1.333 \\ 0 & 0 & -0.3332 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$$

2009 מועד ב' – שאלה 4

יש לבצע אינטרפולציה בנקודות $x_0, x_1, \dots, x_n$ (נקודות שונות זו מזו על ציר המספרים הממשיים). מוצע להשתמש בפונקציה:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \cdot e^{jx}$$

כך ש- $P_n(x_i) = y_i$ כאשר $\{y_i | i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ הוא סט הערכים הנתון.

א. הוכיחו כי קיים סט אחד ויחיד של מקדמים $\{c_i | i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ עבור האינטרפולציה המבוקשת.

ב. הדגימו מספרית עבור $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ ו- $y_i = f(x_i)$ באשר $f(x) = e^x$. הסבירו את תשובתכם.

פתרון

סעיף א'

ראשית, נגדיר סימון חדש: $t = e^x$. לפיכך, מתקיים כי $t^j = e^{jx}$ ולכן נוכל להגדיר מחדש את הטור $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \cdot e^{jx} = \sum_{j=0}^n c_j \cdot t^j$$

כלומר, הבאנו את הבעיה לצורה של אינטרפולציה בפולינומים. הוכחנו כי קיים פולינום אינטרפולציה יחיד:

הוכחה

נתונות לנו $n + 1$ נקודות: $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. יהי $p(x)$ פולינום האינטרפולציה ממעלה לכל היותר n העובר ב- $n + 1$ הנקודות ומקיים $p(x_i) = y_i$ $0 \leq i \leq n$.

נניח בשלילה כי קיים פולינום נוסף $q(x)$ ממעלה לכל היותר n השונה מהפולינום $p(x)$ וגם הוא מקיים את הדרישה של האינטרפולציה, כלומר: $q(x_i) = y_i$ $0 \leq i \leq n$.

נגדיר פולינום חדש: $r(x) = p(x) - q(x)$. לכן מתקיים:

$$0 \leq i \leq n \quad r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0$$

הפולינום $r(x)$ חייב להיות פולינום ממעלה n לכל היותר (טריוויאלי). לפיכך, הפולינום היחיד ממעלה לכל היותר n וקיימים לו $n + 1$ שורשים חייב להיות פולינום ה-0!

לכן מתקיים:

$$r(x) = p(x) - q(x) \Rightarrow 0 = p(x) - q(x) \Rightarrow p(x) = q(x)$$

וזו בסתירה להנחה ש- $q(x) \neq p(x)$.

לפיכך, קיים סט מקדמים יחיד ל- $P_n(x)$.

סעיף ב'

נתונות נקודות הדגימה הבאות:

$$(0,1), (1, 2.718), (2, 7.389)$$

הצעה לפתרון:

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{x_0} & e^{2x_0} \\ 1 & e^{x_1} & e^{2x_1} \\ 1 & e^{x_2} & e^{2x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.718 & 7.389 \\ 1 & 7.389 & 54.60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.718 \\ 7.389 \end{bmatrix}$$

נפתור ונקבל כי התוצאה היא בערך:

$$P_2(x) = e^x$$

בנוסף, מכיוון שהוכחנו כי ניתן להגיע לצורה של אינטרפולציה בפולינומים ניתן גם לבצע אינטרפולציה לפי אחת מהשיטות האחרות של אינטרפולציה בפולינומים שראינו, עבור הפונקציות t^j , ולחזור בחזרה לפונקציות e^{jx} .

2009 מועד א' – שאלה 4

סעיף א'

נתונים ערכי הפונקציה $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ בנקודות שונות כמצוין בטבלה הבאה:

x	0.0	0.1	0.5	1.0
$f(x)$	0.0	0.099501	0.490099	0.606531

חשבו פולינומי אינטרפולציה ממעלה שלישית עבור הנתונים הנ"ל לפי שיטת $Lagrange$ ולפי שיטת ההפרשים המחולקים.

הערה: אין צורך להגיע לביטוי סופי עבור הפולינומים המבוטאים עפ"י השיטות הנ"ל.

סעיף ב'

חשבו את השגיאה בין $f(x)$ לפולינומי האינטרפולציה שפותרו בסעיף הקודם ב- $x = 0.75$. מה ניתן לומר על השגיאות הללו? נמק באופן מדויק ומפורט!

סעיף ג'

בהתייחס לבעיית האינטרפולציה שנלמדה במהלך ההרצאות במתכונתה הכללית, נניח כי ברצוננו להעריך פונקציה $f(x)$ רציפה כלשהי באמצעות פולינום אינטרפולציה $p_n(x)$ (קרי, לבצע אבלואציה) בנקודה x השונה מ- $x_0, x_1, \dots, x_n$. מהו סדר הגודל (כפונקציה של n) של סיבוכיות האבלואציה עבור אבלואציה המתבססת על אינטרפולציה ישירה (קרי, חישוב תחילה של מקדמי הפולינום הסופיים), אינטרפולציה לפי $Lagrange$ ואינטרפולציה לפי הפרשים מחולקים? נמקו במדויק.

פתרון

סעיף א'

עבור הפונקציה $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ והערכים הנתונים מאוסף נקודות הדגימה נקבל:

פולינום Lagrange

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^3 y_i l_i(x)$$

$$l_0(x) = \frac{(x - 0.1)(x - 0.5)(x - 1.0)}{(-0.1)(-0.5)(-1.0)}$$

$$l_1(x) = \frac{x(x-0.5)(x-1.0)}{0.1(0.1-0.5)(0.1-1.0)}$$

$$l_2(x) = \frac{x(x-0.1)(x-1.0)}{0.5(0.5-0.1)(0.5-1.0)}$$

$$l_3(x) = \frac{x(x-0.1)(x-0.5)}{(1.0-0.1)(1.0-0.5)}$$

$$\Rightarrow p_3(x) = 0 \cdot l_0(x) + 0.099501 \cdot l_1(x) + 0.490099 \cdot l_2(x) + 0.606531 \cdot l_3(x)$$

שיטת ההפרשים המחולקים

0	0.0	0.99501		
0.1	0.099501		-0.03703	
		0.976495		-0.789226
0.5	0.490099		-0.82626	
		0.232864		
1.0	0.606531			

ולכן, על פי מה שלמדנו:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \cdot \varphi_i(x)$$

כלומר:

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

ולכן לאחר הצבה נקבל:

$$p_3(x) = 0.99501x - 0.03703x(x - 0.1) - 0.789226x(x - 0.1)(x - 0.5)$$

סעיף ב'

$$f(x = 0.75) \approx 0.5661297$$

פולינום Lagrange יחזיר לנו את הערך:

$$p_3(x = 0.75) \approx 0.632018$$

ופולינום בשיטת ההפרשים המחולקים יחזיר לנו את הערך:

$$p_3(x = 0.75) \approx 0.632018$$

כלומר, השגיאה בשני המקרים הינה:

$$|f(x = 0.75) - p_3(x = 0.75)| \approx 0.0658883$$

מכיוון שהוכחנו כי פולינומי האינטרפולציה חייבים להיות זהים בשל משפט קיום היחידות, אזי ערכיהם זהים לכל x ומכאן שהשגיאות (ביחס לפונקציה המקורית $f(x)$) הינן זהות.

סעיף ג'

טייטה לפתרון:

השיטה הישירה

נקבל את מקדמי פולינום האינטרפולציה בצורה מפורשת. נצטרך לפתור n משוואות עם n נעלמים ולבצע הצבה ב- x נתון. פתרון מערכת המשוואות יתבצע בסיבוכיות זמן של $O(n^3)$ ע"י שימוש באלימינציה לפי גאוס.

פולינומי Lagrange

כל אחד ממכני הפולינומים (מתקבל ע"י הכפלת $n - 1$ גורמים) ניתן לחישוב בסיבוכיות זמן של $O(n)$. לכן, סה"כ סיבוכיות הזמן עבור המכנים היא: $O(n^2)$.

לגבי המונים, ניתן לחשב תחילה את הביטוי: $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ עבור ה- x הנתון. לאחר מכן, עבור כל מונה, נוכל לחלק את הערך הנ"ל ב- $(x - x_i)$ המתאים. סה"כ $O(n)$ פעולות.

לכן, סה"כ סיבוכיות הזמן היא: $O(n^2 + n) = O(n^2)$.

שיטת ההפרשים המחולקים

מציאת המקדמים השונים מהטבלה:

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \Rightarrow O(n^2)$$

ההצבה עצמה ניתנת לביצוע בסיבוכיות זמן של $O(n)$ (כיצד ניתן לבצע זאת?).

לכן, סה"כ סיבוכיות הזמן היא: $O(n^2 + n) = O(n^2)$.

2008 מועד א' – שאלה 5

דרוש לקרב את הפונקציה $f(x) = \cos x$ באינטרבל $[0, \pi]$ ע"י פולינום ממעלה 2.

- בצעו את האפרוקסימציה המבוקשת ע"י פיתוח לפי טור טיילור (סביב $x_0 = 0$). מהי שגיאת האפרוקסימציה המירבית על פני האינטרבל הנתון?
- בצעו את האפרוקסימציה המבוקשת ע"י מזעור ריבועי ההפרשים (least squares) על פני האינטרבל הנתון. הסבירו באופן מדויק ומפורט את הפיתוח עבור מקדמי הפולינום המבוקש הנתון. $r_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ במקרה זה וחשבו את השגיאה המירבית על פני האינטרבל הנתון.

הערה: היעזרו בנוסחאות הבאות:

$$\int (x \cos x) dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int (x^2 \cos x) dx = x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x + C$$

פתרון

סעיף א'

נפתח טור טיילור לפונקציה $f(x) = \cos x$. זהו טור ידוע והוא:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

ולכן במקרה שלנו:

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

שגיאת האפרוקסימציה במקרה זה:

$$R_4(x) = \left| f^{(4)}(\xi) \cdot \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{\pi^4}{24} \approx 4.0587$$

סעיף ב'

נפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{bmatrix} \int_0^\pi 1 \, dx & \int_0^\pi x \, dx & \int_0^\pi x^2 \, dx \\ \int_0^\pi x \, dx & \int_0^\pi x^2 \, dx & \int_0^\pi x^3 \, dx \\ \int_0^\pi x^2 \, dx & \int_0^\pi x^3 \, dx & \int_0^\pi x^4 \, dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\pi \cos x \, dx \\ \int_0^\pi x \cos x \, dx \\ \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} \\ \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x \Big|_0^\pi \\ x \sin x + \cos x \Big|_0^\pi \\ x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x \Big|_0^\pi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} \\ \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2\pi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

לאחר פתרון המערכת נקבל:

$$r_2(x) = 1.216 - 0.774x$$

שגיאת האפרוקסימציה במקרה זה:

$$E(x) = \cos x - 1.216 + 0.774x$$

$$E'(x) = -\sin x + 0.774$$

עבור הקטע הנתון בשאלה, הפונקציה מקבלת ערך קיצון בנקודות:

$$x_1 \approx 0.8851$$

$$x_2 \approx \pi - x_1 = 2.256$$

ולכן, השגיאה הגדולה ביותר בקטע מתקבלת בנקודה:

$$E(0) = -0.216$$

$$E(0.8851) = 0.1023$$

$$E(2.256) = -0.1027$$

$$E(\pi) = 0.2156$$

ולכן השגיאה הגדולה ביותר הינה 0.216.

ניתן לראות זאת בציור הבא:

