

פתרון תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

- א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.
- ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:
1. $\mathbb{Q}$,
 2. $(0,1)$.

פתרון

סעיף א

$\Leftarrow$: תהי $x \in A'$, אזי קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ כך ש- $x_n \rightarrow x$. מתקיים ש- $\{x_n\} \subseteq A$ ומכיון ש- A היא קבוצה סגורה, היא מכילה את כל נקודות הגבול של הסדרות שמתכנסות שלה ולכן $x \in A$.

$\Rightarrow$: נתון $A' \subseteq A$. נבחר סדרה מתכנסת $\{x_n\} \subseteq A$, $x_n \rightarrow x \in X$ ונרצה להראות ש- $x \in A$. נניח בשלילה ש- $x \notin A$. אבל אז $\{x_n\} \subseteq A = A \setminus \{x\}$ ומכאן $x \in A'$. היות ו- $A' \subseteq A$ נקבל $x \in A$ בסתירה להנחה. לכן A סגורה.

סעיף ב

1. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של $\mathbb{Q}$ היא כל $\mathbb{R}$. שכן לכל $r \in \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר רציונלי גדול מ- r וקטן מ- $r + \varepsilon$.
2. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של $(0,1)$ הוא הקבוצה $[0,1]$.

אמנם, לכל $a \in (0,1)$ הסדרה $\left\{a + \frac{1-a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מוכלת ב- $\{a\} \setminus (0,1)$ ומתכנסת

ל- a . מהתבוננות בגבול הסדרות $\left\{1 - \frac{1}{2n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ניתן להסיק שגם

הנקודות $0,1$ הינן נקודות הצטברות של $(0,1)$. לבסוף, לכל $r \in \mathbb{R}$ כך ש- $1 < r$ או $r < 0$, לא נקודת הצטברות של $(0,1)$. אכן, לא ניתן לבנות סדרה ב- $(0,1)$ שתתכנס ל- r כזה. (ידוע מאינפי' שאם $0 < x_n < 1$ ו-

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \text{ אזי } (0 \leq a \leq 1).$$

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S \subseteq X$ תת קבוצה ו- $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

- א. $x \in S - S'$ (הפרש קבוצות).
- ב. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x, \varepsilon) \cap S = \{x\}$.
- ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$, אם $x_n \rightarrow x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

פתרון

א $\Leftarrow$ ב: $x \notin S'$. כלומר x אינה נקודת הצטברות של S . מכאן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$. $x \in S$. עפ"י הנתון וכמו כן $x \in B(x, \varepsilon)$. מכאן, $\{x\} \subseteq B(x, \varepsilon) \cap S$. נניח בשלילה שקיים $x \neq y \in B(x, \varepsilon) \cap S$. נקבל ש- $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$. אך זוהי סתירה לכך ש- $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$. בסה"כ נקבל ש- $B(x, \varepsilon) \cap S = \{x\}$ כדרוש.

ב $\Leftarrow$ ג: תהי $\{x_n\} \subseteq S$ ונניח ש- $x_n \rightarrow x$. עפ"י סעיף ב' קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x, \varepsilon) \cap S = \{x\}$. מהגדרת הגבול קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. מכיון ש- $\{x_n\} \subseteq S$ נקבל שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap S = \{x\}$. מכאן לכל $x_n = x$, $n \geq n_0$.

ג $\Leftarrow$ א: נניח בשלילה ש- $x \in S'$. כלומר x נקודת הצטברות של S . מכאן, קימת סדרה $\{x_n\} \subseteq S \setminus \{x\}$ כך ש- $x_n \rightarrow x$. עפ"י הנתון בסעיף ג' קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n = x$, בסתירה לכך ש- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x\}$.

שאלה 3

- א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X . הוכיחו ש- A תת מרחב מטרי שלם.
- ב. יהי X מ"מ ו- $A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X . הראו ש- A תת קבוצה סגורה של X .
- ג. הוכיחו או הפריכו: אם X מ"מ שלם, ו- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אזי $f(X)$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

פתרון

- א. ניקח סדרת קושי ב- A : $\{x_n\} \subseteq A$. נרצה להראות שהסדרה מתכנסת לנקודה ב- A . כעת, $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב- X ומכיוון ש- X שלם, קיים $x \in X$ כך ש- $x_n \rightarrow x$. בגלל ש- A סגורה היא מכילה את נקודות הגבול של הסדרות המתכנסות שלה, ולכן $x \in A$.
- ב. על מנת להראות ש- A סגורה נראה שהיא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרה מתכנסת ל- $x \in X$. נרצה להראות ש- $x \in A$. אמנם, $\{x_n\}$ היא סדרה מתכנסת ולכן סדרת קושי. מכיוון ש- A שלם נקבל ש- $y \in A$ כעת, $x_n \rightarrow y$. מכיוון ש- $x_n \rightarrow x$ ולכן גבול הסדרה הוא יחיד ולכן $x = y$ ונסיק הדרוש.
- ג. הפרכה. ניקח למשל $X = \mathbb{Q}$ עם המטריקה הדיסקרטית, וניקח את f להיות פונקצית ההכלה. X הוא שלם (מדוע?) וכן f רציפה (כל פונקציה ממרחב מטרי דיסקרטי היא רציפה (מדוע?)). עם זאת, תת המרחב $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ אינו שלם. שימו לב שהמטריקה על $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ היא זו המושרית מהמטריקה הסטנדרטית האוקלידית של $\mathbb{R}$ וכידוע מאינפי 1, $\mathbb{Q}$ עם מטריקה זו אינו שלם.

שאלה 4

- נסמן ב- A' את אוסף נקודות ההצטברות של A ; נסמן ב- A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.
- יהי (X, d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל- $x \in X \setminus A$ כאשר $A = \{x_n\}$.
- א. מצאו את A', A'' .
- ב. האם A קומפקטי?
- ג. האם $A \cup \{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסויים פתוחים**!

פתרון

- א. טענה: $A' = \{x\}$. תחילה, ברור ש- $\{x\} \subseteq A'$ (שכן יש סדרה מתוך $A \setminus \{x\}$ המתכנסת ל- x). נראה ש- $A' \subseteq \{x\}$. נניח בשלילה שקיימת נקודה $x \neq y \in A'$. נסמן $\varepsilon = d(x, y)$. מתקיים

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset \text{ . אכן, אם } z \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ אז}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ מכיון ש-} y$$

היא נקודת הצטברות, קיימת סדרה $\{y_n\} \subseteq A$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל- y . כלומר, עבור ה- ε שהגדרנו קודם, קיים n_0 כך שלכל

$$n \geq n_0 \text{ מתקיים } y_n \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ . כעת, מכיון ש-} x \rightarrow x_n \text{ קיים } n_1 \text{ כך}$$

$$\text{שלכל } n \geq n_1 \text{ מתקיים } x_n \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ . כלומר, פרט למספר סופי של}$$

איברים, כל איברי הקבוצה A נמצאים בסביבת $\frac{\varepsilon}{2}$ של x . מכיון ש- $\{y_n\}$

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ אינסופית נסיק מהנ"ל שקיים איבר בחיתוך}$$

$$\text{בסתירה לכך ש-} B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset \text{ .}$$

לגבי A'' : מכיון ש- A' סופית, איך לה נקודות הצטברות ולכן $A'' = \emptyset$.

ב. כזכור, מרחב מטרי הוא קומפקטי אם "מ לכל קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות. A תת קבוצה אינסופית של המרחב A , תת המרחב המטרי של (X, d) , ללא נקודות הצטברות בתת המרחב המטרי (A, d) (למה?) לכן A אינו קומפקטי.

ג. $A \cup \{x\}$ קומפקטי. נוכיח באמצעות כיסויים. יהי $\{U_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של

$A \cup \{x\}$, ונראה שקיים לו תת כיסוי סופי. קיים i_0 כך ש- $x \in U_{i_0}$. מכיון

ש- $x_n \rightarrow x$, קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $x_n \in U_{i_0}$. כעת, לכל

$j \in \{1, 2, 3, \dots, n_0 - 1\}$ קיים U_{i_j} כך ש- $x_j \in U_{i_j}$. לכן תת הכיסוי הסופי

$$\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_{n_0-1}}, U_{i_0}\}$$

שאלה 5

יהי X מ"מ ויהי Y אוסף אינסופי בן מניה של נקודות מתוך X , כך שלכל שתי נקודות שונות $a, b \in Y$ מתקיים $1 \leq d(a, b) \leq 2$. הוכיחו:

א. Y סגור וחסום ב- X .

ב. האם Y תת מרחב קומפקטי (ביחס למטריקת תת המרחב)?

פתרון

א. ברור ש- Y חסום (לפי ההגדרה); נראה שהוא סגור. תהי $\{x_n\} \subseteq Y$ כך ש- $x_n \rightarrow x \in X$ ונראה ש- $x \in Y$. אם $x_n \rightarrow x \in X$ אזי לכל $\varepsilon > 0$, ובפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$, קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $x_n \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$. לכן, לכל $n_1, n_2 \geq n_0$ מתקיים $x_{n_1}, x_{n_2} \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ ולכן $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < 1$, ואם הנקודות שונות, אזי $1 \leq d(x_{n_1}, x_{n_2}) < 1$ וזאת סתירה. לכן $x_{n_1} = x_{n_2}$. כלומר, כל סדרה מתכנסת מתוך Y היא קבועה לבסוף, ולכן $x \in Y$.

ב. המרחב אינו קומפקטי. נשים לב ש- $\left\{B\left(a, \frac{1}{2}\right)\right\}_{a \in Y}$ הוא כיסוי פתוח של Y שאין לו תת כיסוי סופי (שכן, למעשה, כל איבר בכיסוי מכיל נקודה אחת בדיוק מתוך Y).
[דרך נוספת: נשים לב ש- Y הוא מרחב דיסקרטי (מדוע?) ולכן קומפקטי אמ"מ סופי.]

שאלה 6

בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

יהי (X, d) מ"מ. נגדיר שתי מטריקות על X : $\tilde{d}, \rho$.

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \rho(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} \quad \text{לכל } x, y \in X.$$

א. הוכיחו כי אלה אכן מטריקות.

(במידה ועשיתם זאת באינפי 3 – אין צורך שתעשו שוב. אם לא עשיתם – זה תרגיל טוב.)

ב. הוכיחו כי המטריקות הן חסומות.

הערה: מטריקה ρ נקראת "חסומה" אם קיים $r > 0$ כך שלכל x, y

מתקיים $\rho(x, y) \leq r$ (שקול להגדרות שניתנו בתרגול האחרון).

ג. הוכיחו כי $d, \tilde{d}$ ו- ρ שקולות.

פתרון

נוכיח רק סעיפים ב', ג'.

סעיף ב'

המטריקה $\tilde{d}$ חסומה שכן $\tilde{d}(x, y) \leq 1$ לכל $x, y \in X$, וכנ"ל לגבי $\rho(x, y)$.

סעיף ג'

נוכיח רק את השקילות של $d, \tilde{d}$:

נניח $\{x_n\} \xrightarrow{d} x$. נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} = \frac{0}{1 + 0} = 0 \Rightarrow \{x_n\} \xrightarrow{\tilde{d}} x$$

מצד שני $d(x, y) = \frac{\tilde{d}(x, y)}{1 - \tilde{d}(x, y)}$. לכן אם $\{y_n\} \xrightarrow{\tilde{d}} y$ נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{d}(y_n, y)}{1 - \tilde{d}(y_n, y)} = \frac{0}{1 - 0} = 0 \Rightarrow \{y_n\} \xrightarrow{d} y$$

שאלה 7

יהי (X, d) מ"מ מקומפקטי. תהי $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ סדרה בעלת גבול חלקי יחידלכל

היותר. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: ראשית הראו שלסדרה אכן קיים גבול חלקי $a \in X$. כעת הניחו

בשלייה שהסדרה לא מתכנסת ל- a ובנו תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ כך ש-

$$d(x_{n_k}, a) \geq \varepsilon$$

פתרון

ל $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ בהכרח קיימת תת סדרה מתכנסת שכן (X, d) מ"מ מקומפקטי.

מהנתון נקבל ש- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ גבול חלקי יחיד $a \in X$. נראה שהסדרה $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

מתכנסת ל- a . נניח בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- a . לכן,

קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $n_0 > n$ כך ש $d(x_{n_0}, a) \geq \varepsilon$ (*)

בעזרת (*) ניתן לייצר תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ כך ש $d(x_{n_k}, a) \geq \varepsilon$. אכן, עבור $n=1$

קיים $n_1 > 1$ כך ש $d(x_{n_1}, a) \geq \varepsilon$. נניח ש $\{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\}$ כבר הוגדרו כך ש-

$d(x_{n_t}, a) \geq \varepsilon$ לכל $1 \leq t \leq k-1$ ו- $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_{k-1}$. כעת, בעזרת (*) נקבל

שעבור $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ קיים $n_k > n_{k-1}$ כך ש $d(x_{n_k}, a) \geq \varepsilon$.

כעת, לסדרה $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ יש תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ כי (X, d) מ"מ מקומפקטי.

בהכרח גבול הסדרה $\{x_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ הוא a (מדוע?). אבל זה בלתי אפשרי שכן

$d(x_{n_{k_l}}, a) \geq \varepsilon$ לכל $l \in \mathbb{N}$.