

1/14

מבחן חשבון אינפיניטסימלי, 88-230-01 (מ/צ א')

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מהאוניברסיטה

פרופ. שלמה קרמלוביץ

משק הבחינה: 2 1/2 שעה. 05/02/14
אין להשלים בחומר עזר ובמחשבון.

* בחינת אחר מהשאלות 1-2.

1. תהי E קבוצה במרחב מטרי X . נסמן ב E' את קבוצת כל

נקודות הגבול של E . הוכח:

(8) E' קבוצה סגורה.

(4) אם $E \subseteq F \subseteq X$, אז $E' \subseteq F'$.

(8) אם E, F קבוצות חתומות על X , אז $(E \cup F)' = E' \cup F'$.

תהי $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, ו $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$.

מציג

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)$$

הוכח:

(6) f רציפה על E .

(6) f רציפה במידת של על הקבוצה

$$E_{a,b,c} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} \cup \{(x, y) \mid b^2 \leq x^2 + y^2 \leq c^2\}$$

כאשר a, b, c מספרים חיוביים כך ש

$$0 < a < 1 < b < c$$

(8) לא ניתן להרחיב את f לפונקציה רציפה על $\mathbb{R}^2$.

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{אם } x=0 \\ \frac{x_3 \sin(x_1 x_2)}{\|x\|^{2/3}} & \text{אם } x \neq 0 \end{cases}$$

(10) חשב את $\nabla f(0)$.

(10) הוכח ש- f זיגמא-רציפה ב $x=0$.

23/18

* בחר את המסלול 4 ו-5

4. א. (8) מצא את כל הנקודות בקיטור של הפונקציה

$$f(x, y) = x^2 y^4 + x^3 y^3 - 2x^2 y^3$$

ב. (12) סלל את הנקודה הקיטור (מינימום או מקסימום מקומי, או לא) ו

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$$

5. נתונה המשוואה $x^4 - 2xy - 3y^2z = 0$ א. (10) חשב לקויים

סביבה U של הנקודה $(y_0, z_0) = (1, -\frac{1}{3})$, כך שלכל נקודה (y, z) ב- U מתקיים x יחיד כך ש- (x, y, z) פתרון של המשוואה הנ"ל, והפונקציה $x = \varphi(y, z)$ המוגדרת על ידי φ היא מתחלקת C^1 !

$$\varphi(1, -\frac{1}{3}) = 1$$

$$\nabla \varphi(1, -\frac{1}{3})$$

* בחר את המסלול 6 ו-7

6. נתונה המשוואה $\begin{cases} 2x - y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 - 4y - 2z^2 = 0 \end{cases}$ בסביבה של

$$(x_0, y_0, z_0) = (4, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$$

א. (10) חשב לקויים סביבה U של הנקודה $z=2$ ב- $\mathbb{R}$, כך שלכל

$z \in U$ מתקיים (x, y) יחיד כך ש- (x, y, z) פתרון של המשוואות

ב- V , והפונקציה $\varphi: z \rightarrow (x, y)$ המוגדרת על ידי φ היא מתחלקת C^1

$$\varphi(2) = (4, 2)$$

$$\varphi'(2)$$

7. בין כל הטורים לסכום אינסופי של איברי קבוצה, מצא את הטור הבא הנפרד במרחב ℓ^1 .

3 3/4

(עדיען) $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$ (10) 8

$$\int_V z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} dV$$

(a>0) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ סדרה סגורה

$0 < a < b$ סדרה סגורה $(0,0)$ $\bar{D}$ (10)
סדרה פתוחה $(\mathbb{R}^2 - \bar{D})$

$$J(p) = \int_{\bar{D}} (x^2+y^2)^{p/2} \arctan \frac{y}{x} dS$$

! סדרה



מדור הבחינות

מינהל הסטודנטים

אוניברסיטת בר-אילן

מספר סידורי 3082966

מס' מח': 33

שנת: תשע"ד סמסטר: 1 מועד: 1 מסלה: 1

קורס: 01 230 88 חשבון אינפיניטסימלי 3



16/2/14 המחברת נבדקה ביום:

הציון: 100

חתימת המרצה: ש

מס' סידורי מתוך מחברות

הוראות לנבחן

1. הבחינה תלמיד שעזב את האולם אחרי חלוקת השאלונים או לא מסר את מחברתו עד תום הבחינה או מסר מחברת ריקה - דינו כדין נכשל.
2. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשיב/ה.
3. יש לכתוב את התשובות בדין, בכתב ברור ונקי על עמוד אחד של כל דף. אין לכתוב בשוליים, הכותב טיטה יקדיש לה את הצד הימני של המחברת ואת ההעתקה הנקיה יכתוב בצד השמאלי. את הטיטה יש למחוק בהעברת קו. אסור לחלוש דפים מן המחברת.
4. נבחן שעבא עברת משמעת ו/או אי ציות להוראות הכתובות והנחיות המשיב/ה יועמד לדין משמעת.
5. משך זמן הבחינה מצויין בראש השאלון. עם הודעת המשיב/ה כי תס הזמן, על הנבחן להפסיק את הבחינה, למסור את המחברת עם השאלון ולצאת מאולם הבחינה. מחברת שלא נמסרה בתום ההודעה לא תיבדק.
6. אחזקת מכשיר טלפון סלולרי (אפילו סגור) ברשות הנבחן, מביא לפסילה מיידיה של הקורס.

הנה/ה

1. עליו להבחן בחדר בו הנך רשום.
2. הנח ליד המשיב/ה בבחינה את כל חפציו האישיים כגון: תיקים, ספרים, מחברות, מכשירים סלולריים, קלמרים וכו'. השימוש במחשב נייד אסור.
3. אסור להחזיק בהישג יד חומר הקשור לבחינה/לקורס אלא אם הותר הדבר בכתב על ידי המרצה ורק בהתאם למותר.
4. מסור למשיב/ה על הבחינה תעודת זהות וכרטיס נבחן חתום ותקף לסמסטר בו מתקיימת הבחינה.
5. היציאה לשירותים במהלך הבחינה בהתאם להנחיות המשיב/ה. נשים בהריון ונבכנים באישור מתאים רשאים לבקש מהמשיב/ה לצאת. היציאה בליווי המשיב/ה ובהתאם לנוהלי האוניברסיטה.
6. נבחן היוצא ללא רשות מכל סיבה שהיא מחברתו תפסל ותועבר לועדת משמעת.
7. יש להישמע להוראות המשיב/ה. אין לעזוב את חדר הבחינה ללא קבלת רשות. חל איסור מוחלט לפנות לנבכנים אחרים בכל עניין ודבר. בכל עניין סנה למשיב/ה.
8. בתחילת הבחינה מלא את פרטיך האישיים ע"ג המחברת. תלמיד שקיבל לידיו שאלון ואין ברצונו להיבחן, חייב להמתין 1/2 שעה בכיתה מתחילת שנה"ל 388 סמסטר k מועד k

מס' קורס 88-230-01

מחלקה תאריך 5/2/14

המרצה

מבחן חלק (אם הבחינה בשני חלקים)

הוראות לנבחן בנושא סריקה:

אין לכתוב במחברת בעפרון. יש לכתוב בעט בצבע כחול כהה או שחור בלבד. אין להשתמש בנוזל מחיקה (טיפקס). אין לכתוב בשוליים משני צידי הדף. מחברת בכתב מרושל משפיעה על תוצאות הסריקה.

שם לבל! השוליים יחתכו לפני הסריקה. לכן, חל איסור מוחלט

88.6775

✓.2

✓.3

✓.5

✓7.

✓.8

100

2) f היא הפונקציה $f(x,y) = \cos(x)$ על $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

א. האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

ב. $E_{a,b,c}$ קבוצת סגורה כי היא איחוד סופי של

קבוצות סגורות. 1) $B(a,b)$ קבוצת סגורה

2) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq c^2\}$ קבוצת סגורה

כ. האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

* הפונקציה $f(x,y) = \cos(x)$ היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

$E_{a,b,c} \subseteq E$ כי f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

א. $f(x,y) = \cos(x)$ היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

ב. $f(x,y) = \cos(x)$ היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

$\{(x_n, y_n)\} = \{(0, \sqrt{1 - \frac{1}{2\pi n}})\}$ $\{(x_n, y_n)\} = \{(0, \sqrt{1 - \frac{1}{\pi + 2\pi n}})\}$

$(x_n, y_n) \rightarrow (0, 1)$ $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 1)$

$f(x_n, y_n) = \cos\left(\frac{1}{0 + 1 + \frac{1}{2\pi n}}\right) =$ $f(x_n, y_n) =$

הערת המרצה

$B((x_0, y_0), d-c)$ האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

$d(x, 0) + d(x, 1) \geq d(0, 1)$ האם f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא? f היא פונקציה קפוא?

$\sqrt{x^2 + y^2} + d - c \geq d \Rightarrow x^2 + y^2 \geq c^2$

$$= \cos(2\pi n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1) \quad \left| \quad = \cos\left(\frac{1}{0 + 1 + \frac{1}{\pi + 2\pi n} - 1}\right) = \right. \\ \left. = \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-1) \right.$$

2 נקודות המובנות $(0,1)$ ונקודה המובנת

המובנת לא נקודה $\leftarrow$ המובנת לא נקודה $\leftarrow$

לכל נקודה $(0,1)$ יש סדרה של נקודות $\mathbb{Q}^2$
הולכת למרחק 0 מנקודה $(0,1)$ זו

✓

$$(x, y, z) = (x, y, z)$$

נקודה $(0,0,0)$ 3

$$\left[f_x(0) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0,h) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0,h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^{2/3}} = \boxed{0}$$

✓

$$\left[f_y(0) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^{2/3}} = \boxed{0}$$

$$\left[f_z(0) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0,h) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \sin(0)}{h^{5/3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^{5/3}} = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \left[\nabla f(0) \right] = (f_x, f_y, f_z) = \boxed{(0,0,0)}$$

$$\frac{f(\vec{0} + \vec{h}) - f(\vec{0}) - \nabla f_0(\vec{0}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$= \frac{f(\vec{h}) - 0 - (0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}}{\|\vec{h}\|} = \frac{f(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} =$$

$$= \frac{h_3 \sin(h_1, h_2)}{\|\vec{h}\|^{2/3} \|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{h_3 \sin(h_1, h_2)}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{5/6}} =$$

$$= \lim_{h_1, h_2} \frac{\sin(h_1, h_2)}{h_1 h_2} \lim_{h_1, h_2, h_3} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} =$$

$$= \lim_{h_1, h_2} \frac{\sin(h_1, h_2)}{h_1 h_2} \lim_{h_1, h_2, h_3} \frac{h_1 h_2 h_3}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{5/6}} = \lim_{h_1, h_2, h_3} \frac{h_1 h_2 h_3}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{5/6}}$$

(1)

$$\left| \frac{h_1 h_2 h_3}{\|\vec{h}\|^{5/6}} \right| \leq \frac{\|\vec{h}\| \|\vec{h}\| \|\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|^{5/6}} \leq \frac{\|\vec{h}\|^3}{\|\vec{h}\|^{5/6}} \leq \|\vec{h}\|^{4/3}$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{h_1 h_2 h_3}{\|\vec{h}\|^{5/6}} = 0$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{h_1 h_2 h_3}{\|\vec{h}\|^{5/6}} = 0$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{0} + \vec{h}) - f(\vec{0}) - \nabla f_0(\vec{0}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$$

למשפט (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100)

$$f(x,y) = x^2y^4 + x^3y^3 - 2x^2y^3$$

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} f'_x = 2xy^4 + 3x^2y^3 - 4xy^3 = 0 \\ f'_y = 4x^2y^3 + 3x^3y^2 - 6x^2y^2 = 0 \end{cases}$$

$$F(x,y,z) = x^4 - 2xy - 3y^2z = 0 \quad \text{--- (5)}$$

$$\text{הִי־פונקציה } F \text{ : } F \in C^1(U) \quad 4$$

$$\begin{aligned} F(1,1,-\frac{1}{3}) &= F(1-\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}) \quad (2) \\ &= 1 - 2 - 3(-\frac{1}{3}) = 0 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(1,1,-\frac{1}{3})} \neq 0 \quad \text{: } 3 \text{ וזוהי } (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_p = 4x^3 - 2y \Big|_{(1,1,-\frac{1}{3})} = 4 - 2 = 2 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\varphi(y,z) = x \quad \text{אם נשתמש בהפוך הטאנאנט } F \text{ אז } (4,2,3) \leftarrow$$

$$(1,1,-\frac{1}{3}) \in (1,1,-\frac{1}{3}) \cup \text{ (נקודה נוספת) } U$$

$$\text{נניח } (y_0, z_0) \in U \text{ אז } x_0 \text{ יהיה } (x_0, y_0, z_0) \text{ (הנקודה הזו)}$$

$$x'_y, x'_z \quad \text{אם נשתמש ב- } \varphi \in C^1(U) : \text{ נניח } 3/8$$

$$x'_y = - \frac{F_y}{F_x} =$$

$$= - \frac{-2x - 2zy}{4x^3 - 2y}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^{-1} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

אם נניח $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ אז
הנקודה הזו היא הנקודה $(1,1,-\frac{1}{3})$
אז $(x,y) = (1,1)$ וזוהי הנקודה $\neq 0$

$$X'_2 = - \frac{F_z}{F_x} = - \frac{-3y^2}{4x^3 - 2y} \rightarrow$$

פונקציה
קריטית
 $(1, -\frac{1}{3})$
כיוון מימין

$U \ni X'_2, X'_y$ כיוון

$$\boxed{\varphi \in C^1(U)}$$

$$\nabla \varphi(1, -\frac{1}{3}) = (X'_y, X'_2) \Big|_{(1, -\frac{1}{3})}$$

$$X'_y \Big|_{(1, -\frac{1}{3})} = \frac{2x - 6zy}{4x^3 - 2y} \Big|_{(1, -\frac{1}{3})} = \frac{2 - 2}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$X'_2 \Big|_{(1, -\frac{1}{3})} = \frac{3y^2}{4x^3 - 2y} \Big|_{(1, -\frac{1}{3})} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \varphi(1, -\frac{1}{3}) = (0, 1\frac{1}{2})}$$



(0 <). z, y, x > 0
 (10)) $f(x, y, z) = xyz$

7) ✓

צדד, k: $x + y + z = p$
 $g = x + y + z - p$

$z = p - x - y$: הצבה ב f

$\Rightarrow f(x, y, z) = xy(p - x - y) =$
 $= [p \cdot xy - x^2 y - y^2 x]$

$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$: נגזרות חלקיות

$\begin{cases} f_x = py - 2xy - y^2 = 0 & / : y \neq 0 \\ f_y = px - 2xy - x^2 = 0 & / : x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} I \\ II \end{cases} \begin{cases} p - 2x - y = 0 \\ p - 2y - x = 0 \Rightarrow [x = p - 2y] \end{cases}$

$\Rightarrow p - y - 2(p - 2y) = 0$
 $p - y - 2p + 4y = 0$

$3y = p \Rightarrow [y = \frac{p}{3}]$

$[x = p - 2 \cdot \frac{p}{3}] = [\frac{p}{3}]$

$[z = p - \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}p = [\frac{1}{3}p]]$

הערות ומרצב

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}p, \frac{1}{3}p, \frac{1}{3}p\right)$$

$$\left. \begin{aligned} f''_{xx} &= -2y \Big|_{x_c} = -\frac{2p}{3} \\ f''_{yy} &= -2x = -\frac{2p}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} -\frac{2p}{3} & -\frac{p}{3} \\ -\frac{p}{3} & -\frac{2p}{3} \end{pmatrix}$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} = \frac{p}{3} \quad p - 2x - 2y = -\frac{p}{3}$$

$$\cancel{f''_{yx} = \frac{p}{3}}$$

$$M_1(H) = -\frac{2p}{3} < 0$$

$$M_2(H) = \frac{4}{9}p^2 - \frac{1}{9}p^2 = \frac{p^2}{3} > 0$$

$$\underbrace{\text{נקודה מקסימום}}_{\frac{1}{3}p(1,1,1)} \quad \Leftarrow$$

* כיוון שהתקן של הנקודה $(x, y, z) \geq 0$ קיים

כל הנקודה סגורה ולכן קיים מקסימום ~~היא~~ אולם

$$f = 0 \quad \Leftarrow \quad x=0 \vee y=0 \vee z=0$$

$$\underbrace{f=0}_{x=0, y=0, z=0} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{3}p(1,1,1) \text{ מקסימום אולם} \quad \text{כאשר } x, y, z \geq 0$$

כל שכן ~~היא~~ הנקודה $x, y, z \geq 0$

$$\text{לכן } x=y=z=\frac{p}{3}$$

כלל - נקודה מקסימלית

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

הנפח: $\frac{4}{3}\pi a^3$ (8)

$$\Rightarrow |J| = r^2 \sin \theta$$

הנפח, אלמנט דיפרנציאלי

$$z \geq 0 \Rightarrow \cancel{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow r \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \cos \theta \geq 0$$

$$\Rightarrow \left[0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{כי הפונקציה} \\ \text{היא קבועה} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \text{היא קבועה} \end{array} \right)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \leq a^2$$

$$\Rightarrow [0 \leq r \leq a]$$

$$[0 \leq \phi \leq 2\pi]$$

$$\Rightarrow \int z (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} dx dy dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r \cos \theta r^{-3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$= 2\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d(\sin \theta) = 2\pi a \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\pi a}$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

ליבול וצב

2

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$a \leq r \leq b$$

היקף

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow J(p) = \int_0^{2\pi} \int_a^b r^p \cdot \theta dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^p dr = \frac{\theta^2}{2} \Big|_0^{2\pi} \cdot \begin{cases} \frac{1}{p+2} r^{p+2} \Big|_a^b & p \neq -2 \\ \ln(r) \Big|_a^b & p = -2 \end{cases}$$

$$= 2\pi^2 \cdot \begin{cases} \frac{1}{p+2} (b^{p+2} - a^{p+2}) & p \neq -2 \\ \ln\left(\frac{b}{a}\right) & p = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ll} J(p) = \frac{2\pi^2}{p+2} (b^{p+2} - a^{p+2}) & , p \neq -2 \quad \text{כל } n \in \mathbb{Z} \\ J(p) = 2\pi^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) & , p = -2 \quad \text{כל } n \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

✓

הערות המרצה



פרינט בע"מ

טל. 03-5604070