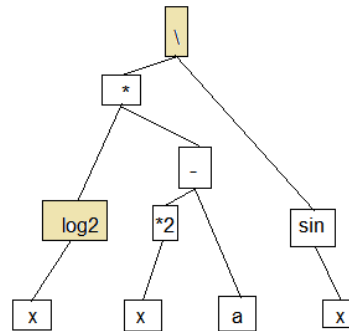


 Bar-Ilan University אוניברסיטת בר-אילן				ב"ה
שיטות נומריות 1				שם הקורס
88-376-01				מס' הקורס
ד"ר יעקב קרסנוב, ד"ר מיכאל מיכאלי				שם המרצה
13.03.2016 ג' אדר ב' תשע"ו,	מועד ב'	סמסטר א'	שנה"ל תשע"ו	שנה, סמסטר, מועד, תאריך
שעתיים וחצי				משך הבחינה
השימוש במחשב נייד\טאבלט\סמארטפון כחומר עזר אסור בהחלט.				חומר עזר ■ מותר
עונים על 5 מתוך 6 השאלות. אם פתרתם את כל השאלות – נא לציין 5 שאלות לבדיקה, אחרת תיבדקנה 5 הראשונות. חובה להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות!				הנחיות מיוחדות
(יופיע בצמוד לשאלה)				משקל כל שאלה:

1. עבור חישובים הבאים : $y = \log_2(x) * (2*x - a) / \sin(x)$;

א. (5) בנה עץ פעולות בחישוב של y .



ב. (5) מצא תחום החשוד (מקומות חשודים) בעץ פעולות בסעיף א' ונימק למה הוא חשוד.

, $x < 0, x \approx k\pi, k = 1, 2, \dots$ מקומות חשודים מודגשים בצהוב

ג. (10) חשב האומדן למספר תנאי בחישוב נומרי של y .

$$\frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial x} y = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{2x}{-2x+a} + \frac{x \cos(x)}{\sin(x)}, \quad \frac{a}{y} \frac{\partial}{\partial a} y = \frac{x}{-2x+a}$$

$$\text{cond}(x, a) < \max\left(\left|\frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial x} y\right|, \left|\frac{a}{y} \frac{\partial}{\partial a} y\right|\right)$$

מספר התנאי יהיה גבוה סביב מקומות אם: $x \approx 0, x \approx \frac{a}{2}, x \approx k\pi$

2. עבור פונקציה $f(x)$ (שנתונה ב *Matlab*) : $f = @(x,p,a) p*x/(p+1) + a/(p+1)/x^p$:

א. (5 נק') מצא כל נקודות שבת של האיטרציה פשוטה הבא $x_{n+1} = f(x_n, p, a)$.

$$x^* = (a)^{\frac{1}{p+1}}$$

ב. (10 נק') תאר את הסוג של התכנסות סביב כל נקודה שבת שמצאתה בסעיף א'.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p x / (p+1) + a / (p+1) / x^p \right) = \frac{p}{p+1} \left(1 - \frac{a}{x^{1+p}} \right)$$

אז בנקודה שבת הנגזרת שווה ל-0, נקודה שבת סופר יציבה ושיטה ריבעית

ג. (5 נק') ציגור התנהגות של התהליך איטרטיבי כ- time series : $(n, x_n), n=1, \dots, N$ במטלב

```
>> a=2; p=3; n=7; x=ones(n+1); for t=1:n
    x(t+1)=f(x(t),p,a);
end;
plot(x)
```



3. נתבסס על מערכת משוואות הנתונה :

$$4x + 1.501y + z = 10.01, \quad 8x + 3y + 2z = 20.00, \quad 16x + 6y + 4.001z = 40.02 \quad (1)$$

קודם כול, על פי שני שלבים הראשונים של אלגוריתם חילוץ גאוס מקבלים הפתרון :

$$4x + 1.501y + z = 10.01, \quad -0.02y = -0.020, \quad -0.04y + 0.001z = -0.02 \quad (2)$$

א. (15 נק') מצא מטריצה איטרציה S של שיטת גאוס-זיידל לפתרון מערכת של המשוואות (1).

$$D+L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 16 & 6 & 4.001 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1.501 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -0.4999 & 0.2499 \end{bmatrix};$$

$$S = (D+L) \backslash U =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.3752 & 0.2500 \\ 0 & -1.0007 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9998 \end{bmatrix}$$

$$x = 0.3752y + 0.25z + b'_1$$

תשובה: תהליך לא מתכנס כי : $y \approx -y + b'_2$ אך לא יש נקודה

$$z \approx -z + b'_3$$

$$x = -15/4 \quad x = 0.3752b'_2/2 + 0.25b'_3/2 + b'_1$$

$$y = 10 \quad y \approx b'_2/2 \quad \text{שבת:} \quad \text{זוה הפתרון (2) :}$$

$$z = 10 \quad z \approx b'_3/2$$

ב. (5 נק') בצע שני שלבים של איטרציה מסעיף א', המתחילה עם $x=y=z=1$. עקב תשובה לסעיף א' תהליך איטרטיבי אינו מתכנס, אין צורך להמשיך ולחשב!

ג. (5 נק') מצא תשובה לפקודה הבא : $\text{norm}(S,1)$ (שנכתבות ב Matlab) עבור מטריצה S שבנתה בסעיף א'.

```
>> norm(S,1)
```

ans =

1.3759

4. מצא את הפולינומים אינטרפולציה שעוברים דרך הנקודות (1, -1), (0, -1), (-1, 1) באמצעות:

א. (5 נק') נוסחת אינטרפולציה של Lagrange,

$$L_2 = x^2 - x - 1$$

ב. (5 נק') נוסחת אינטרפולציה של ניוטון (מלא את הערכים החסרים בטבלת ההפרשים מחולקים),

x	f(x)		
-1.0	1.0	?	?
0	-1.0	?	?
1.0	-1.0		

x	f(x)		
-1.0	1.0	-2	1
0	-1.0	0	
1.0	-1.0		

ג. (5 נק') נוסחה אינטרפולציה של הספלין קובי טבעי ידני,

$$\begin{cases} -1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 & x < 0 \\ -1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ד. (5 נק') נוסחה אינטרפולציה של הספלין קובי טבעי ב Matlab

לדוגמה:

```
pp = csape([-1 0 1],[1 -1 -1],'variational')
```

5. לצורך חישוב נומרי של הקו ישר "הטוב ביותר" בשיטה ריבועים פחותים (least square method) מתבססים על הניסוי הבאה:

x	1	1.5	1.5	1.8
y	0	1	2	1

א. (10 נק') מצא מקדמים של הקו ישר "הטוב ביותר" הזה.

```
>> A=[1 1; 1 1.5; 1 1.5; 1 1.8]; b=[0 1 2 1]';  
>> A\b
```

ans =

-1.1970
1.5152

ב. (10 נק') כתב תוכנה ב Matlab לצורך חישוב שגיאה SSE בתוצאה שקיבלתה בסעיף א'

```
>> x=[1 1.5 1.5 1.8]; y=[0 1 2 1]; yy=-1.1970+1.5152*x;
>> sse=sum((y-yy).^2)
```

```
sse =
```

```
1.2424
```

6. לצורך חישוב נומרי של האינטגרל המסוים נשתמש בשיטת אינטגרציה של Curtis-Clenshaw שמשמשת ב $l + n$ נקודות קיצוניות של פולינום Chebyshev $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

א. (10 נק') עבור $n = 3$ מצא משקלות $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ כך שהקירוב של אינטגרל יהיה מדויק לפולינומים במעלה לפחות n .

ואז נוסחה היא: $x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -1$ מקבלים $n = 3$ עבור תשובה:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_0 f(1) + \omega_1 f(1/2) + \omega_2 f(-1/2) + \omega_3 f(-1).$$

נקבל:

$$\int_{-1}^1 1 dx \approx \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2,$$

$$\int_{-1}^1 x dx \approx \omega_0 + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \omega_3 = 0,$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx \approx \omega_0 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{4} + \omega_3 = \frac{2}{3},$$

פיתרון של מערכת המשוואות האלה :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} [f(1) + 8f(1/2) + 8f(-1/2) + f(-1)].$$

ב. (5 נק') מצא דרגת דיוק אלגברי של הנוסחה שבניתה בסעיף א' ?

$$\int_{-1}^1 x^4 dx \approx \frac{1}{9} [1 + 1/2 + 1/2 + 1] = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}.$$

אזי דרגת דיוק אלגברי הוא 3!

ג. (5 נק') כתב חישוב של הערך האינטגרל $\int_{-1}^1 T_n(x) dx$ לכל n ב *Matlab*.

```
int('cos(n*arccos(x))',-1,1)
```

בהצלחה!