

הרצאה 1

מרחב מטרי

הגדרה

מרחב מטרי הוא קבוצה M ופונקציה $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ כך שמתקיים:

1. לכל $x, y \in M$, $d(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$ (כלומר לכל $x \in M$ $d(x, x) = 0$ ואם $x \neq y$ אז $d(x, y) \neq 0$)

2. לכל $x, y \in M$, $d(x, y) = d(y, x)$

3. לכל $x, y, z \in M$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (אי שוויון המשולש)

הפונקציה d נקראת "מטריקה על M ".

דוגמאות

1. $\mathbb{R}$ עם המטריקה $d(x, y) := |x - y|$

2. $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ זאת נקראת "המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}^n$ ", (מסומנת d^2)

3. $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ (מסומנת d^∞).

4. תהי M קבוצה כלשהי. נגדיר על M את המטריקה $d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ נוכיח שזו מטריקה:

שני התנאים הראשונים מתקיימים אוטומטית מההגדרה. נוכיח שאי שוויון המשולש מתקיים:

$$d(x, z) \stackrel{?}{\leq} d(x, y) + d(y, z)$$

• אם $x \neq y, y \neq z$ אז נקבל בצד ימין 2, ומכיוון שבצד שמאל יכול להיות מקסימום 1. זה מתקיים.

• אם $x \neq y$ או $y \neq z$, אז נקבל בצד ימין 1, וזה בכל מקרה גדול שווה לצד שמאל.

• אם $x = y$ ו $y = z$ אז $x = y = z$ כלומר $x = z$, ולכן נקבל 0 בשני הצדדים.

המטריקה הזאת נקראת "המטריקה הדיסקרטית על M ".

הגדרה

יהי (M, d) מרחב מטרי.
תהי $A \subseteq M$ תת קבוצה כלשהי. אזי הצמצום של d ל- $A \times A$ מהווה מטריקה על A .
המטריקה הזו על A נקראת "המטריקה המושרה על A מ- M ", ועם מטריקה זו A נקראת תת מרחב מטרי של M .

דוגמאות

1. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

2. $S^n, S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^{n+1}$.

• $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ הוא מעגל היחידה.

• $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ הוא כדור עם רדיוס 1.

• $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ נקראת "הספירה ה- n מימדית".

נשים לב שאמנם S^n נמצא במרחב $n+1$ מימדי - אבל אפשר להסתכל עליו כעל מרחב n מימדי.

התכנסות של סדרות

הגדרה

סדרה ב- M היא פונקציה $a: \mathbb{N} \rightarrow M$.
נהוג לסמן את $a(n)$ כך: a_n .

הגדרה

יהי (M, d) מרחב מטרי. תהי סדרה ב- M , ותהי $b \in M$. אנו נאמר שהסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת ל- b , אם לכל $\epsilon > 0$ יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(a_n, b) < \epsilon$.

סימונים

$$a_n \rightarrow b$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

טענה

אם קיים גבול לסדרה $\{a_n\}$ אז הוא יחיד.

הוכחה

נניח בשלילה שלסדרה $\{a_n\}$ יש שני גבולות שונים $b \neq c$. ניקח $\epsilon = \frac{1}{2}d(b, c)$. $\epsilon > 0$ כי $b \neq c$.

• כיוון ש $a_n \rightarrow b$ קיים n_0 כך ש $d(a_n, b) < \epsilon$ לכל $n \geq n_0$.

• כיוון ש $a_n \rightarrow c$ קיים n_1 כך ש $d(a_n, c) < \epsilon$ לכל $n \geq n_1$.

ניקח $N = \max(n_0, n_1)$, אזי

$$d(a_N, b) < \epsilon$$

$$d(a_N, c) < \epsilon$$

מאי שוויון המשולש נקבל

$$d(b, c) \leq d(b, a_N) + d(a_N, c) < \epsilon + \epsilon = d(b, c)$$

וקיבלנו סתירה!

טענה

$$a_n \rightarrow b \text{ אם"ם } d(a_n, b) \rightarrow 0$$

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח $a_n \rightarrow b$ וצ"ל $d(a_n, b) \rightarrow 0$. יהא נתון $\epsilon > 0$. מהתכנסות a_n לב קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $d(a_n, b) < \epsilon$. עבור אותו n_0 מתקיים שלכל $n \geq n_0$, $|d(a_n, b) - 0| < \epsilon$.

$\Rightarrow$ נניח $d(a_n, b) \rightarrow 0$ וצ"ל $a_n \rightarrow b$. בהינתן $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $|d(a_n, b) - 0| < \epsilon$, כלומר $d(a_n, b) < \epsilon$.

דוגמאות לתכונות של $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית שאינן נכונות במרחבים מטריים באופן כללי

דוגמה 1 - סדרת קושי

הגדרה יהי (M, d) מרחב מטרי. סדרה $\{a_n\}$ ב M נקראת סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n, m \geq n_0$ מתקיים $d(a_n, a_m) < \epsilon$.

טענה כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

הוכחה תהי $\{a_n\}$ סדרה המתכנסת ל**b**. יהא נתון $\epsilon > 0$. מהגדרת ההתכנסות עם $\frac{\epsilon}{2}$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $d(a_n, b) < \frac{\epsilon}{2}$. לכן לכל $n, m \geq 0$

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, b) + d(a_m, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ב $\mathbb{R}^n$ הוכחנו גם את הטענה ההפוכה: כל סדרת קושי מתכנסת. זה **איננו** נכון במרחבים מטריים באופן כללי.

דוגמאות:

1. $\mathbb{Q}$ ת

2. $(0, 1)$. הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ היא סדרת קושי ב $(0, 1)$, אך היא איננה מתכנסת.

שם(הגדרה)

מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנס נקרא "מרחב מטרי שלם".

דוגמה 2 - סדרה חסומה

סדרה $\{a_n\}$ נקראת **חסומה** אם קיים $M \ni b$ וקיים $R > 0$ כך ש $d(a_n, b) \leq R$ לכל n . ב $\mathbb{R}^n$ לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת. במרחב מטרי דיסקרטי, נבחר סדרה שבה כל איבריה שונים, ולכן המרחק בין כל שני איברים הוא 1 - לכן הסדרה חסומה. אבל גם בכל תת סדרה שלה המרחק בין שני איברים הוא 1, ולכן היא לא יכולה להיות סדרת קושי, ולכן היא לא מתכנסת.

סימון

יהי (M, d) מרחב מטרי, $a \in M$, $r > 0$. נסמן:

$$B(a, r) := \{x \in M | d(x, a) < r\}$$

$B(a, r)$ נקראת "הכדור הפתוח סביב a ברדיוס r ".

כעת ניתן לכתוב: אם $x_n \rightarrow a$ לכל $\epsilon > 0$ יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(a, \epsilon)$.

התכנסות של פונציות

הגדרה

יהיו (M, d) , (N, ρ) שני מרחבים מטריים. תהי $N : M \rightarrow N$ פונקציה, ותהי $a \in M$.

נאמר ש f רציפה ב a אם לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $x \in M$ אם $d(x, a) < \delta$ אז $\rho(f(x), f(a)) < \epsilon$.

ובלשון כדורים: נאמר ש f רציפה ב a אם לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש

$$f(B^M(a, \delta)) \subseteq B^N(f(a), \epsilon)$$

אם $f : M \rightarrow N$ רציפה בכל נקודה $a \in M$, אז אנו קוראים ל f רציפה.

משפט

יהיו (M, d) , (N, ρ) מרחבים מטריים, $f : M \rightarrow N$, $a \in M$. אזי רציפה ב a אם ורק אם לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ שמתכנסת ל a מתקיים ש $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח f רציפה ב a , ותהי סדרה x_n ב M המתכנסת ל a . צ"ל $f(x_n) \rightarrow f(a)$. יהא נתון $\epsilon > 0$. f רציפה ב a , לכן יש $\delta > 0$ כך ש $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$. $x_n \rightarrow a$, לכן יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(a, \delta)$, ולכן עבור $n \geq n_0$ מתקיים $f(x_n) \in B(f(a), \epsilon)$.

$\Rightarrow$ נניח f לא רציפה ב a . עלינו למצוא סדרה $x_n \rightarrow a$ ובכל זאת $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. f לא רציפה ב a , כלומר לא קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ יש x כך ש $d(x, a) < \delta$ ובכל זאת $\rho(f(x), f(a)) \geq \epsilon$. בפרט זה נכון לכל δ מהצורה $\frac{1}{n}$. כלומר לכל n יש x כך ש $d(x, a) < \frac{1}{n}$ ובכל זאת $\rho(f(x), f(a)) \geq \epsilon$. נבחר x כזה ונקרא לו x_n . מכל הבחירות הללו קיבלנו ביחד סדרה $\{x_n\}$.

נראה ש $x_n \rightarrow a$. $x_n \rightarrow a$ ש $0 \leq d(x_n, a) < \frac{1}{n}$. לכן $d(x_n, a) \rightarrow 0$. לכן $x_n \rightarrow a$. אולם $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$, כי עבור ϵ שלנו, $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$ לכל n .

קבוצות פתוחות

הגדרה

יהי (M, d) מרחב מטרי. תת קבוצה $U \subseteq M$ תקרא "קבוצה פתוחה ב M " אם לכל $x \in U$ יש $\rho > 0$ כך ש $B(x, \rho) \subseteq U$.

¹לפי החומר של אינפי 1

²לפי מה שנלמד בשיעור הזה

דוגמה

קטע פתוח ב- $\mathbb{R}$ הוא קבוצה פתוחה.

טענה

כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה

יהי $B(a, r)$ כדור פתוח, ותהי $x \in B(a, r)$. נסמן $\epsilon = r - d(a, x)$. מהגדרת $B(a, r)$ מתקיים ש- $d(a, x) < r$ ולכן $\epsilon > 0$, ונראה ש- $B(x, \epsilon) \subseteq B(a, r)$. כלומר, צריך להראות שלכל y אם $d(x, y) < \epsilon$ אז $d(a, y) < r$. ואכן, אם $d(a, x) < r$ אז

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + (r - d(a, x)) = r$$

הגדרה

1. $M, \emptyset$ קבוצות פתוחות ב- M .

2. אם $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות ב- M אז גם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ קבוצה פתוחה ב- M .

הוכחה יהי $x \in \bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha$, אזי יש $\alpha \in I$ כך ש- $x \in U_\alpha$. U_α פתוחה ב- M , לכן יש $r > 0$ כך ש- $B(x, r) \subseteq U_\alpha$, לכן ודאי $B(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

3. אם $U_1, U_2, \dots, U_n$ קבוצות פתוחות ב- M (שימו לב, כאן מדובר באוסף סופי) אזי $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ פתוחה ב- M .

הוכחה יהי $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. אזי:

- $x \in U_1$ לכן יש $\epsilon_1 > 0$ כך ש- $B(x, \epsilon_1) \subseteq U_1$
- $x \in U_2$ לכן יש $\epsilon_2 > 0$ כך ש- $B(x, \epsilon_2) \subseteq U_2$

⋮

- $x \in U_n$ לכן יש $\epsilon_n > 0$ כך ש- $B(x, \epsilon_n) \subseteq U_n$

נסמן $r = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. כיוון שזהו אוסף סופי של מספרים חיוביים ממשי, גם המינימום r הוא חיובי ממשי, ולכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $B(x, r) \subseteq U_i$, ולכן $B(x, r) \subseteq U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$.

הרצאה 2

מינוח

אם $x \in M$, סביבה של x פירושו קבוצה פתוחה שכוללת את הנקודה.

טענה

יהיו M, N מרחבים מטריים, $f : M \rightarrow N$, $a \in M$. אזי f רציפה ב- a אם ורק אם לכל סביבה U של $f(a)$ קיימת סביבה V של a כך ש- $f(V) \subseteq U$.

משמעות

ניתן להגדיר את הרציפות באמצעות הקבוצות הפתוחות, ללא צורך במטריקה. אמנם הקבוצות הפתוחות מוגדרות ע"י המטריקה, אבל הן מושג חלש יותר, שכן לא ניתן להגדיר מטריקה לפי קבוצות פתוחות. לכן, גם אם יש לנו רק את המידע החלקי של הקבוצות הפתוחות ואין לנו מטריקה, אפשר להגדיר רציפות. זה יתן לנו את האפשרות להיפטר מהמטריקה ולהישאר רק עם הקבוצות הפתוחות.

הוכחת הטענה

$\Leftarrow$ נניח f רציפה ב- a , ותהי U סביבה של $f(a)$.
 U פתוחה, $f(a) \in U$, לכן יש $\epsilon > 0$ כך ש- $B(f(a), \epsilon) \subseteq U$.
 f רציפה ב- a , לכן יש $\delta > 0$ כך ש- $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon) \subseteq U$.
ניקח $U = B(f(a), \epsilon)$.
 $\Rightarrow$ נניח שמתקיים התנאי על סביבות, ויהי $\epsilon > 0$. $B(f(a), \epsilon)$ היא סביבה של $f(a)$, לכן יש סביבה V של a כך ש- $f(V) \subseteq B(f(a), \epsilon)$.
 V פתוחה, $a \in V$, לכן יש $\delta > 0$ כך ש- $B(a, \delta) \subseteq V$, ונקבל
 $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$

טענה

יהיו M, N מרחבים מטריים, $f : M \rightarrow N$. אזי f רציפה אם ורק אם לכל $u \subseteq N$ פתוחה ב- N מתקיים ש- $f^{-1}(u)$ פתוחה ב- M .

תזכורת: אם $f : A \rightarrow B$ ו- $C \subseteq B$, אזי $f^{-1}(C) := \{a \in A \mid f(a) \in C\}$

במילים - f רציפה אם ורק אם תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

הוכחה

נניח f רציפה ותהי $U \subseteq N$ פתוחה. צ"ל $f^{-1}(U)$ פתוחה.
תהי $a \in f^{-1}(U)$. f רציפה ב- a , לכן לפי הטענה הקודמת יש סביבה V_a של a כך ש- $f(V_a) \subseteq U$. מכאן $V_a \subseteq f^{-1}(U)$.

אם $f : A \rightarrow B$, $C \subseteq B$, אזי $f^{-1}(C) \subseteq A$ ו- $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$ אם $C \subseteq D$.

מכאן נובע ש $f^{-1}(U) = \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a$ (הלמה השימושית, שנוכיח עוד מעט).
כלומר, הצגנו את $f^{-1}(U)$ כאיחוד של קבוצות פתוחות. לכן היא קבוצה פתוחה.

הלמה השימושית (ל"ש) תכף

תהי A קבוצה, ונניח לכל $x \in A$ נתון $x \in E_x \subseteq A$. אזי

$$\bigcup_{x \in A} E_x = A$$

הוכחה

$$\supseteq \quad \text{לכל } x \in A, x \in E_x \text{ לפי ההגדרה, ולכן } x \in \bigcup_{x \in A} E_x.$$

$$\subseteq \quad \begin{aligned} &\text{נניח תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה, ולכל } a \in M \text{ נראה} \\ &\text{ש } f \text{ רציפה ב-} a. \\ &\text{תהא נתונה } a, \text{ ותהא נתונה סביבה } U \text{ של } f(a). \text{ ניקח } V = f^{-1}(U). \text{ היא} \\ &\text{פתוחה, וגם } a \in V, \text{ ומתקיים } f(V) \subseteq U. \end{aligned}$$

הגדרה

שתי מטריקות d, ρ על אותה קבוצה M נקראות שקולות אם קבוצה $U \subseteq M$ היא פתוחה לפי $d \Leftrightarrow U$ היא פתוחה לפי ρ .

דוגמאות למטריקות שקולות

(M, d) מרחב מטרי כלשהו. $(M, 5d)$ - המטריקות שקולות.

טענה

על $\mathbb{R}^n$ המטריקות d^2 (המטריקה האוקלידית) ו d^∞ (מטריקת המקסימום) שקולות.

טענת עזר

עבור $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$B^2(a, r) \subseteq B^\infty(a, r) \quad B^\infty(a, r) \subseteq B^2(a, \sqrt{n}r)$$

הוכחת טענת העזר

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad a = (a_1, \dots, a_n)$$

• הכלה ראשונה

$$\begin{aligned} \text{נניח } x \in B^2(a, r) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_i - a_i)^2 < r^2 \text{ לכל } i. \text{ כלומר} \\ x \in B^\infty(a, r) &\Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - a_i| < r \text{ לכן } |x_i - a_i| < r \end{aligned}$$

• הכלה שנייה

$$\begin{aligned} \text{נניח } x \in B^\infty(a, r) &\Leftrightarrow |x_i - a_i| < r \text{ לכל } i \Leftrightarrow |x_i - a_i|^2 < r^2 \text{ לכל } i \\ x \in B(a, \sqrt{n}r) &\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2} < \sqrt{n}r \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2 < nr^2 \end{aligned}$$

הוכחת הטענה שהמטריקה האוקלידית ומטריקת MAX שקולות

$\Leftarrow$ תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה לפי המטריקה האוקלידית. נראה שהיא גם פתוחה לפי מטריקת MAX.
תהי $a \in U$. כיוון שהיא פתוחה לפי המטריקה האוקלידית, יש $r > 0$ כך ש- $B^2(a, r) \subseteq U$ אזי

$$B^\infty\left(a, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B^2(a, r) \subseteq U$$

$\Rightarrow$ תרגיל

דוגמה למטריקות לא שקולות

המטריקה הדיסקרטית אינה שקולה למטריקה האוקלידית.
מיהן הקבוצות הפתוחות למטריקה הדיסקרטית על קבוצה X ? כל הקבוצות! כי כל נקודון הוא כדור ברדיוס 1 סביב אותה נקודה.
לעומת זאת במטריקה האוקלידית, לכן $r > 0$, $B^2(a, r) \not\subseteq \{a\}$.

קבוצות פתוחות של תת מרחב

האם ידיעת הקבוצות הפתוחות של מרחב נותנת לנו גם את תתי הקבוצות הפתוחות של תת מרחב?
התשובה היא כן

טענה

יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$ תת מרחב.
אזי $U \subseteq A$ קבוצה פתוחה ב- A אם ורק אם יש $W \subseteq M$ קבוצה פתוחה ב- M כך ש- $U = W \cap A$.

טענת עזר

עבור $a \in A$,

$$B^A(a, r) = \{x \in A \mid d(x, a) < r\}$$

$$B^M(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$$

$$B^A = B^M \cap A$$

הוכחת הטענה הראשית

$\Leftarrow$ נניח W פתוחה ב- M . נראה ש- $U = W \cap A$ פתוחה ב- A .
יהי $a \in U$. לכן $a \in W$. לכן יש $r > 0$ כך ש- $B^M(a, r) \subseteq W$.
 $B^A(a, r) = B^M(a, r) \cap A \subseteq W \cap A = U$.

$\Rightarrow$ נניח $U \subseteq A$ פתוחה ב- A . נבנה $W \subseteq M$ פתוחה ב- M כך ש- $U = W \cap A$.
לכל $x \in U$ יש $r_x > 0$ כך ש- $B^A(x, r_x) \subseteq U$. נקבל $\bigcup_{x \in U} B^A(x, r_x) = U$.
 U (ל"ש).
נגדיר $W = \bigcup_{x \in U} B^M(x, r_x)$ - היא פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות. אזי

$$W \cap A = \left(\bigcup_{x \in U} B^M(x, r_x) \right) \cap A = \bigcup_{x \in U} (B^M(x, r_x) \cap A) = \bigcup_{x \in U} (B^A(x, r_x)) = U$$

הערות

- אם $U \subseteq A$ ו- U פתוחה ב- M אז ודאי U פתוחה ב- A , כי $U = U \cap A$.
- אם A פתוחה, ו- $U \subseteq A$ פתוחה ב- A , אז U גם פתוחה ב- M , כי $U = U \cap W$.

הגדרה

יהי M מרחב מטרי. $S \subseteq M$ נקראת סגורה אם S^c פתוחה.

תכונות

מהתכונות של קבוצות פתוחות ומכללי דה-מורגן נקבל:

1. $\emptyset, M$ סגורות.
2. אם $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות אז גם $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ סגורה.
3. אם $S_1, \dots, S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות אז גם $S_1 \cup \dots \cup S_n$ סגורה.

משפט

יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$ תת קבוצה.
 אזי A סגורה ב- M אם"ם היא מקיימת את התכונה הבאה:
 לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב- A , אם הסדרה מתכנסת ב- M אז הגבול שייך ל- A (אם יש $p \in M$ כך ש- $x_n \rightarrow p$ אז $p \in A$)

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח A סגורה, ונניח $\{x_n\}$ סדרת נקודות ב- A כך ש- $x_n \rightarrow p$ (כלשהו).
 נראה ש- $p \in A$.

נניח שלא: $p \in A^c$, $p \in A^c$ פתוחה. לכן יש $r > 0$ כך ש- $B(p, r) \subseteq A^c$. אבל
 $x_n \rightarrow p$ לכן יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(p, r) \subseteq A^c$. מצד שני, $x_n \in A$.
סתירה.

$\Rightarrow$ נניח ש- A לא סגורה, ונראה שלא מתקיים התנאי על סדרות. כלומר נראה שיש
 לפחות סדרה אחת של נקודות ב- A שמתכנסת לנקודה מחוץ ל- A .
 A לא סגורה, לכן A^c לא פתוחה, לכן יש נקודה $p \in A^c$ שעבורה לכל $\epsilon > 0$,
 $B(p, \epsilon) \not\subseteq A^c$. לכל n עבור $\epsilon = \frac{1}{n}$ ניקח נקודה $x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ שאיננה ב- A^c , כלומר $x_n \in A$.
 קיבלנו סדרה $\{x_n\}$ של נקודות ב- A . $d(x_n, p) < \frac{1}{n}$ לכן $x_n \rightarrow p$, אולם $p \notin A$.

תרגיל

יהי M מרחב מטרי. $\{x_i\}$ סדרת נקודות ב- M , $p \in M$.
 אזי $x_n \rightarrow p$ אם"ם לכל סביבה U של p יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

נקודות הצטברות

הגדרה

יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$, $p \in M$.
 p נקראת נקודת הצטברות של A אם לכל $r > 0$ יש $x \in A$ כך ש $0 < d(x, p) < r$.

ניסוחים שקולים

1. לכל $r > 0$ יש $x \in A$ כך ש $d(x, p) < r$.
2. לכל סביבה U של p יש $x \in A$ כך ש $x \in U$.
3. לכל סביבה U של p , $U \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$.
4. לכל סביבה U של p , $(U - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$.

טענה

אם p נקודת הצטברות של A , אז קיימת סדרת נקודות $\{x_n\}$ שכולן שונות מ p וכולן שונות זו מזו כך ש $x_n \rightarrow p$.

הוכחה

- יש $x_1 \in A$ כך ש $x_1 \neq p$, $d(x_1, p) < 1$.
- יש $x_2 \in A$ כך ש $d(x_2, p) < \min\left(\frac{1}{2}, d(x_1, p)\right)$.
- באופן רקורסיבי נבחר $x_n \in A$ כך ש $d(x_n, p) < \min\left(\frac{1}{n}, d(x_{n-1}, p)\right)$.

נקבל סדרה x_n כנדרש.

מסקנה

אם p נקודת הצטברות של A , אז לכל $r > 0$ יש אינסוף נקודות $x \in A$ כך ש $0 < d(x, p) < r$.

הרצאה 3

קומפקטיות (במרחבים מטריים)

הגדרות

נניח M מ"מ נתון.

$$(א) \quad \bigcup_{i \in I} U_i = M \quad \text{כיסוי של } M \text{ זה אוסף } \{U_i\}_{i \in I} \text{ של תת קבוצות ב-} M \text{ כך ש}$$

אומרים כיסוי פתוח אם כל U_i פתוחה ב- M

$$(ב) \quad \bigcup_{j \in J} U_j = M \quad \text{אוסף חלקי } \{U_j\}_{j \in J} \text{ נקרא תת כיסוי של } \{U_i\}_{i \in I} \text{ אם } J \subseteq I \text{ וגם}$$

$$(ג) \quad \gamma_\epsilon := \{B(x, \epsilon)\}_{x \in M} \quad \text{זה מקרה פרטי של כיסוי פתוח עבור } M.$$

$$(ד) \quad \text{אומרים שמספר } \delta > 0 \text{ הוא מספר לבג (Lebesgue) עבור כיסוי פתוח } \{U_i\}_{i \in I} \text{ אם}$$

$$\gamma_\delta = \{B(x, \delta)\}_{x \in M} \text{ את "מעדן" } \{u_i\}_{i \in I} \text{ כי}$$

$$\text{"מעדן"} = \text{"ז"א לכל } B(x, \delta) \text{ קיים } i_0 \in I \text{ כך ש } B(x, \delta) \subseteq U_{i_0}$$

הגדרה של קומפקטיות (Compact Spaces)

אומרים ש- M קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $\alpha = \{U_i\}_{i \in I}$ של M קיים תת-כיסוי סופי.

דוגמאות

1. $\mathbb{R}$ לא קומפקטי.
למשל, $\{U_n = (n, n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ כיסוי פתוח. אבל אין תת כיסוי סופי אחרת נקבל ש- $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ כי $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ וזו סתירה כי $\mathbb{R}$ לא חסום.

2. טענה.
כל מרחב מטרי קומפקטי הוא חסום.¹

הוכחה: ד=נבחר $x_0 \in M$. כיסוי פתוח של M .
 M קומפקטי $\Leftrightarrow$ קיים תת כיסוי סופי. אזי

$$\exists n_0 (= \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}) M = B(x_0, n_0)$$

כי אם קיים תת כיסוי סופי אז $M = B(x_0, n_1) \cup \dots \cup B(x_0, n_m)$
מהשוויון נובע ש- M חסום.

$$M = B(x, r) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in M \exists r > 0 \quad \forall y \in M d(x, y) \leq r$$

משפט

נניח (M, d) מרחב מטרי. התנאים הבאים שקולים:

1. M קומפקטי
2. לכל תת קבוצה אינסופית $M \supseteq E$ קיימת נקודת הצטברות של E .
3. לכל סדרה ב M יש תת סדרה מתכנסת

הוכחה

$2 \Leftarrow 1$ נניח בשלילה ש 2 לא מתקיים, ז"א קיימת תת קבוצה אינסופית $M \supseteq E$ ללא נקודות הצטברות. לכן, לכל $x \in M$ קיים $0 < \epsilon_x$ כך ש

$$B(x, \epsilon_x) \cap E \setminus \{x\} = \emptyset$$

$$B(x, \epsilon_x) \cap E = \begin{cases} \{x\} & x \in E \\ \emptyset & x \notin E \end{cases} \quad \text{מכאן}$$

$$\{B(x, \epsilon_x)\}_{x \in M} \text{ כיסוי פתוח של } M.$$

$$\bigcup_{x \in M} B(x, \epsilon_x) = M$$

בגלל הקומפקטיות של $M \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי, ז"א קיימים $M \ni x_1, x_2, \dots, x_m$ כך ש

$$\bigcup_{i=1}^m B(x_i, \epsilon_{x_i}) = M$$

$$\bigcup_{i=1}^m (E \cap B(x_i, \epsilon_{x_i})) = E \cap M = E$$

$\Downarrow$

$|E| \leq m < \infty$ העצמה, לכן E קבוצה סופית וזו סתירה.

$3 \Leftarrow 2$ נניח $\{x_n\}$ סדרה נתונה ב M . צ"ל קיימת תת סדרה מתכנסת.

אם יש מספר סופי של ערכים בסדרה, אז יש לפחות ערך אחד שמופיע אינסוף פעמים, לכן באופן טריוויאלי אפשר לבחור תת סדרה קבועה (והיא כמובן מתכנסת). לכן בה"כ אפשר להניח שיש אינסוף ערכים. נסמן ב E ערכים של הסדרה. E קבוצה אינסופית. לפי נתון 2 קיימת נקודת הצטברות $M \ni p$ עבור קבוצה E .

$$\left| B\left(p, \frac{1}{m}\right) \cap E \setminus \{p\} \right| \geq \aleph_0$$

ניתן לבנות תת סדרה של איברים שונים זה מזה:

$$\exists x_{n_1} \in B\left(p, \frac{1}{1}\right) \cap (E \setminus \{p\})$$

$$\exists x_{n_2} \in B\left(p, \frac{1}{2}\right) \cap (E \setminus \{p\}) \quad x_{n_2} \neq x_{n_1}, n_2 > n_1$$

$$\exists x_{n_3} \in B\left(p, \frac{1}{3}\right) \cap (E \setminus \{p\}) \quad x_{n_3} \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}\}, n_3 > n_2$$

נמשיך כך ואז נקבל תת סדרה

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$$

של $\{x_n\}$ כך ש $x_{n_k} \xrightarrow{M} p$, כי $\underline{\text{כל}}$ כדור של p מכיל כמעט את כל האיברים של $\{x_{n_k}\}$ לפי הבנייה.

נניח $\{U_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של M . צ"ל שיש תת כיסוי סופי. $1 \Leftarrow 3$

של I נוכיח שקיים מספר לבג $0 < \delta$ עבור $\{U_i\}_{i \in I}$.
ז"א נוכיח שקיים $0 < \delta$ כך ש $\gamma_\delta = \{B(x, \delta)\}_{x \in M}$ עידון של $\{U_i\}$. ז"א:

$$\exists \delta > 0 \left[\forall x \in M \exists i_0 \in I B(x, \delta) \subseteq U_{i_0} \right]$$

נניח בשלילה שזה לא מתקיים:

$$\left(\forall \frac{1}{n} \right) \forall n \left[\exists x_n \in M \forall i \in I B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq U_i \right]$$

קיבלנו סדרה $\{x_n\}$ ב M .

לפי 3 $\Leftarrow$ קיימת תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}$. ז"א קיים $M \ni p$ כך ש $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{M} p$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M \ni p$$

$\Downarrow$

$$\exists i_0 \in I p \in U_{i_0}$$

נתון U_{i_0} קבוצה פתוחה. לכן קיים $\epsilon > 0$ כך ש

$$B(p, \epsilon) \subseteq U_{i_0}$$

ניקח n_k מספיק גדול כך שמתקיים

$$\begin{cases} \frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2} \\ d(x_{n_k}, p) < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq U_{i_0}} \quad \text{אז מתקיים}$$

$$\begin{cases} d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2} \\ d(x_{n_k}, p) < \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \quad \text{הסבר:}$$

ומאי שוויון המשולש נקבל $d(x, p) < \epsilon$

$$x \in B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \Rightarrow x \in B(p, \epsilon)$$

$$\Downarrow B(p, \epsilon) \subseteq U_{i_0}$$

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq U_{i_0}$$

$$\Leftarrow \text{סתירה} \Leftarrow \text{הוכחנו את שלב } I, \text{ ז"א יש מספר לבג } \delta > 0.$$

שלב II

נתון 3, צ"ל 1 (קומפקטיות).

נניח בשלילה ש M לא קומפקטי. ז"א קיים כיסוי פתוח $\alpha =$

$\{U_i\}_{i \in I}$ בלי תת-כיסוי סופי.

לפי שלב I קיים מספר לבג. נניח הוא $\delta > 0$ $\Leftarrow \gamma_\delta = \{B(x, \delta)\}_{x \in M}$

$(\alpha$

נבחר $x_1 \in M$

$$\exists x_2 \notin B(x_1, \delta)$$

$$\exists x_3 \notin B(x_1, \delta) \cup B(x_2, \delta)$$

$$\exists x_4 \notin B(x_1, \delta) \cup B(x_2, \delta) \cup B(x_3, \delta)$$

נמשיך כך:

$$\exists x_{n+1} \notin B(x_1, \delta) \cup \dots \cup B(x_n, \delta)$$

קיים לכל n כי אחרת נקבל $M = B(x_1, \delta) \cup \dots \cup B(x_n, \delta)$

לפי הגדרת מס' לבג לכל $x_k, 1 \leq k \leq n$ קיים $U_{i_k} \in \alpha$ כך

$$\boxed{B(x_k, \delta) \subseteq U_{i_k}} \text{ שנקבל:}$$

$$M = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

ז"א $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}\}$ תת-כיסוי סופי של M , בסתירה לבחירת

$$\alpha. \text{ לכן קיבלנו סדרה } \{x_n\} \text{ עם התכונה } \boxed{d(x_i, x_j) \geq \delta, i \neq j}$$

אין תת סדרה מתכנסת(אין תת סדרת קושי!) לכן 3 לא נכון - ■

הערה

לפי המשפט הקודם 1,2,3 שקולים. לכן בכל מרחב קומפקטי מטרי לכל כיסוי פתוח קיים מספר לבג.

טענה

נניח (M, d) מרחב מטרי, (Y, d_Y) תת מרחב מטרי(כלומר $Y \subseteq M, d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$). אם (Y, d_Y) מרחב קומפקטי אזי Y תת קבוצה סגורה ב- M .

הוכחה

נניח בשלילה ש- Y לא סגורה במרחב M . ז"א Y לא סגורה ב- M לגבי הגבולות. לכן קיימת סדרה $Y \ni y_n$ כך שקיים $\begin{cases} y_n \xrightarrow{M} p \in M \\ p \notin Y \end{cases}$ קומפקטי $Y \Leftarrow Y$ "קומפקטי סדרתית" (ז"א מתקיים 3 במשפט) $\Leftarrow$ קיימת תת סדרה $\{y_{n_k}\}$ מתכנסת ב- (Y, d_Y) . אז $y_{n_k} \xrightarrow{M} q$ (כי $d_Y = d|_Y$). נקבל שיש 2 גבולות שונים $Y \ni q \neq p \notin Y$ לאותה סדרה $\{y_{n_k}\}$ - סתירה ■ $\Leftarrow$

משפט Heine-Borel

נניח $M \subseteq \mathbb{R}^n$. התנאים שקולים:

1. M קומפקטי(כתת מרחב)

2. M חסום וסגור(כתת קבוצה במרחב $\mathbb{R}^n$)

הוכחה

$2 \Leftarrow 1$ שילוב של 2 טענות שהוכחנו!

$2 \Rightarrow 1$ צ"ל 1 קומפקטיות. שקול לקומפקטיות סדרתית(בגלל המשפט). נניח סדרה $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ב- M .

$$\boxed{v_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)}_{k \in \mathbb{N}} \Leftarrow \forall_k \|v_k\| \leq c < \infty \text{ קבוע כך ש-} 0 < c < \infty \text{ חסום } M$$

סדרה ב- M .
 לפי משפט בולצנו ווירשטראס קיימת תת סדרה מתכנסת $\{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. בהתאמה
 נקבל תת סדרה של $\{v_k\}$. נמשיך באופן דומה עבור רכיב שני.
 אם נמשיך בתת סדרה שהתקבלה בצורה כזאת, אחרי n צעדים נקבל תת סדרה
 מסויימת של $\{v_{k_m}\}$ של $\{v_k\}$. נקבל ש- $\{v_{k_m}\}$ סדרה של n חיות שמתכנסת
 רכיב רכיב. לכן בגלל התאור של התכנסות ב- $\mathbb{R}^n$ (או לפי בדיקה פשוטה) נקבל
 שהסדרה היא מתכנסת ב- $\mathbb{R}^n$.
 בגלל הסגירות של M , מתכנסת גם ב- M .

תרגיל

1. להוכיח שספירה ב- $\mathbb{R}^n$ קומפקטית.
 2. למצוא מרחב מטרי M ותת קבוצה $Y \subseteq M$ חסומה וסגורה לא קומפקטית.
- רמז: מרחב דיסקרטי אינסופי...

הרצאה 4

הגדרה

מרחב טופולוגי (X, T) הוא קבוצה X ומשפחה T של תתי קבוצות של X , המקיימת:

1. $\emptyset, X \in T$

2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף קבוצות כך ש $U_\alpha \in T$ לכל $\alpha \in I$, אז גם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in T$

3. אם $U_1, U_2, \dots, U_n$ אוסף סופי של קבוצות כך ש $U_i \in T$ לכל $1 \leq i \leq n$ אז גם $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \in T$

במקרה כזה, T תיקרא טופולוגיה על X , והקבוצות ב T יקראו קבוצות פתוחות ב X .

דוגמאות למרחבים טופולוגיים

1. (X, d) מרחב מטרי T אוסף הקבוצות הפתוחות המוגדרות באמצעות המטריקה d .
 T אז נקראת הטופולוגיה המושרה ע"י המטריקה d .

2. X קבוצה כלשהי, $T = \{\emptyset, X\}$. זו נקראת הטופולוגיה הטריווילית על X .

3. לכל קבוצה X אפשר לקחת $T = P(X)$. זו נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית על X .

הגדרה

(X, T) יקרא מטריזבילי אם יש מטריקה d על הקבוצה X כך ש d משרה את T .

טענה

הטופולוגיה הדיסקרטית היא מטריזבילית.

הוכחה

קחו את המטריקה הדיסקרטית.

אם ב X יותר מנקודה אחת אז המטריקה הטריווילית איננה מטריזבילית.
נראה שכל מטריקה על X משרה טופולוגיה שאיננה הטופולוגיה הטריווילית. ניקח
 $a \neq b \in X$ כלשהם. נסמן $r = d(a, b)$ ונביט בקבוצה $U = B(a, r)$:

• U קבוצה פתוחה כי היא כדור פתוח

• $a \in U$ כי $U \neq \emptyset$

• $b \notin U$ כי $U \neq X$

תרגיל

יהי (M, d) מרחב מטרי. אזי לכל $a \in M$ הקבוצה $\{a\}$ סגורה או במילים אחרות $M - \{a\}$ פתוחה. מכאן שיש לנו $|\mathbb{N}|$ קבוצות בנות פתוחות כי האוסף $\{M - \{a\}\}_{a \in M}$ הוא מהעוצמה הזאת.

דוגמה

$$T = \left\{ A \subseteq X \mid \begin{array}{c} |X - A| < \infty \\ \vee \\ A = \emptyset \end{array} \right\}$$

5. תהי X קבוצה, ונגדיר

תרגיל: (א) זוהי טופולוגיה
(ב) עבור X אינסופית X איננה מטריזבילית

הגדרה

יהיו (Y, S) , (X, T) שני מרחבים טופולוגיים.
 $f : X \rightarrow Y$ תקרא רציפה אם לכל $U \in S$ מתקיים $f^{-1}(U) \in T$
 במילים: לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X .
 עוד יותר במילים: תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

טענה

אם (X, T_1) , (Y, T_2) , (Z, T_3) שלושה מרחבים טופולוגיים.
 אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה ו- $g : Y \rightarrow Z$ רציפה אז גם $g \circ f : X \rightarrow Z$ רציפה.

הוכחה

תהי $U \subseteq Z$ פתוחה. אזי

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

פתוחה ב- X .

טענה

1. לכל מרחב טופולוגי (X, T) העתקת הזהות $\text{Id} : X \rightarrow X$ רציפה.

הוכחה: תהי $U \subseteq X$ פתוחה ב- X . אזי $\text{Id}^{-1}(U) = U$ לכן כמובן פתוחה ב- X .

2. יהיו X, Y מ"ט, $b \in Y$. נגדיר $K_b : X \rightarrow Y$ ע"י לכל $x \in X$, $K_b(x) := b$. זו נקראת פונקציה קבועה שערכה הקבוע הוא b .

טענה: K_b רציפה

$$K_b^{-1}(U) = \begin{cases} X & b \in U \\ \emptyset & b \notin U \end{cases}$$

הוכחה: תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. אזי

הגדרה

יהי X מ"ט, $a \in X$.
 $U \subseteq X$ נקראת סביבה של a אם U פתוחה ו $a \in U$.

הגדרה

יהיו X, Y מ"ט, $f : X \rightarrow Y$, $xa \in X$.
אזי f תקרא רציפה ב a אם לכל סביבה U של $f(a)$ יש סביבה V של a כך ש $f(V) \subseteq U$.

טענה

$f : X \rightarrow Y$ רציפה אם"ם היא רציפה בכל נקודה $x \in X$.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח f רציפה. תהי $a \in X$. תהי U סביבה של $f(a)$. אזי $f^{-1}(U)$ סביבה של a , ומתקיים $f^{-1}(U) \subseteq U$.

$\Rightarrow$ תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. נראה ש $f^{-1}(U)$ פתוחה ב X . תהי $a \in f^{-1}(U)$. כלומר $f(a) \in U$. לכן קיימת סביבה V_a של a כך ש $f(V_a) \subseteq U$, כלומר $V_a \subseteq f^{-1}(U)$. כעת מהלמה השימושית

$$\bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a = f^{-1}(U)$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.

הגדרה

יהי (X, T) מ"ט ותהי $A \subseteq X$.
טופולוגיית "תת המרחב" על A מוגדרת באופן הבא:
נגדיר אוסף $S \subseteq P(A)$ באופן הבא:

$$S = \{u \subseteq A \mid \exists V \in T, U = V \cap A\}$$

טענה

S היא טופולוגיה על A

הוכחה

$$1. \bullet \emptyset = \emptyset \cap A \text{ כי } \emptyset \in S$$

$$\bullet A = X \cap A \text{ כי } A \in S$$

2. נניח $\{U_\alpha\}$ אוסף כך שלכל $\alpha \in S$. כלומר לכל α יש $V_\alpha \in T$ כך ש $U_\alpha = V_\alpha \cap A$ אזי

$$\bigcup U_\alpha = \bigcup (V_\alpha \cap A) = \left(\bigcup V_\alpha \right) \cap A \in S$$

3. נניח $U_1, \dots, U_n \in S$. כלומר לכל i יש $V_i \in T$ כך ש $U_i = V_i \cap A$

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (V_i \cap A) = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i \right) \cap A \in S$$

הגדרה

$A \subseteq X$. מוגדרת העתקת ההכלה $i : A \rightarrow X$ ע"י $i(a) = a$

טענה

אם X מ"ט ו $A \subseteq X$ תת מרחב, אזי העתקת ההכלה $i : A \rightarrow X$ רציפה.

הוכחה

תהי $U \subseteq X$ פתוחה ב X .

$$i^{-1}(U) = U \cap A$$

ולכן פתוחה ב A .

הגדרה

אם $f : X \rightarrow Y$ ו $A \subseteq X$ נגדיר $f|_A : A \rightarrow Y$ ע"י $f|_A(a) := f(a)$. מתקיים ש $f|_A = f \circ i$

טענה

אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה, $A \subseteq X$, אז $f|_A : A \rightarrow Y$ רציפה.

הוכחה

$f|_A = f \circ i$ ולכן רציפה.

משפט

יהיו X, Y מ"ט, $f : X \rightarrow Y$ רציפה, $f(X) \subseteq B \subseteq Y$. אזי ניתן להגדיר $\hat{f} : X \rightarrow B$ ע"י $\hat{f}(x) = f(x)$. אזי גם $\hat{f}$ רציפה.

הוכחה

תהי $U \subseteq B$ פתוחה ב- B . צ"ל $\hat{f}^{-1}(U)$ פתוחה ב- X .
 $U = V \cap B$ פתוחה ב- Y ש- $V \subseteq Y$ פתוחה ב- Y כך ש- $U = V \cap B$

$$\hat{f}^{-1}(U) = \{x \in X \mid \hat{f}(x) \in U\} = \{x \in X \mid f(x) \in U = V \cap B\} = \{x \in X \mid f(x) \in V\} = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{open}}$$

לכל $x \in X$ מתקיים ממילא ש- $f(x) \in B$, לכן $f(x) \in V \cap B$ אם $f(x) \in V$.

הערה

למעשה הטענה היא אם $\hat{f}$ רציפה (כהעתקה ל- B) אזי f היא רציפה כהעתקה ל- Y , כי $f = i \circ \hat{f}$

הגדרה

יהי X מ"ט. $K \subseteq X$ תיקרא סגורה אם K^c פתוחה.

תכונות

מהגדרת טופולוגיה נקבל את התכונות הבאות של קבוצות סגורות:

1. $\emptyset, X$ סגורות
2. אם $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות אזי $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ קבוצה סגורה.
3. אם $S_1, \dots, S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות אזי $\bigcap_{1 \leq i \leq n} S_i$ קבוצה סגורה.

הרצאה 5

הגדרה

יהי X מ"ט, $A \subseteq X$.
הפנים של A , שמשומן $\overset{\circ}{A}$ מוגדר כך:

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ is open}}} U$$

תכונות

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$

2. $\overset{\circ}{A}$ פתוחה

3. אם $U \subseteq A$ פתוחה, אז $\overset{\circ}{A} \subseteq U$ (כלומר $\overset{\circ}{A}$ הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת ב- A)

שלושת התכונות הללו מאפיינות את $\overset{\circ}{A}$.
ע"י מעבר למשלימים:

$$\overset{\circ}{A} = \left(\overline{(A^c)} \right)^c$$

הוכחה: תרגיל

הגדרה

יהי X מ"ט, $A \subseteq X$.
 $\overline{A}$ יקרא צפוף ב- X אם $\overline{A} = X$.
כלומר A צפופה ב- X אם כל קבוצה פתוחה לא ריקה חותכת את A .

X מ"ט, $A \subseteq B \subseteq X$.

• ניתן להביט בסגור של A ב- X אותו נסמן כעת $\overline{A}^X$

• ניתן להביט בסגור של A ב- B אותו נסמן כעת $\overline{A}^B$

מה הקשר בין $\overline{A}^B$ ל- $\overline{A}^X$?

$$\overline{A}^B = \bigcap_{\substack{A \subseteq S \subseteq B \\ S \text{ is close in } B}} S = \bigcap_{\substack{Q \text{ is close in } X \\ A \subseteq Q}} Q = \left(\bigcap_{\substack{Q \text{ is close in } X \\ A \subseteq Q}} Q \right) \cap B = \overline{A}^X \cap B$$

(בחיתוך השני, לכאורה היינו צריכים לכתוב $A \subseteq Q \cap B$, אולם $A \subseteq Q \cap B$ אם $A \subseteq Q$)

דוגמה

$$X = \mathbb{R} \quad B = (0, 1) \quad A = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{A}^X = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \overline{A}^B = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

עוד דוגמה

$$\begin{array}{ccccc} A & \subseteq & B & \subseteq & X \\ (0, 1) \cap \mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\overset{\circ}{A}^X = \emptyset \quad \overset{\circ}{A}^B = A$$

הערה

$\overset{\circ}{A} = A$ פתוחה אם"ס
(דומה לטענה בשבוע שעבר ש A סגורה אם"ס $\overline{A} = A$)

טענה

$$\overset{\circ}{A}^B \supseteq \overset{\circ}{A}^X$$

הוכחה

אם $U \subseteq A$ פתוחה ב X , אז ודאי U פתוחה ב B . לכן האוסף המשותף באיחוד המגדיר את $\overset{\circ}{A}^X$ מוכל באוסף המשותף באיחוד המגדיר את $\overset{\circ}{A}^B$.

טענה

$$A \subseteq B \subseteq X$$

אזי A צפופה ב B אם"ס $\overline{A}^X \supseteq B$

הוכחה

A צפופה ב B אם $\bar{A}^B = B$, אם $\bar{A}^X \cap B = B$ אם $\bar{A}^X \supseteq B$.

הגדרה

כיסוי פתוח של X הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות פתוחות ב X כך ש $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$

משפט

יהיו X, Y מ"ט, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X , $f : X \rightarrow Y$ פונקציה. אזי f רציפה אם $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow Y$ רציפה לכל $\alpha \in I$.

פתרון

$\Leftarrow$ אם $f|_{U_\alpha}$ רציפה אז f רציפה לכל α .

$\Rightarrow$ נניח $f|_{U_\alpha}$ רציף לכל α . נראה ש f רציף. תהי $U \subseteq Y$ פתוחה, צ"ל $f^{-1}(U)$ פתוחה. מתקיים:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} (f|_{U_\alpha})^{-1}(U)$$

כיוון ש $f|_{U_\alpha}$ רציפה, $(f|_{U_\alpha})^{-1}(U)$ פתוחה ב U_α . אולם U_α פתוחה ב X , ולכן $(f|_{U_\alpha})^{-1}(U)$ פתוחה גם ב X , ולכן האיחוד $\bigcup_{\alpha \in I} (f|_{U_\alpha})^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה ב X .

משפט

נניח $S_1, \dots, S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות ב X כך ש $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = X$. $f : X \rightarrow Y$ רציפה אם $f|_{S_i} : S_i \rightarrow Y$ רציפה לכל $1 \leq i \leq n$.

הוכחה

כמו המשפט הקודם, שכן התנאי שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה שקול לתנאי שקבוצה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.

הגדרה

מ"ט X נקרא קשיב אם לא קיימות $U, V \subseteq X$ פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש $U \cup V = X$.

הגדרות שקולות

- X קשיב אם לא קיימות קבוצות K, L סגורות זרות ולא ריקות כך ש $K \cup L = X$
- X קשיב אם לא קיימת $\emptyset \neq A \neq X$ כך ש A פתוחה וגם סגורה.

הגדרה (לעת עתה)

נאמר שמ"ט מקיים את תכונת ערך הביניים אם לכל פונקציה רציפה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ולכל $a, b \in X$, אם $f(a) < t < f(b)$ אז יש $c \in X$ כך ש $f(c) = t$.

דוגמה

$\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ערך הביניים.

משפט

X מקיים את תכונת ערך הביניים אם X קשיר.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח X לא מקיים את תכונת ערך הביניים. כלומר קיימת $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ וקיימים $a, b \in X$ וקיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש $f(a) < t < f(b)$ ולכל $x \in X$, $f(x) \neq t$.
נגדיר $U = f^{-1}((t, \infty))$, $V = f^{-1}((-\infty, t))$. אזי U, V פתוחות לא ריקות:
כי $a \in V$, $b \in U$ זרות נכי $(-\infty, t), (t, \infty)$ זרות ואיחודן כל X , כי הנחנו שלכל $x \in X$, $f(x) \neq t$.
 $X \Leftarrow f(x) \neq t$ לא קשיר.

$\Rightarrow$ נניח X לא קשיר. יהיו U, V פתוחות זרות לא ריקות כך ש $U \cup V = X$.
נגדיר $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

f רציפה מהמשפט על "צמצום פונקציה לכיסוי פתוח". מכאן ש X לא מקיים את תכונת ערך הביניים.

דוגמה

$\mathbb{Q}$ לא קשיר
דוגמה ל U, V :

$$U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \quad V = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$$

משפט

$\mathbb{R}$ קשיר

הוכחה

השקילות שהוכחנו קודם +משפט ערך הביניים משנה א'

טענה

X קשיר אם"ם לא קיימת פונקציה רציפה מ- X על מרחב דיסקרטי בין שתי נקודות.

הוכחה

זהה לשקילות שהוכחנו קודם.

הערה

הסיבה שקודם הוכחנו שקילות שבה מופיעים העתקים ל- $\mathbb{R}$ היא רק כדי לקשר למשפט ערך הביניים משנה א'.

משפט

יהיו X, Y מ"ט, X קשיר, $f : X \rightarrow Y$ רציפה ועל Y . אזי Y קשיר.

הוכחה

נניח בשלילה Y לא קשיר. כלומר קיימות $U, V \subseteq Y$ פתוחות זרות לא ריקות כך ש- $U \cup V = Y$. אזי $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subseteq X$ הם פתוחות (כי f רציפה), זרות (כי U, V זרות), לא ריקות (כי U, V לא ריקות ו- f על), וכן $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$, כי

$$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(Y) = X$$

סתירה לקשירות X .

נקבל כמסקנה משפט

יהיו X, Y מ"ט, X קשיר, $f : X \rightarrow Y$ רציפה. אזי $f(X)$ מרחב קשיר.

הוכחה

ע"י צמצום הטווח נקבל פונקציה $f : X \rightarrow f(X)$, והיא גם על.

במילים: תמונה רציפה של מרחב קשיר היא מרחב קשיר.

סיפור

נניח שאנו מעוניינים להראות ש- X קשיר, והצלחנו רק להראות שאיזהשהם תתי מרחבים של X הם קשירים. מתי נוכל להסיק מכך ש- X כולו קשיר?

למה קטנה

יהי X מ"ט, U, V קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות כך ש- $U \cup V = X$, ונניח $A \subseteq X$ תת מרחב קשיר. אזי $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$

הוכחה

נניח בשלילה שלא, אזי $A \cap U \neq \emptyset$ וגם $A \cap V \neq \emptyset$. אזי הזוג $A \cap U$ וגם $A \cap V$ סותרים את קשירות A .
(אלה שתי קבוצות A פתוחות ב A זרות ולא ריקות שאיחודן A)

טענה 1

יהי X מ"ט, אזי X קשיר אם"ם לכל $a, b \in X$ יש תת מרחב קשיר A כך ש $a, b \in A$.

הוכחה

$\Rightarrow$ נניח בשלילה ש X לא קשיר. אזי יש U, V פתוחות זרות לא ריקות כך ש $U \cup V = X$. ניקח $a \in U, b \in V$. מההנחה יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש $a, b \in A$. מצד שני מהלמה $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$ - סתירה.
 $\Leftarrow$ נניח X קשיר אזי לכל $a, b \in X$ ניקח $A = X$.

טענה 2

אם $A, B \subseteq X$, A, B קשירים, $A \cap B \neq \emptyset$ אזי $A \cup B$ קשיר.

הוכחה

נניח בשלילה $A \cup B$ לא קשיר. אזי יש שתי קבוצות פתוחות ב $A \cup B$ זרות ולא ריקות כך ש $U \cup V = A \cup B$. אזי מהלמה עבור $A \cup B$ מתקיים $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$, ובאותו אופן $B \subseteq U$ או $B \subseteq V$.
האם ייתכן ש $A \subseteq U$ וגם $B \subseteq U$? לא! כי את $A \cup B \subsetneq A \cup B$. מכאן בה"כ $A \subseteq U, B \subseteq V$ - סתירה לכך ש $A \cap B \neq \emptyset$.

משפט

יהי X מ"ט המקיים את התכונה הבאה: לכל $a, b \in X$ יש אוסף סופי $A_1, \dots, A_n$ של תתי מרחבים קשירים של X כך ש

$$a \in A_1 \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset, \dots, A_{n-1} \cap A_n \neq \emptyset \quad b \in A_n$$

אזי X קשיר.

הוכחה

לפי הטענה הקודמת, $A_1 \cup A_2$ קשיר, ולכן גם $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ קשיר, וכן הלאה. בסופו של דבר נקבל ש $A_1 \cup \dots \cup A_n$ קשיר. מתקיים: $a, b \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ לכן מהטענה הראשונה X קשיר.

מסקנה

אם X מ"ט, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של תתי מרחבים קשירים כך ש

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = X \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

אזי X קשיר.

הוכחה

נשתמש בטענה הקודמת.

יהיו $a, b \in X$. יש α כך ש $a \in A_\alpha$. יש β כך ש $b \in A_\beta$. $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ (כי החיתוך לא ריק) מכאן שמתקיים התנאי של הטענה המקורית עם השרשרת A_α, A_β .

משפט

יהי X מ"ט, $A \subseteq X$ קבוצה צפופה שהיא תת מרחב קשיר. אזי X קשיר.

הוכחה

נניח בשלילה ש X לא קשיר. אזי יש U, V פתוחות זרות ולא ריקות כך ש $U \cup V = X$. נביט ב $U \cap A, V \cap A$. הן פתוחות ב A , זרות, איחודן A . שתיהן לא ריקות כי A צפוף.

משפט

הקטעים למיניהם ב $\mathbb{R}$ הם כולם קשירים

למשל

$$(-\infty, b] \quad (a, \infty) \quad (a, b] \quad [a, b)$$

הוכחה

כבר הוכחנו ש $(-\infty, \infty)$ קשיר. $(-\infty, \infty)$ הומאומורפי לכל הקטעים הפתוחים למיניהם, לכן גם אלה קשירים.

מדוע $[a, b]$ קשיר? נביט ב $\underbrace{(a, b)}_A \subseteq \underbrace{[a, b]}_B$.

$$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \quad \overline{A}^{\mathbb{R}} \supseteq B$$

A קשירה ו A צפופה ב B , לכן B קשיר.

טענה

$(c, d), [a, b]$ לא הומאומורפיזם.

הוכחה

נניח בשלילה שיש הומאומורפיזם

$$h : [a, b] \rightarrow (c, d)$$

כלומר h רציפה, וקיימת g רציפה $g : (c, d) \rightarrow [a, b]$ כך ש $g \circ f = \text{Id}$ $f \circ g = \text{Id}$.

רעיון טופולוגי להמשך

- עבור $(*, *)$, יש בדיוק נקודה אחת שאם זורקים זה נשאר קשיר

- עבור $(*, *)$, אין אף נקודה שאם זורקים זה נשאר קשיר

- עבור $[*, *]$, יש בדיוק שתי נקודות שאם זורקים זה נשאר קשיר

בגלל ההבדל הטופולוגי הזה הקטעים לא הומאומורפיזם.

הרצאה 6

כדי להראות ששני מרחבים טופולוגיים הם הומיאומורפים, מספיק למצוא הומיאומורפיזם. כדי להראות שהם לא הומיאומורפים, צריך להוכיח שלא יכול להיות ביניהם הומיאומורפיזם. ניתן לעשות זאת על ידי מציאת תכונה טופולוגית שיש באחד ואין בשני.

דוגמה

דוגמה לתכונה טופולוגית כזו היא קשירות.

$$(0, 1) \quad [0, 1) \quad [0, 1]$$

בכל אחד מהם יש מספר נקודות שונה שניתן לזרוק אותן ולשמור על קשירות, ולכן הם לא הומיאומורפים.

ההוכחה בצורה פורמלית

נניח בשלילה שיש הומיאומורפיזם $h : [a, b] \rightarrow (c, d)$. כלומר h רציפה וקיימת g רציפה $g : (c, d) \rightarrow [a, b]$ כך ש

$$g \circ h = \text{Id}_{[a,b]} \quad h \circ g = \text{Id}_{(c,d)}$$

נביט בצמצום

$$h|_{(a,b)} : (a, b) \rightarrow (c, d)$$

אזי ע"י צמצום הטווח נקבל

$$h|_{(a,b)} \left(\underbrace{(a, b)}_{\text{connected}} \right) = \underbrace{(c, d) - h(a)}_{\text{disconnected}}$$

בסתירה לכך שהתמונה של מרחב קשיר צריכה להיות מרחב קשיר.

באופן כללי

אם יש שני מרחבים טופולוגיים X, Y , מניחים שיש הומיאומורפיזם $h : X \rightarrow Y$, ועבור קבוצה $A \subseteq X$ כלשהי מצמצמים את התחום

$$h|_{X-A} : X - A \rightarrow Y$$

ואחרי זה מצמצמים גם את הטווח

$$h|_{X-A} : X - A \rightarrow Y - h(A)$$

זהו הומיאומורפיזם כי

$$g|_{Y-h(A)} : Y - h(A) \rightarrow X - A$$

רציפה, וההרכבה בשני הכיוונים היא $\text{Id}_{X-A}, \text{Id}_{Y-h(A)}$.

כמה מילים על המבחן

- יופיעו משפטים מהכיתה. צריך לדעת להוכיח כל מה שלמדנו בכיתה.
- יהיו שאלות משיעורי בית

בנייה/הגדרה

יהי X מ"ט. נגדיר על X את יחס השקילות הבא:
 $a, b \in X$, אז $a \sim b$ אם קיים תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ כך ש $a, b \in A$.
 זהו אכן יחס שקילות:

1. רפלקסיביות - לכל $a \in X$, $a \in \{a\}$, ובהגדרה קשיר, לכן $a \sim a$

2. סימטריות - טריוויאלי

3. טרנזיטיביות - לכל $a, b, c \in X$ כך ש $a \sim b, b \sim c$, קיימים A, B קשירים כך ש $a, b \in A, b, c \in B$, ואז $a, c \in A \cup B$ קשיר שכן A, B קשירים ו $A \cap B \neq \emptyset$.
 שכן $b \in A \cap B$.

מחלקות השקילות של יחס השקילות $\sim$ נקראים מרכיבי הקשירות של X .

תכונות

1. אם $A \subseteq X$ קשיר אז A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות של X , כי לכל $a, b \in A$ מתקיים $a \sim b$, כלומר על הנקודות ב A שקולות זו לזו, לכן A מוכל באחת ממחלקות השקילות, כלומר באחד ממרכיבי הקשירות.

2. מרכיבי הקשירות הם קשירים: נניח C מרכיב קשירות של X , ונניח $a, b \in C$, כלומר $a \sim b$, כלומר יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש $a, b \in A$. מתכונה (1) מוכל באחד ממרכיבי הקשירות, וכיוון ש $A \cap C \neq \emptyset$ (נמצאים שם) בהכרח המרכיב הזה הוא C עצמו. קיבלנו שלכל $a, b \in C$ יש תת מרחב $A \subseteq C$ קשיר כך ש $a, b \in A$. לפי טענה מהשיעור הקודם נובע ש C קשיר.

מסקנת ביניים

מרכיבי הקשירות הם תתי המרחבים הקשירים המקסימליים ב X (כלומר כל תת מרחב קשיר מוכל באחד מהם)

בפרט מסקנה

אם C מרכיב קשירות ו $A \not\supseteq C$ אז A לא קשיר.

3. מרכיבי הקשירות הם קבוצות סגורות

הוכחה

יהי C מרכיב קשירות. אז C צפוף ב $\overline{C}$, לכן $\overline{C}$ קשיר. $\overline{C} \supseteq C$, מכאן $\overline{C} = C$ כלומר C סגור.

4. אם יש רק מספר סופי של מרכיבי קשירות אז הם גם פתוחים.

הוכחה

נניח $C_1, \dots, C_n$ הם מרכיבי הקשירות של X . תכונה 3 אומרת שכל C_i הוא קבוצה סגורה.

$$C_i = \left(\bigcup_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} C_k \right)^c$$

האיחוד הזה הוא איחוד סופי של קבוצות סגורות, ולכן סגור, לכן המשלים שלו, C_i , קבוצה פתוחה.

דוגמה

עבור $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, מרכיבי הקשירות הם

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) \subseteq \mathbb{R}$$

טענה

עבור המרחב $\mathbb{Q}$, מרכיבי הקשירות כולם מהצורה $\{p\}$

הוכחה

נניח $A \subseteq \mathbb{Q}$ ובו לפחות שתי נקודות $a \neq b \in A$. נראה ש A לא קשיר. נניח בה"כ $a < b$. קיים t אי-רציונלי כך ש $a < t < b$. אזי עבור

$$U = (-\infty, t) \cap A \quad V = (t, \infty) \cap A$$

$U, V \subseteq A$ מראים ש A לא קשיר.

הגדרה

יהי X מ"ט.

מסילה ב X היא פונקציה רציפה $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$.

אם $\varphi(0) = a$ ו $\varphi(1) = b$ אזו אננו נאמר שהמסילה היא "מ a ל b ".

הגדרה

יהי X מ"ט.
 X נקרא קשיר מסילתית אם לכל $a, b \in X$ יש מסילה מ a ל b .

משפט

אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

הוכחה

לכל $a, b \in X$ נמצא תת מרחב קשיר $X \supseteq A$ כך $a, b \in A$.
אכן, בהינתן $a, b \in X$ יש מסילה $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ כך ש $\varphi(0) = a$ ו $\varphi(1) = b$. ניקח $A = \varphi([0, 1])$. A קשיר כי A הוא תמונה רציפה של המרחב הקשיר $[0, 1]$. וזה לכל $a, b \in A$, לכן לפי התנאי משבוע שעבר X קשיר.

משפט

אם X קשיר מסילתית, $f : X \rightarrow Y$ רציפה ועל Y , אז Y קשיר מסילתית.

הוכחה

יהיו $a, b \in Y$. כיוון ש f על, יש $x, y \in X$ כך ש $f(x) = a$, $f(y) = b$. כיוון ש X קשיר מסילתית יש $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ רציפה כך ש $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$. אזי $f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow Y$ היא מסילה שמקיימת

$$f \circ \varphi(0) = a \quad f \circ \varphi(1) = b$$

מסקנה

אם X קשיר מסילתית, $f : X \rightarrow Y$ רציפה, אזי $f(X)$ קשיר מסילתית.

הוכחה

צמצום הטווח ל $f(X)$:
 $f : X \rightarrow f(X)$ וזה כבר על, אז לפי המשפט $f(X)$ קשיר מסילתית.

הגדרה

יהי $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow X$ שתי מסילות, ונניח ש $\varphi(1) = \psi(0)$.
נגדיר מסילה חדשה

$$\varphi * \psi : [0, 1] \rightarrow X$$

באופן הבא:

$$\varphi * \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \psi(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$\varphi * \psi$ נקרא השרשור של φ ו- ψ .

כדי שזו תהיה מסילה צריך להראות ש- $\varphi * \psi$ רציף. מספיק להראות ש

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \xrightarrow{t \mapsto \varphi(2t)} X \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \xrightarrow{t \mapsto \psi(2t-1)} X$$

רציפות, כי אלה קבוצות סגורות ב-[0, 1]. אבל שתיהן הרכבות של פונקציות רציפות ולכן רציפות בעצמן.

הגדרה/בניה

בהינתן מ"ט X נגדיר על X יחס שקילות $\equiv$ על X .

עבור $a, b \in X$, אם יש מסילה מ- a ל- b

זה אכן יחס שקילות:

1. רפלקסיביות: מסילה קבועה

2. סימטריות: נניח $a \equiv b$ כלומר קיימת מסילה $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ כך ש- $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. בהינתן מסילה $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ נגדיר $\bar{\varphi} : [0, 1] \rightarrow X$ ע"י $\bar{\varphi}(t) := \varphi(1-t)$

$\bar{\varphi}(0) = b$, $\bar{\varphi}(1) = a$. אזי מתקיים $a \equiv b$, לכן $\bar{\varphi}(0) = b$, $\bar{\varphi}(1) = a$

3. נניח $a \equiv b$, כלומר יש מסילה φ מ- a ל- b , ונניח $b \equiv c$, אזי $\varphi * \psi$ היא מסילה מ- a ל- c .

למחלקות השקילות של יחס שקילות זה אנו קוראים מרכיבי הקשירות המסילתית של X .

תכונות

1. נניח $A \subseteq X$ קשיר מסילתית, אזי A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית של X .

הוכחה

יהיו $a, b \in A$ קשיר מסילתית. לכן יש מסילה $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ כך ש- $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. נסמן $i : A \rightarrow X$ את העתקת ההכלה. אזי $i \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow X$ מסילה, ולכן $a \equiv b$ ב- X . כלומר כל שתי נקודות ב- A שקולות זו לזו ולכן A מוכל באחת ממחלקות השקילות, כלומר באחד ממרכיבי הקשירות של X .

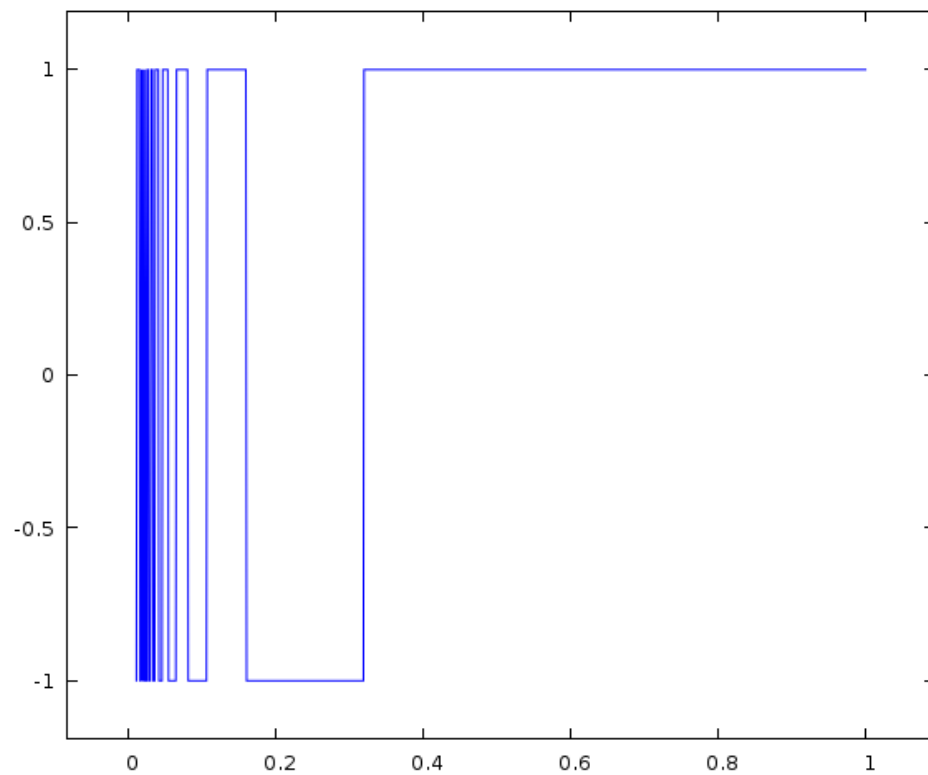
2. מרכיבי הקשירות המסילתית הם קשירים מסילתית.

לסיכום

בדומה למרכיבי קשירות:
מרכיבי הקשירות המסילתית הם תתי מרחבים קשירים מסילתית מקסימליים, והם מהווים חלוקה של X .

דוגמה

$$\begin{aligned}
 X \subseteq \mathbb{R}^2 \\
 X = \underbrace{\{(x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\}}_A \cup \underbrace{\left\{ (x, y) \mid x = \frac{1}{n}, -1 \leq y \leq 1 \right\}}_B \cup \\
 \cup \underbrace{\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{odd}}} \left\{ (x, y) \mid y = 1, \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\} \cup \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{even}}} \left\{ (x, y) \mid y = -1, \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\}}_B
 \end{aligned}$$



$X = A \cup B$, A הוא הקו הראשון, B הוא שאר הקווים, $X = A \cup B$

טענות

A ו- B קשירים מסילתית (בפרט קשירים)
 B צפוף ב- X ולכן גם X קשיר.

כדי להראות ש- X איננו קשיר מסילתית, עלינו להראות שאם $a \in A$ ו- $b \in B$ אז אין מסילה מ- a ל- b .

הרצאה 7

(המשך הדוגמה מסוף השיעור הקודם)

$$A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$X = A \cup B$$

נניח $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ מסילה כך ש $\varphi(0) \in A$. נראה שבהכרח $\varphi(t) \in A$ לכל $t \in [0, 1]$.
נביט ב $\varphi^{-1}(A)$:

1. היא לא ריקה (כי $0 \in \varphi^{-1}(A)$)

2. היא סגורה (כי A סגורה ב X)

3. כעת נוכיח שהיא גם פתוחה.

כיוון ש $[0, 1]$ קשיר בהכרח נקבל $\varphi^{-1}(A) = [0, 1]$, כלומר $\varphi(t) \in A$ לכל $t \in [0, 1]$. נניח $t \in \varphi^{-1}(A)$. נראה שיש $\varepsilon > 0$ כך שלכל $|s - t| < \varepsilon$ גם $s \in \varphi^{-1}(A)$ (כי $\varphi(s) \in A$).
נניח בה"כ $\varphi(t)|_y > -1$. נביט ב

$$U = \{a \in X \mid a|_y > -1\}$$

זוהי קבוצה פתוחה ב X , והיא סביבה של $\varphi(t)$.

כיוון ש φ רציפה יש $\varepsilon > 0$ כך ש $\varphi(s) \in U$ לכל $s \in [0, 1]$ המקיים $|s - t| < \varepsilon$.

$$a \in \mathbb{R}^2$$

אז $a|_x, a|_y$ יסמנו את הקואורדינטה.

נניח $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ מסילה כך ש $\varphi(0) \in A$. נראה שבהכרח $\varphi(t) \in A$ לכל $t \in [0, 1]$.

טענה

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. אז A קשיר אם"ם A קשיר מסילתית, ומרכיבי הקשירות המסילתית של A מלתכדים, והם פתוחים.

הוכחה בסדר הפוך

$\Leftarrow$ מרכיבי הקשירות המסילתית הם קבוצות פתוחות ב $\mathbb{R}^n$ ולכן ודאי פתוחות ב A .
כל מרכיב קשירות מסילתית מוכל במרכיב קשירות, ומרכיב קשירות הוא איחוד מרכיבי הקשירות המסילתית שמוכלים בו.
יהי C מרכיב קשירות ונניח בשלילה שהוא מכיל יותר ממרכיב קשירות מסילתית אחד.

$$C = \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$$

D_α מרכיבי קשירות מסילתית. ונניח $|I| > 1$. ניקח $\beta \in I$ ונקבל הצגה

$$C = D_\beta \cup \left(\bigcup_{\alpha \neq \beta} D_\alpha \right)$$

- סתירה לכך ש C קשיר.

יהי X מ"ט

הגדרות

1. אוסף קבוצות $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ נקרא כיסוי פתוח של X אם:

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X \quad .i$$

$\Leftarrow$ כיסוי

$$.i \quad \text{כל } U_\alpha \text{ פתוח}$$

$\Leftarrow$ פתוח

2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי, תת כיסוי פירושו $J \subseteq I$ כך ש $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = X$.

3. תת כיסוי סופי הוא תת כיסוי שעבורו J קבוצה סופית.

הגדרה

יהי X מ"ט, אזי X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי.

דוגמה למרחב שאיננו קומפקטי: $\mathbb{R}^n$

$$\{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

הוא כיסוי פתוח שאין לו תת כיסוי סופי.

הגדרה

יהי X מ"ט, $A \subseteq X$.

כיסוי פתוח של A ב X הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של תתי קבוצות פתוחות ב S כך ש $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq A$.

A .

תת כיסוי הוא $J \subseteq I$ כך ש $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supseteq A$.

משפט

יהי X מ"ט כלשהו, $A \subseteq X$. אזי A קומפקטי אם"ם לכל כיסוי פתוח של A ב X יש תת כיסוי סופי.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח A קומפקטי ו $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של A ב X , אזי האוסף $\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$ הוא כיסוי פתוח של A . A קומפקטי, לכן יש $J \subseteq I$ סופי כך ש $\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap A) = A$. ומכאן שעבור אותו J , $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supseteq A$.

$\Rightarrow$ נניח שהתנאי על כיסויים ב X מתקיים, ונניח ש A מרחב קומפקטי. יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של A (כלומר $V_\alpha \subseteq A$, V_α פתוחים ב A , $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = A$).

מהגדרת הטופולוגיה על A לכל $\alpha \in I$ יש קבוצה $U_\alpha \subseteq X$ פתוחה ב- X כך ש- $V_\alpha = U_\alpha \cap A$.

$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq A$ מהתנאי קיימת $J \subseteq I$ סופית כך ש- $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supseteq A$. אזי

$$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \cap A = A$$

משפט

יהיו X, Y מ"ט, X קומפקטי, $f : X \rightarrow Y$ רציפה ועל. אזי Y קומפקטי.

מסקנה

אם הכל כנ"ל מלבד הדרישה ש- f על, אז נכון ש- $f(X)$ קומפקטי.

הוכחת המשפט

יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של Y . צריך למצוא לו תת כיסוי סופי. האוסף $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X .

$$\bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = f^{-1}(Y) = X$$

X קומפקטי, לכן יש $J \subseteq I$ סופית כך ש- $\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha) = X$

טענה: עבור אותה קבוצה סופית J מתקיים $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = Y$

זה תמיד נכון: $f(f^{-1}(U_\alpha)) \subseteq U_\alpha$, $f^{-1}(U_\alpha) = X$ ולכן $\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha) = X$

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f(f^{-1}(U_\alpha)) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

לכן $Y = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$

משפט

יהי X מ"ט קומפקטי, $A \subseteq X$ סגורה¹ ב- X . אזי A קומפקטי².

¹"סגורה" בלשון נקבה - כי A קבוצה. סגירות זו תכונה של קבוצות.
²"קומפקטי" בלשון זכר - כי A מרחב. קומפקטיות זו תכונה של מרחבים.

הוכחה

נשתמש בתנאים שהוכחנו לקומפקטיות של תת מרחב.
יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של A ב- X (כלומר $U_\alpha \subseteq X$, U_α פתוחים ב- X , $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq A$).
אזי האוסף הבא הוא כיסוי פתוח של X :

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{A^c\}$$

(A^c פתוחה כי A סגורה)

X קומפקטי, לכן יש לכיסוי הנ"ל תת כיסוי סופי. בלי הגבלת הכלליות נניח ש- A^c משתתף בתת הכיסוי הסופי. אזי $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ כיסוי של A . כלומר $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \supseteq A$.

הגדרה

יהי X מ"ט. אנו נאמר ש- X הוא האוסדורף (או T_2) אם לכל $a \neq b \in X$ יש קבוצות פתוחות U, V כך ש- $a \in U, b \in V$.

דוגמה

כל מרחב מטרי הוא האוסדורף.

הוכחה

יהי M מרחב מטרי. יהיו $a \neq b \in M$. נסמן $r = \frac{1}{2}d(a, b)$. $r > 0$ כי $a \neq b$, ונקבל סביבות

$$B(a, r) \quad B(b, r)$$

הן זרות (תרגיל עם אי שוויון המשולש)

הגדרה

מרחב נקרא T_1 אם כל נקודות $\{p\}$ הוא קבוצה סגורה.

טענה

$$T_2 \Rightarrow T_1$$

הוכחה

נניח X הוא T_2 (כלומר האוסדורף) ויהי $p \in X$. אזי לכל $x \neq p$ יש U_x, V_x פתוחות זרות כך ש

$$p \in U_x \quad x \in V_x$$

בפרט $p \notin V_x$, כלומר $V_x \subseteq \{p\}^c$. לכן $\bigcup_{x \in \{p\}^c} V_x = \{p\}^c$ (ל"ש - למה שימושית), ולכן $\{p\}^c$ פתוחה.

משפט

יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $A \subseteq X$. אזי A גם כן האוסדורף.

הוכחה

יהי $a \neq b \in A$. כיוון ש X האוסדורף, יש $U, V \subseteq X$ זרות, פתוחות ב X , כך ש $a \in U, b \in V$. הקבוצות $U \cap A, V \cap A$ זרות, פתוחות ב A ומקיימות $a \in U \cap A, b \in V \cap A$.

משפט

יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $A \subseteq X$ קומפקטי. אזי A קבוצה סגורה ב X .

הוכחה

לכל $p \notin A$ אנו נמצא סביבה U כך ש $U \subseteq A^c$, ולכן מהל"ש נקבל ש A^c פתוחה. לכל $a \in A$ יש סביבות זרות U_a, V_a ב X כך ש

$$a \in U_a \quad p \in V_a$$

האוסף $\{U_a\}_{a \in A}$ הוא כיסוי פתוח של A ב X . A קומפקטי, לכן יש אוסף סופי $a_1, \dots, a_n$ כך ש $\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_i} \supseteq A$. נסמן $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{a_i}$.

טענה: $p \in V \subseteq A^c$ - ודאי כי $p \in V_{a_i}$ לכל a_i

נותר להראות $V \subseteq A^c$. מתקיים $V_{a_i} \subseteq U_{a_i}^c$, ו

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{a_i} \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_i}^c = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_i} \right)^c \subseteq A^c$$

(ההכלה האחרונה נובעת מכך ש $\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_i} \supseteq A$)

תזכורת

$f: X \rightarrow Y$ נקראת סגורה אם לכל $S \subseteq X$ סגורה ב X מתקיים $f(S)$ סגורה ב Y .

משפט

יהיו X, Y מ"ט, X קומפקטי, Y האוסדורף, ותהי $f : X \rightarrow Y$ רציפה. אזי f סגורה.

הוכחה

תהי $S \subseteq X$ סגורה.

א. X קומפקטי, לכן S קומפקטי (כי S סגורה ב- X).

ב. $f(S)$ קומפקטי (תמונה רציפה של S שהוא קומפקטי).

ג. Y האוסדורף, $f(S)$ קומפקטי, לכן $f(S)$ סגורה ב- Y .

מסקנה

יהיו X, Y מ"ט, X קומפקטי, Y האוסדורף, $f : X \rightarrow Y$ רציפה, חח"ע ועל. אזי f היא הומאומורפיזם.

הגדרה

יהי X, Y מ"ט.

העתקה $f : X \rightarrow Y$ נקראת שיכון אם אחרי צמצום הטווח ל- $f(X)$ ההעתקה $f : X \rightarrow f(X)$ היא הומאומורפיזם. (בפרט f רציפה וחח"ע, אך היא מקיימת יותר מזה)

דוגמה

העתקת ההכלה היא תמיד שיכון, כי אם $i : A \rightarrow X$ ההכלה, אז אחרי צמצום הטווח $\text{Id} : A \rightarrow A$

דוגמה להעתקה רציפה שאינה שיכון

העתקה מהקטע $[0, 2\pi)$ למישור $(\cos x, \sin x)$ $f(x) = (\cos x, \sin x)$ איננה שיכון - שכן איננה הומאומורפיזם - הקטע $[0, 2\pi)$ אינו הומאומורפי למעגל.

משפט

יהיו X, Y מ"ט, X קומפקטי, Y האוסדורף. $f : X \rightarrow Y$ רציפה וחח"ע. אזי f היא שיכון.

הוכחה

$f(x)$ האוסדורף כי הוא תת מרחב של Y .

הרצאה 8

בסיס

הגדרה

יהי (X, T) מרחב טופולוגי.
אוסף B של תתי קבוצות של X נקרא בסיס עבור T אם:

$$(א) \quad B \subseteq T$$

$$(ב) \quad \text{לכל } U \in T \text{ ולכל } a \in U \text{ יש } V \in B \text{ כך } a \in V \subseteq U$$

(ב') ניסוח שקול ל(ב) באמצעות ל"ש:

כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות מ- B .

הקבוצות ב- B נקראות קבוצות בסיס.

טענה

הכדורים הפתוחים ב- $\mathbb{R}^n$ מהצורה $B(q, r)$, $q \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}^+$ הם בסיס לטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $p \in U$. פתוחה ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(p, \varepsilon) \subseteq U$. קיים

$$a \in \mathbb{Q}^n \text{ כך ש-} d(p, a) < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ ניקח } r \in \mathbb{Q} \text{ כך ש-} \frac{\varepsilon}{2} < r < d(p, a) \text{, ואז}$$

$$p \in B(a, r) \subseteq B(p, \varepsilon) \subseteq U$$

מסקנה

יש לנו פונקציה $P(B) \rightarrow T$ (לקיחת איחוד) שהיא על, ולכן $\aleph_0 \leq |T|$. מצד שני, $\aleph_0 \leq |T|$ - רק הכדורים הפתוחים סביב הראשית הם בעצמה $\aleph_0$. לכן $\aleph_0 = |T|$.

טענה

יהי (X, T) מ"ט, B בסיס ל- T , Y עוד מ"ט.

אזי לכל פונקציה $f : Y \rightarrow X$ רציפה אם"ס לכל קבוצת בסיס $V \in B$ מתקיים ש- $f^{-1}(V)$ פתוחה ב- Y .

הוכחה

$\Leftarrow$ ברור כי $B \subseteq T$.

$\Rightarrow$ נניח שהתנאי מתקיים לכל $V \in B$, ותהי $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה כלשהי. אזי $U = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ כאשר $V_\alpha \in B$ לכל α .

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(V_\alpha)$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.

תרגיל

יהי (X, T) מ"ט ו B בסיס ל T , ויהי $A \subseteq X$. אזי אוסף הקבוצות $\{V \cap A\}$ הוא בסיס לטופולוגיה של A (הטופולוגיה המושרה על A מ X).

בהינתן אוסף של קבוצות, נרצה לדעת אם הוא בסיס - כלומר אם אוסף האיחודים שלו מהווה טופולוגיה.

הערה: בסיסים לא סגורים תחת איחוד ולא תחת חיתוך.

משפט

תהי X קבוצה, $B \subseteq P(X)$ אוסף של תתי קבוצות. אזי B היא בסיס לטופולוגיה על X אם ורק אם B מקיימת את שני התנאים הבאים:

$$(א) \bigcup_{V \in B} V = X$$

(ב) לכל $U, V \in B$ ולכל $a \in U \cap V$ קיים $W \in B$ כך ש $a \in W \subseteq U \cap V$.

(ב') ניסוח שקול ל(ב) באמצעות ל"ש:

לכל $U, V \in B$ מתקיים $U \cap V$ הוא איחוד של קבוצות מ B .

הוכחה

$\Leftarrow$ התנאי הכרחי: אם B בסיס לטופולוגיה T , אזי כיוון ש $X \in T$ ו B בסיס ל T אזי X איחוד של קבוצות מ B ולכן וודאי איחוד של כל קבוצות B . וכן אם $U, V \in T$ אזי $U, V \in B$ ולכן $U \cap V \in T$ ולכן $U \cap V$ היא איחוד של קבוצות מ B .

$\Rightarrow$ בהינתן אוסף B של תתי קבוצות המקיים את (א) ו(ב), נגדיר אוסף תתי קבוצות T . נראה ש T היא טופולוגיה ו B בסיס עבור T . נבנה את T באופן הבא:

בניה: $U \subseteq X$ יהיה שייך ל T אם לכל $a \in U$ יש $V \in B$ כך ש $a \in V \subseteq U$.

בניה': (שקול לבניה) $U \subseteq X$ יהיה שייך ל T אם הוא איחוד של קבוצות מ B .

ברור מהגדרת בסיס שאם T היא טופולוגיה אז B בסיס עבורה, לכן נותר רק להראות ש T טופולוגיה.

הוכחה ש T שהגדרנו בבניה היא טופולוגיה

$$\text{א. } \emptyset, X \in T, \sqrt{\cdot}.$$

$$\text{ב. יהי } \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \text{ אוסף קבוצות כך ש } U_\alpha \in T \text{ לכל } \alpha. \text{ צריך להוכיח ש } \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in T. \\ \text{יהי } a \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha, \text{ אזי יש } \alpha \in I \text{ כך ש } a \in U_\alpha. \text{ אז } U_{\alpha_0} \in T \text{ פירושו שיש } V \in B \text{ כך ש } a \in V \subseteq U_{\alpha_0} \text{ ולכן } a \in V \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

ג. אם נוכיח שסגור תחת חיתוכים של שתי קבוצות באינדוקציה ינבע שסגור תחת איחודים סופיים כלשהם.

$$\text{יהיו } U, V \in T, \text{ צ"ל } U \cap V \in T.$$

$$\text{בהינתן } a \in U \cap V:$$

$$\bullet U \in T \text{ לכן יש } U_0 \in B \text{ כך ש } a \in U_0 \subseteq U$$

$$\bullet V \in T \text{ לכן יש } V_0 \in B \text{ כך ש } a \in V_0 \subseteq V$$

$$\text{כך } a \in U_0 \cap V_0, U_0, V_0 \in B. \text{ מהתנאי על האוסף } B \text{ יש } W \in B \text{ כך ש } a \in W \subseteq U_0 \cap V_0 \text{ ולכן } a \in W \subseteq U \cap V. \text{ וזה לכל } a \in U \cap V. \\ \text{לכן } T \ni U \cap V$$

מסקנה

התנאי הבא על B הוא תנאי מספיק (אך לא הכרחי) לכך ש B בסיס לטופולוגיה על X .

1. X מתקבל כאיחוד הקבוצות ב B .

2. אם $U, V \in B$ אז $U \cap V \in B$.

טופולוגיית מכפלה

תזכורת

יהיו $A_1, A_2, \dots, A_n$ קבוצות. אזי

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

אבל אם יש לקבוצות האלו טופולוגיה - איזו טופולוגיה נשים למכפלה?

הגדרה

יהיו $(X_1, T_1), (X_2, T_2), \dots, (X_n, T_n)$ מרחבים טופולוגיים. אנו רוצים להגדיר טופולוגיה על הקבוצה $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. נסמן:

$$B = \{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n | U_1 \in T_1, U_2 \in T_2, \dots, U_n \in T_n\}$$

$$(B = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \text{ כלומר})$$

טענה

B אוסף של תתי קבוצות של $X_1 \times \dots \times X_n$ קשמיים את התנאי המספיק לכך שהוא בסיס לטופולוגיה על $X_1 \times \dots \times X_n$.

הוכחה

(א) האיחוד הוא הכל, כי $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \in B$

(ב) אם $U_1 \times \dots \times U_n, V_1 \times \dots \times V_n \in B$, כלומר $U_1 \in T_1, \dots, U_n \in T_n$, אזי $V_1 \in T_1, \dots, V_n \in T_n$

$$(U_1 \times \dots \times U_n) \cap (V_1 \times \dots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \times \dots \times (U_n \cap V_n) \in B$$

הטופולוגיה T של B הוא בסיס עבורה נקראת טופולוגיית המכפלה, והיא הטופולוגיה שתמיד ניקח על מכפלה כנ"ל.

תרגילים

1. יהיו $(X_1, T_1), \dots, (X_n, T_n)$ מ"ט, ויהי B_1 בסיס ל T_1, B_2 בסיס ל $T_2, \dots, B_n$ בסיס ל T_n . אזי אוסף הקבוצות $\{V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \mid V_i \in B_i\}$ הוא בסיס לטופולוגיה של $X_1 \times \dots \times X_n$ (כלומר לטופולוגיית המכפלה על $X_1 \times \dots \times X_n$ שהגדרנו כעת).

2. הטופולוגיה על $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ times}}$ מתלכדת עם הטופולוגיה הרגילה (המטרית) על $\mathbb{R}^n$.

3. $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ מרחבים טופולוגיים. $n + m$

$$(X_1 \times \dots \times X_n) \times (Y_1 \times \dots \times Y_m) = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$$

הראו ששתי הטופולוגיות הללו מתלכדות.

הגדרה

בהנתן קבוצות $A_1, \dots, A_n$ ישנן n העתקות טבעיות

$$P_i : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_i$$

המוגדר כך:

$$P_i((a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)) := a_i$$

P_i נקראת ההטלה על הרכיב ה- i .

טענה

יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"ט. אזי העתקות ההטלה $P_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ הן רציפות ופתוחות.

הוכחה

תהי $U \subseteq X_i$ פתוחה.

$$P_i^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times U \times \cdots \times X_n$$

וכל קבוצה בבסיס בפרט קבוצה פתוחה.

משפט

יהיו $X_1, \dots, X_n$ מרחבים טופולוגיים. תהי $f: Y \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$. אזי f רציפה אם ורק אם $P_i \circ f$ רציפה לכל $1 \leq i \leq n$.

הוכחה

$\Leftarrow$ אם f רציפה אז לכל i , $P_i \circ f$ רציפה כי P_i רציפה.

$\Rightarrow$ מטענה קודמת, מספיק לבדוק שתמונה הפוכה של קבוצת בסיס היא קבוצה פתוחה.

תהי $U_1 \times \cdots \times U_n$ קבוצת בסיס לטופולוגיה של $X_1 \times \cdots \times X_n$ (כלומר U_1 פתוחה ב- X_1 , U_2 פתוחה ב- X_2 וכו').

$$f^{-1}(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) = \{y \in Y \mid f(y) \in U_1 \times \cdots \times U_n\} =$$

$$= \{y \in Y \mid P_1 \circ f(y) \in U_1, P_2 \circ f(y) \in U_2, \dots, P_n \circ f(y) \in U_n\} =$$

$$= \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{y \in Y \mid P_i \circ f(y) \in U_i\} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \underbrace{(P_i \circ f)^{-1}(U_i)}_{\text{open}}$$

ולכן החיתוך פתוח.

■

מסקנה

יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"ט Y עוד מ"ט, ונניח נתונות n פונקציות רציפות

$$1 \leq i \leq n \quad f_i: Y \rightarrow X_i$$

אזי הן מגדירות ביחד פונקציה

$$(f_i)_{1 \leq i \leq n}: Y \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$$

(סימון אחר - $(f_1, f_2, \dots, f_n)$)

$$(f_i)_{1 \leq i \leq n}(y) := (f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y))$$

אזי אם כל ה- f_i רציפות גם הפונקציה $(f_i)_{1 \leq i \leq y}$ רציפה.
 היא רציפה בזכות המשפט הקודם: $P_j \circ (f_i)_{1 \leq i \leq n} = f_j$

פרק במתמטיקה בדידה

יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף (לאו דווקא סופי) של קבוצות. נרצה להגדיר את קבוצת המכפלה שתסומן

$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$

נשים לב

ניתן לחשוב על המכפלה $A_1 \times \dots \times A_n$ כאוסף כל הפונקציות

$$\left\{ f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \left| \begin{array}{l} f(1) \in A_1 \\ f(2) \in A_2 \\ \vdots \\ f(n) \in A_n \end{array} \right. \right\}$$

נשים לב שזה דומה להגדרת סדרה (סופית):

$$(f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

למרות שכאן, בניגוד לסדרה, אין חשיבות לסדר.
 נכליל לאוסף אינסופי: אם $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות, נגדיר

$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha := \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \left| \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in A_\alpha \right. \right\}$$

הערות

- זוהי קבוצה של פונקציות, לא של קבוצות. למשל

$$f(1) = 1 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 4$$

$$g(1) = 4 \quad g(2) = 2 \quad g(3) = 1$$

$f \neq g$ למרות ש $f(\{1, 2, 3\}) = g(\{1, 2, 3\})$, ולכן כל אחד מהם יחשב בנפרד בקבוצת הפונקציות.

- אין צורך בסדר מסויים בתוך הקבוצה - רק הכתיבה על הנייר דורשת סדר. הקבוצה I איננה קבוצה סדורה.

הרצאה 9

משפט

יהיו X, Y מ"ט קומפקטיים, אזי גם $X \times Y$ קומפקטי.
(מסקנה: לכל אוסף סופי, $X_1, \dots, X_n$ של מ"ט קומפקטיים גם $X_1 \times \dots \times X_n$ קומפקטי.)

טענה

אם Z מרחב טופולוגי, B בסיס לטופולוגיה על Z , אזי Z קומפקטי אם"ם לכל כיסוי של Z ע"י קבוצות B יש תת כיסוי סופי.

חזרה להוכחת המשפט

יהי $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של קבוצות בסיס (כלומר $U_\alpha \subseteq X$ פתוחה ב- X , $V_\alpha \subseteq Y$ פתוחה ב- Y לכל α).

לכל $a \in X$ נביט בתת המרחב $\{a\} \times Y \subseteq X \times Y$. $\{a\} \times Y \cong Y$ ולכן $\{a\} \times Y$ קומפקטי.

האוסף $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של $\{a\} \times Y$ ב- $X \times Y$. יתרה מזאת, אם נביט באוסף

$$J := \{\alpha \in I \mid a \in U_\alpha\}$$

אזי גם $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ כיסוי של $\{a\} \times Y$, כי אם $a \notin U_\alpha$ אז $U_\alpha \times V_\alpha$ זר ל- $\{a\} \times Y$ ולכן ניתן להשמיט קבוצה זו ועדיין כל נקודות $X \times Y$ יכוסו.

$\{a\} \times Y$ קומפקטי ולכן יש לכיסוי $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ תת כיסוי סופי, כלומר $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש- $\{a\} \times Y \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$ וגם $a \in U_{\alpha_i}$ לכל $1 \leq i \leq n$.

נשים לב שבהכרח $\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{\alpha_i} = Y$ כי בהינתן $y \in Y$ הנק' (a, y) נמצאת באחת הקבוצות $U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$ כלומר בפרט $y \in V_{\alpha_i}$.

נסמן $W_a = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i}$ פתוחה וכן $a \in W_a$, וכן מתקיים $W_a \times Y \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$. זה נובע משוויון כללי של קבוצות, שלכל שני אופסים $\{A_\alpha\}_{\alpha \in K}, \{B_\alpha\}_{\alpha \in K}$ מתקיים

$$(x, y) \in \left(\bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha \right) \times \left(\bigcup_{\alpha \in K} B_\alpha \right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in K} (A_\alpha \times B_\alpha)$$

יש $\beta \in K$ כך ש- $y \in B_\beta$. עבור אותו β מתקיים $x \in A_\beta$ (כי $x \in A_\alpha$ לכל $\alpha \in K$) $\Leftrightarrow (x, y) \in A_\beta \times B_\beta$. מכאן

$$W_a \times Y = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \right) \times \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{\alpha_i} \right) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$$

כך נשעה לכל $a \in X$ וכך כל $a \in X$ יגדיר סביבה W_a . לכל $a \in X$, W_a מוכל באיחוד של אוסף סופי מבין קבוצות הכיסוי.

האוסף $\{W_\alpha\}_{\alpha \in X}$ הוא כיסוי פתוח של X . X קומפקטי. לכן יש $a_1, \dots, a_l$ כך ש- $\bigcup_{1 \leq j \leq l} W_{a_j} = X$.
 לכל $1 \leq j \leq l$ יש מספר סופי של קבוצות מהצורה $U_\alpha \times V_\alpha$ כך ש- $W_{a_j} \times Y$ מוכל באיחודן.
 כאשר נצרף את כל הקבוצות $U_\alpha \times V_\alpha$ הללו עבור $1 \leq j \leq l$ נקבל אוסף סופי של קבוצות מהכיסוי המקורי שאיחודן הוא כל $X \times Y$.

נביט במצב מעט שונה

$f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X_\alpha$ נגדיר $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (אותה קבוצת אינדקסים), ולכן $\alpha \in i$ יש פונקציה רציפה $f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X_\alpha$.

$$(\prod_{\alpha \in I} f_\alpha) : \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

בהנתן $((y_\alpha)_{\alpha \in I})$, $((f_\alpha(y_\alpha))_{\alpha \in I})$ הוא האיבר ב- $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, שהרכיב α הוא $f_\alpha(y_\alpha)$.
 ניתן לסמן זאת כך:

$$\left(\prod_{\alpha \in I} f_\alpha\right)((y_\alpha)_{\alpha \in I}) = (f_\alpha(y_\alpha))_{\alpha \in I}$$

כדי לראות ש- $\prod_{\alpha \in I} f_\alpha$ רציפה צריך לבדוק שכל אחד מהרכיבים שלה רציף, והרכיב β הוא $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \mapsto f_\beta(y_\beta)$. היא רציפה כי היא הרכבה של הפונקציות

$$\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \xrightarrow{\text{projection}} Y_\beta \xrightarrow{f_\beta} X_\beta$$

כיוון שלכל β ראינו שהרכיב β של $\prod_{\alpha \in I} f_\alpha$ רציף. לכן הפונקציה $\prod_{\alpha \in I} f_\alpha$ רציפה.

משפט

יהי X מ"ט כלשהו, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות. אזי $f + g$ רציפה, $f \cdot g$ רציפה. אם f לא מתאפסת בשום מקום אז $\frac{1}{f}$ רציפה.

לדוגמה

ניקח $f \cdot g$. ראשית, הפונקציה $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה (זהו פולינום ב- x, y). את $f \circ g$ ניתן להציג כהרכבה

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{(f,g)} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{m} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

¹הכוונה בסימון היא ל- $|I|$, לאו דווקא סדורה, שבמקום α הרכיב הוא y_α .

איחוד זר

ראינו כבר 2 דרכים לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים מתוך מרחבים טופולוגיים נתונים:

1. תת מרחבים

2. מכפלה קרטזית של מרחבים

כעת נראה דרך שלישית - איחוד זר של מרחבים.

הגדרה

יהיו $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. ראשית נחליף את קבוצות הנקודות בכל X_α באופן שהם כולם יהיו זרים זה לזה. למשל, ניתן להחליף כל X_α ב- $X_\alpha \times \{\alpha\}$ (כלומר $x \in X_\alpha$ יהפוך ל- (x, α) , ואז נדע שהוא בא מ- X_α).

אחרי ביצוע הפעולה הזאת אנו מניחים ש- X_α כולם זרים. כעת נגדיר מ"ט $\coprod_{\alpha \in I} X_\alpha$ (נקרא "איחוד זר") באופן הבא:

• קבוצת הנקודות היא $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$

• והטופולוגיה:

תת קבוצה של X תחשב פתוחה אם היא מהצורה $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ כאשר $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ פתוחה ב- X_α .

מהבניה נובע שלכל β , $X_\beta \subseteq \coprod_{\alpha \in I} X_\alpha$

דוגמה

$R \amalg R$ - יש תת מרחב ב- $\mathbb{R}^2$ שהומאומרפי ל- $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$:

...

...

טענה

העתקת ההכלה $\coprod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta : i_\beta$ היא רציפה ופתוחה. בפרט היא שיכון.

טענה

לכל $f, f : \coprod_{\alpha \in I} X_{\alpha} \rightarrow Y$ רציפה אס"ם $f \circ i_{\alpha}$ רציפה לכל α .

בלשון של צמצומים

$f : \coprod_{\alpha} X_{\alpha} \rightarrow Y$ רציפה אס"ם $f|_{X_{\alpha}}$ רציפה לכל α .

מרחבי מנה

כעת נראה את הדרך הרביעית לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים מתוך מרחבים קיימים.

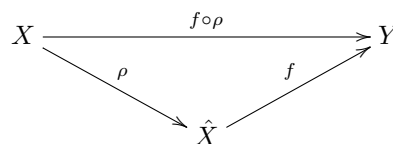
הגדרה

יהי X מרחב טופולוגי ויהי $\sim$ יחס שקילות על X .
 נסמן ב- $\hat{X}$ את קבוצת מחלקות השקילות. נרצה לבנות טופולוגיה על $\hat{X}$.
 קיימת ההעתקה הטבעית $\rho : X \rightarrow \hat{X}$ המוגדרת ע"י $\rho(a) = [a]$.
 $V \subseteq \hat{X}$ תחשב פתוחה אם $\rho^{-1}(V)$ פתוחה ב- X .
 (דרך אחרת לחשוב על $\rho^{-1}(V)$: הוא איחוד המחלקות ב- V)
 צריך להראות שזהו אכן טופולוגיה - תרגיל.

משפט

(א) ההעתקה $\rho : \hat{X} \rightarrow X$ רציפה.

(ב) לכל מ"ט Y ולכל העתקה $f : \hat{X} \rightarrow Y$, $f, f \circ \rho$ רציפה אס"ם $f \circ \rho$ רציפה.



הוכחה

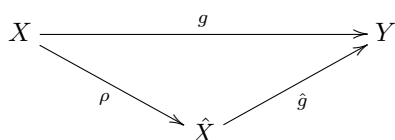
(א) תהי $V \subseteq \hat{X}$ פתוחה. אזי $\rho^{-1}(V)$ פתוחה מהגדרת הטופולוגיה על $\hat{X}$.
 (הטופולוגיה שבחרנו על $\hat{X}$ היא הטופולוגיה המקסימלית שעבורה ρ רציפה)

(ב) $\Leftarrow$ אם f רציפה, מ(א) נובע ש- $f \circ \rho$ רציפה.
 $\Rightarrow$ נניח ש- $f \circ \rho$ רציפה. תהי $w \subseteq Y$ פתוחה. צ"ל $f^{-1}(w)$ פתוחה. ידוע ש- $(f \circ g)^{-1}(w)$ פתוחה, אולם

$$(f \circ g)^{-1}(w) = \rho^{-1}(f^{-1}(w))$$

הקבוצה $f^{-1}(w) \subseteq \hat{X}$ מקיימת ש $\rho^{-1}(f^{-1}(w))$ פתוחה ב X .
מהגדרת הטופולוגיה ב $\hat{X}$ נקבל ש $f^{-1}(w)$ פתוחה.

שימוש במשפט



אם $g : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה שמכבדת את יחס השקילות, כלומר לכל $a, b \in X$ אם $a \sim b$ אז $g(a) = g(b)$, אזי g משרה פונקציה $\hat{g} : \hat{X} \rightarrow Y$ ע"י $\hat{g}([a]) := g(a)$.
ההגדרה בלתי תלויה בנציג כי g מכבדת את יחס השקילות.
מתקיים $g = \hat{g} \circ \rho$. הנחנו ש g רציפה, ומהמשפט נובע ש $\hat{g}$ רציפה.

דוגמה

$X = [0, 1]$ יחס השקילות הנוצר על ידי $0 \sim 1$.
(כלומר יחס השקילות המינימלי שכולל את $0 \sim 1$)
כיצד מגדירים העתקה רציפה $\widehat{[0, 1]} \rightarrow \mathbb{R}$?
היא תמיד מושרית ע"י העתקה רציפה $f : [0, 1] \rightarrow Y$ שמקיימת $f(0) = f(1)$.
 $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (מעגל היחידה)

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

ואח"כ צמצום הטווח ל S^1 .

הערה: g לא חייבת להיות חח"ע. לדוגמה, ניתן להגדיר

$$\begin{aligned} h : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sin \pi t \end{aligned}$$

משרה

$$\hat{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

בדוגמאות הנ"ל:

- $\hat{g}$ חח"ע
- $\hat{h}$ אינה חח"ע

$\hat{g} : \widehat{[0, 1]} \rightarrow S^1$ רציפה, חח"ע ועל $\Leftarrow$ לכן $\hat{g}$ הומאומורפיזם. כמו כן $\widehat{[0, 1]}$ קומפקטי, ו S^1 הוא האוסדורף.

עוד דוגמה

על $\mathbb{R}$ נגדיר יחס השקילות הבא: $a \sim b$ אם $a - b \in \mathbb{Z}$.
באלגברה מסמנים את $\hat{\mathbb{R}}$ הנ"ל ב $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
נגדיר $k : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ע"י $k(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. k מכבדת את יחס השקילות, לכן
משרה $\hat{k} : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow S^1$.
גם הכיוון השני נכון. כלומר בכל פעם ש $k(a) = k(b)$ מתקיים ש $a - b \in \mathbb{Z}$, כלומר
 $a \sim b$. ולכן $\hat{k}$ היא חח"ע. היא גם על.
 $\hat{k} : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow S^1$ רציפה, חח"ע ועל.
נגדיר $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$. הצמצום $\rho|_{[0,1]} : [0,1] \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ רציפה ועל. $[0,1]$ קומפקטי, ולכן $\hat{\mathbb{R}}$
קומפקטי.

הרצאה 10

מרחבי מנה - המשך

ניקח לדוגמה את הריבוע $[0, 1] \times [0, 1]$.

• הריבוע עצמו הומאומורפי לעיגול סגור - $[0, 1] \times [0, 1] \cong D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

• נגדיר שכל נקודה בצלע התחתונה שקולה למקבילה לה בצלע העליונה: $(t, 0) \sim (t, 1)$.
זה אומר שאפשר להדביק את שתי הצלעות - ולקבל גליל. אם נגדיר אותו דבר גם על הצלע השמאלית והימנית - $(0, t) \sim (1, t)$ - נוכל להדביק גם אותן (שהפכו לבסיסים של הגליל) - ולקבל טורוס.

• אם ניקח יחס שקילות שבו "נהפוך" הצלע העליונה - $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ - נקבל "טבעת מבוטת".

• אם נצמיד שתי צלעות סמוכות - $(t, 0) \sim (0, t)$ - נקבל משהו דומה לחרוט עם בסיס נטוי (הפנים של הבסיס לא חלק ממה שמקבלים), שהוא הומאומורפי לעיגול סגור.

• אם נצמיד שתי סמוכות, אבל נהפוך אחת מהן - $(t, 0) \sim (0, 1 - t)$ - נקבל שוב טבעת מבוטת. הרעיון הוא שחותכים על האלכסון ומדביקים לפי השקילות $(t, 0) \sim (0, 1 - t)$ - ומכיוון שהחיתוך על האלכסון יוצר שקילות, מקבלים מקבילית עם שתי צלעות נגדיות שקולות הפוך.

• אם נצמיד שתי צלעות מקבילות ישר, ואת שתי הצלעות המקבילות האחרות נצמיד הפוך - $(t, 0) \sim (t, 1)$ - $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ - נקבל בקבוק קליין. אי אפשר לבנות דבר כזה ב- $\mathbb{R}^3$, רק ב- $\mathbb{R}^4$ - כשהופכים צד אחד, ואז מנצלים את המימד הרביעי בשביל להכניס אותו לתוך הגליל בלי לחתוך אותו - וככה שני הבסיסים יבואו מאותו כיוון ויתחברו בכיוון הסיבוב הנכון.

הערה: גם אם לא היינו יכולים לשכן את המרחב הזה בשום $\mathbb{R}^n$ - הוא עדיין קיים מבחינה טופולוגית.

• אם נצמיד כל זוג צלעות מקבילות הפוך - $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ - $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ - נקבל עיגול ששני חצאי המעגלים שלו מוצמדות הפוך. המרחב הזה נקרא מישור פרוייקטיבי.

• אם נצמיד שני זוגות של צלעות סמוכות - $(t, 0) \sim (0, t)$ - $(t, 1) \sim (1, t)$ - נקבל ספירה דו מימדית - S^2 .

אלו כל המרחבים שניתן לקבל מהריבוע $[0, 1] \times [0, 1]$ - אבל יש דרכים נוספות לחבר, שבעזרתן ניתן לקבל את המרחבים הנ"ל בדרכים אחרות.

הגדרה

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים.
 $f : X \rightarrow Y$ נקראת "העתקת מנה" אם:

1. f על

2. $U \subseteq Y$ פתוחה ב- Y אם"ם $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X .

הערה: תנאי 2 הוא דרישה יותר חזקה מרציפות - רציפות דורשת רק כיוון אחד.

ההערה

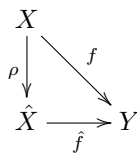
ההעתקה $\rho : X \rightarrow \hat{X}$ היא העתקת מנה - היא על כי לכל קבוצת מנה (איבר ב- $\hat{X}$) יש איבר ב- X , והיא מקיימת את תנאי 2 כי ככה הגדרנו את הטופולוגיה על $\hat{X}$.

טענה

אם $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה, נגדיר יחס שקילות על X באופן הבא: $a \sim b$ אם $f(a) = f(b)$.

הערה

ההבדל בין ρ להעתקת מנה הוא כמו ההבדל בין $A \subseteq X$ לשיכון $Y \rightarrow X$.



טענה

$f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה אם"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. על f

2. $S \subseteq Y$ סגורה ב- Y אם"ם $f^{-1}(S)$ סגורה ב- X

הוכחה: תרגיל

רמז: $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

טענה

הרכבה של העתקות מנה היא העתקת מנה.

הוכחה

יהיו $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ שתי העתקות מנה.

1. הרכבה של העתקות על היא על.

2. תהי $A \subseteq Z$. פתוחה אם"ם $g^{-1}(A)$ פתוחה, וזה נכון אם"ם $f^{-1}(g^{-1}(A))$ פתוחה. אולם $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$. כלומר קיבלנו A פתוחה אם"ם $(g \circ f)^{-1}(A)$ פתוחה.

משפט

1. אם f על רציפה ופתוחה אז f העתקת מנה

2. אם f על רציפה וסגורה אז f העתקת מנה

הוכחה

1. תהי $f : X \rightarrow Y$ על רציפה ופתוחה.

א. נתון ש f על.

ב. $\Leftarrow$ תהי $A \subseteq Y$ פתוחה. אזי כיוון ש f רציפה גם $f^{-1}(A)$ פתוחה.
 $\Rightarrow$ תהי $A \subseteq Y$ קבוצה המקיימת $f^{-1}(A)$ פתוחה. צ"ל ש A פתוחה.
 f העתקה פתוחה לכן $f(f^{-1}(A))$ פתוחה, אולם f היא על ולכן $f(f^{-1}(A)) = A$.

2. תרגיל(רמז: טיעון זהה לנ"ל)

מסקנה

יהי X מ"ט קומפקטי, Y מ"ט האוסדורף, $f : X \rightarrow Y$ על ורציפה.
אזי f היא העתקת מנה.

הוכחה

f רציפה מ X קומפקטי ל Y האוסדורף, ולכן f סגורה.

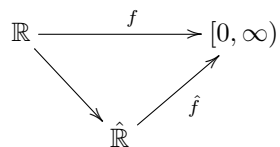
על $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות: לכל $x, x \sim -x$.

טענה

$$\hat{\mathbb{R}} \cong [0, \infty)$$

הוכחה

נגדיר $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ע"י $f(t) = |t|$.
 f מכבד את יחס השקילות ולכן משרה העתקה רציפה $\hat{f}: \hat{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty)$:



$$\hat{f}(\{x, -x\}) = |x|$$

טענה: $\hat{f}$ הומאומורפיזם

הוכחה: נגדיר $g: [0, \infty) \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ ע"י $g := \rho \circ i$.

g רציפה כי היא הרכבה $\rho \circ i$ של שתי העתקות רציפות, ונא לוודא ש $g \circ \hat{f} = \text{Id}_{\hat{\mathbb{R}}}$,

$$\hat{f} \circ g = \text{Id}_{[0, \infty)}$$

$i: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ העתקת ההכלה, $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ העתקה הקנונית של מרחב המנה.

תכונות הפרדה

הפרדה במרחב טופולוגי זה האפשרות להפריד דברים באמצעות קבוצות פתוחות.

- ראינו את תכונת האוסדורף T_2 - שבה אפשר להפריד שתי נקודות באמצעות שתי קבוצות פתוחות זרות.

- ראינו גם תכונה יותר חלשה T_1 - שבה כל נקודון סגור

$$T_2 \Rightarrow T_1$$

גם את T_1 ניתן לבטא כתכונת הפרדה: לכל $a, b \in X$ יש U פתוחה כך ש $a \in U, b \notin U$.

נרצה להמשיך הלאה, למצוא תכונות הפרדה יותר ויותר עדינות $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

הגדרות

(א) מ"ט X יקרא T_3 אם:

1. X הוא T_1 .

2. לכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה $S \subseteq X$ המקיימים $a \notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש $a \in U, S \subseteq V$.

(ב) מ"ט X נקרא T_4 אם:

1. X הוא T_1 .

2. לכל שתי קבוצות סגורות זרות S, T קיימות קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש $S \subseteq U, T \subseteq V$.

נשים לב ש T_3 הוא גם T_2 (נבחר את הקבוצה הסגורה להיות נקודון) ו T_4 הוא גם T_3 (נבחר אחת מהקבוצות הסגורות להיות נקודון).

משפט

כל מרחב מטרי הוא T_4

הוכחה

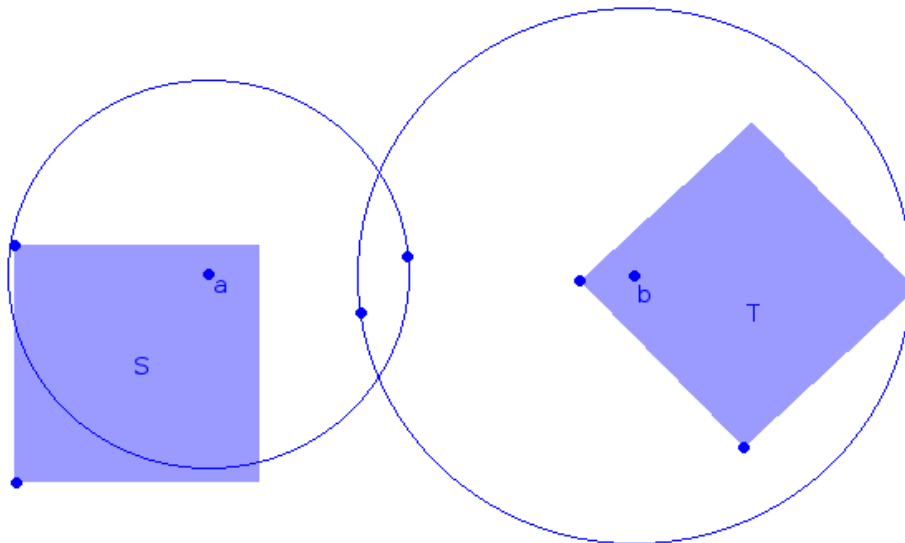
1. מרחב מטרי הוא T_2 ולכן T_1 .

2. יהיו S, T קבוצות סגורות זרות.

לכל $a \in S$ מתקיים $a \in T^c$ שהיא קבוצה פתוחה. לכן יש $\varepsilon_a > 0$ כך ש $B(a, \varepsilon_a) \subseteq T^c$, כלומר $B(a, \varepsilon_a)$ זר ל T .

לכל $a \in S$ נבחר ε כזה. באותו אופן לכל $b \in T$ נבחר $\delta_b > 0$ כך ש $B(b, \delta_b)$ זר ל S .

הערה: אמנם נראה שעכשיו ניתן לבחור את הקבוצות $\bigcup B(b, \varepsilon_b)$ ו $\bigcup B(a, \varepsilon_a)$ אבל לא מובטח לנו שהן זרות! יכולה להיות חפיפה בין הכדורים:



נגדיר:

$$U = \bigcup_{a \in S} B\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \quad V = \bigcup_{b \in T} B\left(b, \frac{\delta_b}{2}\right)$$

מתקיים $S \subseteq U, T \subseteq V$. נראה ש $U \cap V = \emptyset$.

הוכחה: נניח בשלילה $z \in U \cap V$. כלומר יש $a \in S, b \in T$ כך ש $d(z, a) < \frac{\varepsilon_a}{2}$ ו $d(z, b) < \frac{\delta_b}{2}$. נניח בה"כ ש $\varepsilon_a \leq \delta_b$. נקבל:

$$d(a, b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\delta_b}{2} \leq \delta_b$$

כלומר $a \in B(b, \delta_b)$ בסתירה לכך ש $B(b, \delta_b) \cap S = \emptyset$.

משפט

יהי X מ"א האוסדורף קומפקטי. אזי T_4 הוא X .

הוכחה

בשני שלבים:

שלב א': נוכיח ש T_3 הוא X .

שלב ב': נוכיח ש T_4 הוא X .

שלב א

נניח S סגורה, $a \notin S$.

לכל $x \in S$ כיוון ש X האוסדורף יש קבוצות פתוחות זרות U_x, V_x כך ש $x \in U_x$ ו $a \in V_x$. עבור כל $x \in S$ נבחר U_x, V_x כאלה. מתקיים שהאוסף $\{U_x\}_{x \in S}$ הוא כיסוי פתוח של S ב X .

S סגורה במרחב X שהוא קומפקטי, ולכן S קומפקטי ולכן יש תת כיסוי סופי ב X , כלומר יש $x_1, x_2, \dots, x_n$ (אוסף סופי) כך ש

$$U = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{x_i} \supseteq S$$

אם ניקח $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{x_i}$ אז $a \in V$ וגם נראה שמתקיים $U \cap V = \emptyset$ כי $U_{x_i} \subseteq V_{x_i}^c$ לכן $U \cap V = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_i U_{x_i} \subseteq \bigcup_i V_{x_i}^c = \bigcap_i V_{x_i}^c$.

שלב ב - כמעט בדיוק אותו דבר:

נניח S סגורה, T סגורה, $S \cap T = \emptyset$.

לכל $x \in S$ כיוון ש X האוסדורף יש קבוצות פתוחות זרות U_x, V_x כך ש $x \in U_x$ ו $T \subseteq V_x$. עבור כל $x \in S$ נבחר U_x, V_x כאלה. מתקיים שהאוסף $\{U_x\}_{x \in S}$ הוא כיסוי פתוח של S ב X .

S סגורה במרחב X שהוא קומפקטי, ולכן S קומפקטי ולכן יש תת כיסוי סופי ב X , כלומר יש $x_1, x_2, \dots, x_n$ (אוסף סופי) כך ש

$$U = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{x_i} \supseteq S$$

אם ניקח $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{x_i}$ אז $T \subseteq V$ וגם נראה שמתקיים $U \cap V = \emptyset$ כי $U_{x_i} \subseteq V_{x_i}^c$ לכן $U \cap V = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_i U_{x_i} \subseteq \bigcup_i V_{x_i}^c = \bigcap_i V_{x_i}^c$.