

ניתוח שגיאות

שגיאה מוחלטת: $\Delta x = |x - x^*|$, שגיאה יחסית: $\delta x = \frac{|x - x^*|}{x}$. כאשר השגיאה קטנה בהרבה מ-1 אז $\frac{|x - x^*|}{x} \approx \frac{|x - x^*|}{x^*}$.

* אם השגיאה גדולה/שווה לאחד הקירוב x^* חסר משמעות, שכן 0 קירוב לא פחות טוב מאשר x^* , שהרי $\frac{|x - 0|}{x} = 1$.

דוגמא לחישוב שגיאה: קירוב הערך של π ל-3.14. $\Delta x = |\pi - 3.14| \approx 0.00159$, $\delta x = \frac{0.00159}{\pi} \approx 5 \cdot 10^{-4}$.

בחישוב נומרי יש 3 מרכיבי שגיאה אפשריים:

- שגיאת עיגול – לדוגמא עבור הערך $10/3$ יעוגל ל-3.33.
- שגיאות קירוב \ שגיאת אלגוריתם – חישוב הפונקציה נעשה ע"י קירוב. לדוגמא ע"מ לחשב את $\sin(x)$ נשתמש בטור טיילור שהוא אינסופי (נוסחא - $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$) עבור פיתוח

סביב x_0 , כאשר $f^{(n)}(x)$ היא הנגזרת ה-n של הפונקציה $f(x)$. חסם ל- R_{n+1} הוא השגיאה או $f(x) - f^*(x)$.

3. שגיאת קלט \ שגיאה מתפשטת – נניח שנרצה לחשב פונקציה $y=f(x)$, אזי טעות ב- x תגרום טעות ב- y . שגיאה מוחלטת חסומה ע"י 10^{-d} כאשר d זה מס' הספרות העשרוניות (אחרי הנקודה העשרונית), או 10^{-d} אם מעגלים למס' הקרוב ביותר.

שגיאה יחסית במחשב נקרא שגיאת $\epsilon_{machine}$: $\delta x = \frac{\Delta x}{x^*} \leq \frac{1}{2} B^{-p} \Rightarrow \Delta x \leq \frac{1}{2} B^{1-p+e}$.

בתקן float 2^{-23} , $\epsilon_{machine} = 2^{-52}$. ב- Fixed Point, אם המספר מעוגל ל- d ספרות אחרי הנקודה העשרונית, השגיאה המוחלטת חסומה ע"י B^{-d} או $B^{-d}/2$ אם מבצעים עיגול למספר קרוב יותר.

שגיאה מתפשטת: אם רוצים לחשב פונקציה $f(x)$, כאשר הקלט אינו מדוייק נשתמש בקירוב x^* , אז גם הפלט לא יהיה מדוייק ונקבל קירוב y^* לפלט. אם Δx קטן נוכל לרשום $\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \Delta x$.

השגיאה היחסית: $\left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{\sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i}{y} \right|$. דוגמא: מציאת חסם לשגיאה מוחלטת ושגיאה יחסית של נפח כדור $V = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$, $d=3.7$, $\Delta d=0.05$, $\Delta V = 8.44 \cdot 0.0016 + 21.5 \cdot 0.05 \approx 1.09$, $V = -\frac{1}{6} \cdot 3.14159 \cdot 3.7^3 \approx 26.5$, $\delta V \leq \frac{1.09}{26.5} \approx 0.04$.

$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6} d^3 \approx 8.44$, $\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2} \pi \cdot d^2 \approx 21.5$, $\Delta V = 8.44 \cdot 0.0016 + 21.5 \cdot 0.05 \approx 1.09$, $V = -\frac{1}{6} \cdot 3.14159 \cdot 3.7^3 \approx 26.5$, $\delta V \leq \frac{1.09}{26.5} \approx 0.04$.

חישוב שגיאות במחשב באופן כללי - $\Delta f = |\text{round_err}| + |\text{approximation_err}| + |\text{spread_err}|$.

מספר מצב – הוא היחס בין הטעות היחסית בתוצאה של הפונקציה לבין הטעות היחסית בקלט. המספר מראה על רגישות הפונקציה לטעויות. מצב בו $C > 1$ נקרא ill-conditioned ומצב שבו

$C \approx 1$ נקרא well-conditioned. נוסחא - $C = \frac{\left| \frac{\Delta y}{y} \right|}{\left| \frac{\Delta x}{x} \right|} = \left| \frac{y \cdot x}{y' \cdot x} \right|$.

שיטת הטרפז: $w = \frac{b-a}{n}$ (המרווח בין כל 2 נק' ב- $[a=x_0, x_n=b]$). שטח טרפז: $A_i = \frac{w}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$. שטח של כל הטרפזים $E_T \leq (b-a) \frac{w^2}{12} M$. השגיאה: $T_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \frac{w}{2} (f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(b))$.

נורמות: נורמת וקטור - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, נורמה אוקלידית - $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, מרחק מנהטן - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, נורמה אינסוף - $\|x\|_\infty = \max |x_i|$. נורמת מטריצה - $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, סכום מקסימלי לעמודה - $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, סכום מקסימלי לשורה - $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$. $\|x\|_k > 0$, $\|x\|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n |x_i|^k}$.

סימפסון: $w = \frac{b-a}{n}$ (המרווח בין כל 2 נק' ב- $[a=x_0, x_n=b]$). שטח פרבולה 1: $A_i = \frac{w}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$. השטח שמתחת לכל הפרבולות: $\int_a^b f(x) dx = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \frac{w}{3} (f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(b))$.

פתרון משוואות לא ליניאריות

שיעור/קצב ההתכנסות מוגדר ע"י $z = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x_k|}$, שיעור הפונק' (שיעור התכנסות נמוך יותר – מהיר יותר).

אם קיימים $p > 1, C > 0$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_n|^p} \leq C$, אז C הוא שיעור/קצב ההתכנסות, p הוא סדר ההתכנסות.

שיטת החצייה: ברעיון חיפוש בינארי - (1) התחל עם קטע כלשהו $[x_0, x_1]$ כך ש- $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. (2) נחשב $x_2 = (x_0 + x_1)/2$. (3) אם $f(x_2) = 0$ סיימנו. (4) אם $f(x_2) \cdot f(x_0) < 0$ נמשיך עם הקטע $[x_0, x_2]$. (5) אחרת נמשיך עם הקטע $[x_1, x_2]$. תנאי עצירה אפשריים: (1) $f(x_2) < \epsilon$ (ערך הפונק' קרוב לאפס עד כדי אפסילון), (2) $|x_0 - x_1| < \delta$ (קטע מזערי), (3) $k > N$, k מס' האיטרציות (ביצענו את התהליך מספר גבוה של פעמים).

שיטת Regula-Falsi: כמו שיטת החצייה, מתחילים מקטע $[x_0, x_1]$ כך ש- $f(x)$ רציפה בקטע ומתקיים $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. הפעם הנוסחא לחישוב x_2 היא:

(1) התחל עם קטע כלשהו $[x_0, x_1]$ כך ש- $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. נחשב x_2 . (3) אם $f(x_2) = 0$ סיימנו. (4) אם $f(x_2) \cdot f(x_0) < 0$ נמשיך עם הקטע $[x_0, x_2]$. (5) אחרת נמשיך עם הקטע $[x_1, x_2]$. האלגוריתם זהה לשיטת החצייה, הדבר היחיד ששונה הוא חישוב x_2 .

שיטת המיתר (Secant): הנוסחא היא $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. השיטה איטרטיבית, סדר ההתכנסות שלה $p=1.6$ שזו התכנסות סופר ליניארית).

שיטת ניוטון-רפסון: הנוסחא $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. (יתרונות – אין צורך לזכור 2 נק', התכנסות ריבועית $p=2$, אפשר להכליל להרבה מימדים. חסרונות – חישוב נגזרת עלול להיות מסובך, נגזרת עלולה להתאפס).

שיטת נקודת שבת: ביצוע החלפה למשוואה $f(x)=0$ ב- $x=g(x)$, כך שאם x הוא שורש של $f(x)$ אזי מתקיים $z=g(z)$. נגדיר את סדרת האיטרציות: $x_{n+1} = g(x_n)$ (לדוגמא עבור

$x^3 - 5x^2 + e^x = 0$ נחליף ב- $x = 5 - e^x/x^2$ ונגדיר את הנוסחא $x_n = 5 - \frac{e^{x_n}}{x_n^2}$. כאשר נגיע לנק' z עבורה $z = 5 - \frac{e^z}{z^2}$ נדע ש- z הוא שורש לפונק' $f(x)$. תנאי התכנסות - $|g'(x)| < 1$ בסביבת הפתרון.

משפט – תהי $x_{n+1} = g(x_n)$ נוסחא איטרציה שמתכנסת ל- z המקיים $z=g(z)$, כך ש- $g(x)$ גזירה p פעמים בסביבת z ומתקיים $g^{(p)}(z) \neq 0$, $g^{(p-1)}(z) = 0$.

אזי עבור x_0 קרוב ל- z סדר ההתכנסות של השיטה הוא p ושיעור ההתכנסות הוא $c = \frac{g^{(p)}(z)}{p!}$. בנוסף, על $|g'(z)| < 1$.

שיעור NR עבור שורשים עם ריבוי $k > 1$

* אם השורש הוא בעל ריבוי k אז נשתמש בנוסחא $x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. נבנה פונקציה חדשה $\phi(x) = (f(x))^k$. אם k לא ידוע אז נגדיר פונקציה $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ונבצע NR על $u(x)=0$.

מציאת מטריצה הופכית: (1) דרך נאיבית $AX=I$ (2) בעזרת פירוק LU (בהמשך) $A^{(i)} = e^{(i)}$. שיטת ניוטון רב-מימדית: משתמשים בנוסחא $x_{n+1} = x_n - J(x_n)^{-1} \cdot f(x_n)$. J מטריצת היעקוביאן: $J(x_n) \cdot \Delta x_n = -f(x_n)$ כד' בנוסחא $J(x_n) = \frac{df}{dx}$. כל שורה מתייחסת לפונק', כל עמודה מתייחסת למשתנה שלפיו גוזרים.

* שיטת Muller: עובד לפי רעיון שיטת המיתר וניוטון-רפסון, אלא במקום למצוא נק' חיתוך של ישר עם ציר ה- x לוקחים 3 נק' ומעבירים פרבולה ומחשבים נק' חיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x .

פתרון מערכת משוואות ליניאריות

- אלימינציה גאוס – בשלב ה- k מבטלים את המשתנה x_k מהשוויון $k+1, \dots, n$ (יש הנחה ש- $a_{kk}^{(k)} \neq 0$). מגדירים כופלי שורות $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ ואז מחסירים שורות החל משורה ראשונה ומטה. לאחר

התהליך, מתקבלת מטריצה משולשת עליונה, מבצעים הצבה לאחור כדי לחשב את הפתרון. סיבוכיות: $O(n^3)$.

פירוק LU: U הוא כפי שתואר לעיל (בתהליך אלימינציה גאוס, לא-כולל פתרון). המטריצה L היא כופלי השורות (בהתאמה ישרה לתא), כאשר יש ערכים של 1 על האלכסון. מתקיים עבור פירוק מטריצה A לרכיבים L ו- U : $A=LU$, $Ux=y \rightarrow Ly=b$, $Ux=y$. $O(n^3 + m \cdot n^2)$. סיבוכיות: $O(n^3 + m \cdot n^2)$.

- גאוס ג'ורדן – כמו שיטת גאוס, ההבדלים הם שמנמלים את איברי האלכסון (יהיו שם 1), ומאפסים את האיברים שגם מעל לאלכסון וגם מתחת לאלכסון (גם שיטה זו מניחה שאין על האלכסון 0) - גאוס עם שחלוף שורות חלקי (partial pivoting) – ככל שלב מביאים את האיבר הגדול ביותר מבין השורות בערכו המוחלט לאלכסון. בשחלוף מלא מתייחסים גם לעמודות ומשחלפים אותן (הדבר גורם גם צורך בהחלפת וקטור הנעלמים בהתאמה). משחלפים איברים רק מתחת לאלכסון!

Scaling – מגדירים קטור מקדמי קנה-מידה: מכל שורה בוחרים את האלמנט הגדול ביותר בערכו המוחלט. בשלב ה-k מחלקים את העמודה ה-k בקטור מקדמי קנה-מידה בהתאמה. כעת מ-3 האיברים הנ"ל בוחרים את האיבר הכי גדול בערך מוחלט ומבצעים שחלוף שורות כך שהשורה שלו (המקורית) תהיה במקום השורה הראשונה ואז מבצעים את חיסור השורות באופן הרגיל.

דוגמא: עבור המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 100|105 \\ -1 & 3 & 100|102 \\ 1 & 2 & -1|2 \end{pmatrix}$ וקטור מקדמי קנה-מידה הוא $a_{13}=100 \quad a_{23}=100 \quad a_{32}=2$. עובדים על העמודה הראשונה ולכן נחלק אותה $(1/2 \quad -1/100 \quad 3/100)$. האיבר הכי

גדול בערכו המוחלט הוא מהשורה השלישית ולכן נחליף בין השורה הראשונה לשלישית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1|2 \\ -1 & 3 & 100|102 \\ 3 & 2 & 100|105 \end{pmatrix}$$

$$\text{ונחסיר: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1|2 \\ 0 & 5 & 99|104 \\ 0 & -4 & 103|99 \end{pmatrix} \text{ וכל: }.$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = T \vec{x}^{(k)} + C$$

- שיטת יעקבי- בהנתן $\vec{b}, A$ וקירוב $\vec{x}^{(0)}$. נסמן: $R=L+U, A=R+D, T=-D^{-1} R, C=D^{-1} \vec{b}$ (בלי האלכסון).

Condition Number – מכבט את השגיאה בפתרון ביחס לשגיאה בקלט. עבור נורמת מטריצה $\| \cdot \|$ ומטריצה A : $\|A^{-1}\| \cdot \|A\| = \text{cond}(A)$. מתקיים לכל מטריצה $\text{cond}(A) \geq 1$. רצוי ש- $\text{Cond}(A)$ יהיה קרוב ככל האפשר ל-1. אם $\text{cond}(A) > 1$ אז המטריצה היא ill-conditioned. כאשר המטריצה כמעט סינגולרית (דטרמיננטה קרובה ל-0) condition number הוא גבוה.

נוסחא לחישוב - $\frac{\|e\|}{\|b\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$, כאשר השגיאה ב-b וקטור הפתרונות $(b^*=b+r)$, ומתקבלת התוצאה $x^*=x+e$. נוסחא לחישוב - $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|e\|}{\|x^*\|}$ כאשר יש שגיאה ב-A המטריצה)

δA זו המטריצה שמציינת את ההפרשים בין הערכים הנכונים לשגויאות). הנוסחא לחישוב - $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1-\text{cond}(A)} \frac{\|e\|}{\|x\|}$ כאשר יש שגיאה ב-b וגם ב-b.

אינטרפולציה פולינומית – אינטרפולציה ע"י n+1 פונקציות בסיס שהן פולינומים ממעלות 0 עד n. **דוגמא:** נתונות 3 פונק' בסיס שהן $\cos(\pi/2 * x), \sin(\pi/2 * x)$. נרצה פונק' העוברת דרך הנק' $(2,4),(0,0),(1,1)$: $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $p(1)=1=c_0 \cdot 1+c_1 \cdot \sin(\pi/2)+c_2 \cdot \cos(\pi/2)$
 $p(0)=0=c_0 \cdot 1+c_1 \cdot \sin(\pi/2)+c_2 \cdot \cos(\pi/2)$
 $p(2)=4=c_0 \cdot 1+c_1 \cdot \sin(\pi/2)+c_2 \cdot \cos(\pi/2)$

מטריצת ואן דרמונד - $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & x_0^0 & \dots & x_0^n \\ a_1 & x_1^0 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & x_n^0 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$. בהיתנן הנקודות, מציבים אותן לפי x בחזקות שונות בהתאם לעמודה, וכך נק' בהתאם לשורה. וקטור הפתרון הוא ערכי ה-y.

שיטת לגרנג' – מחשבים פולינומים בהתאם לנק' דגימה לפי הנוסחא $l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ ולבסוף פולינום האינטרפולציה הוא $p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$ (חסרון – הפונק' תלויות בנק' הדגימה. אם משנים אותם יש לבצע את החישוב מההתחלה).

NextTurnRule – אם הפו' אינה ידועה נעריך את השגיאה ע"י האיבר הבא שהיינו מוסיפים לפולינום האינטרפולציה של ניוטון.

שיאת האינטרפולציה – בהיתנן פולינום אינטרפולציה $p_n(x)$ נחשב - $E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$ כאשר ξ נק' כלשהו בקטע $Int(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

שיטת חלוקת ההפרשים של ניוטון: מוצאים פולינום מהצורה $p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})$. חישוב המקדמים נעשה באופן הבא – עבור נק' אחת

$f[x_i] = f(x_i)$ עבור 2 נק' - $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$, באופן כללי עבור k+1 נק' - $f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$.

דוגמא: עבור הנק' $(-1,-5), (0,3), (2,13), (4,55)$: $p_n(x) = p_3(x) = -5 + 8(x+1) - (x+1)(x-0) + (x+1)(x-0)(x-2)$

הערכת השגיאה בשיטה - $f[x_0, x_{i+1}, \dots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$ עבור $\xi \in [x_0, x_{i+1}, \dots, x_m]$.

כאשר נק' האינטרפולציה במרחקים שווים: מחשבים טבלת הפרשים (ההפרש הוא h) רגילים לא מחולקים,

נק' x מסמנים $\mu = \frac{x-x_0}{h}$, והנוסחא המתקבלת $p_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{\mu}{j} \Delta^j f_0$.

Cubic spline – כאשר נתונות n+1 נק', לכל אחד מהקטעים $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. מגדירים פולינומים שמתקיים עבורם בנק' החיבור – (1) ערכי הפולינומים שווים (רציפות). (2) ערכי הנגזרות הראשונות שוות (שיפוע רציף, אין קפיצות). (3) ערכי הנגזרות השניות שוות. (4) הפונקציה שנבנה עוברת בכל נקודת דגימה (x_i, y_i) .

נתונים בשיטה - $h_i = x_{i+1} - x_i, d_i = y_i, c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}, b_i = \frac{S_i}{2}, a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i}, S_i = g_i''(x_i), S_n = g_{n-1}''(x_n), g_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$

איפה שיש – (מקפים) זה תלוי באחת מ-4 השיטות הבאות:

(1) שיטת Natural Spline – $S_0 = S_n = 0$ מוחקים לחלוטין את השורות.

(2) בחירת ערכים שרירותית לנק' הקצה $f'(x_0) = A, f'(x_n) = B$.

מתקבלות עוד 2 משוואות - $2h_0 S_0 + h_0 S_1 = 6(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - A)$

(3) הצבת הערכים $h_{n-1} S_{n-1} + 2h_{n-1} S_n = 6(B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}})$

הקרובים (Parabolic Runout Spline) - $S_0 = S_1, S_n = S_{n-1}$ (4)

הצבה של אקסטרפולציה ליניארית

$S_0 = \frac{(h_0 + h_1)S_1 - h_0 S_2}{h_1}, S_n = \frac{(h_{n-2} + h_{n-1})S_{n-1} - h_{n-1} S_{n-2}}{h_{n-2}}$

קירוב

שיטת minimax: $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ נחפש

$q_n^*(x)$ מדרגה לכל היותר n שעבורו $\|f - q_n^*\|_\infty$ מינימאלי.

שיטת least squares: $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$ נחפש $r_n^*(x)$ מדרגה לכל היותר n שעבורו

$$\left\| f - r_n^* \right\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

$$\begin{pmatrix} \int_a^b 1 dx & \int_a^b x dx & \dots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x dx & \int_a^b x^2 dx & \dots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \dots & \int_a^b x^{2n} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x)x dx \\ \vdots \\ \int_a^b f(x)x^n dx \end{pmatrix}$$

$\left\| f - r_n^* \right\|_2$ מינימאלי. נקבל את המערכת

פולינומי Chebychev: מכפלה פנימית $\int_a^b f(x)g(x)dx$. אם 0 יהיו אורתוגונלי.

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $T_0(x) := 1, T_1(x) := x, T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

תכונה: מקדם האיבר ה- x^n הוא 2^{1-n} . **דוגמא:** $x^6 = \frac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)$.

לפיתוח פולינומי chebyshev, נפתח טור טיילור סביב x_0 כלשהו, ונציב בכל x^i את הפיתוח

המתאים כדלהלן ואז הצבה T_i ברקורסיה.

תנאי התכנסות יעקבי: A אלכסונית שולטת **אז** הערך העצמי הגדול ביותר בערך מוחלט של $D^{-1}R$ יהיה קטן מ-1.

-1	5
0	3
2	13
4	55

ועבור

$$\begin{matrix} 3+5 \\ 0+1 \end{matrix} = 8$$

$$\frac{13-3}{2-0} = 5$$

$$\frac{55-13}{4-2} = 21$$

$$\begin{matrix} 5-8 \\ 2+1 \end{matrix} = -1$$

$$\frac{21-5}{4-0} = 4$$

$$\begin{matrix} 4+1 \\ 4+1 \end{matrix} = 1$$

נגזרות טריגונומטריות ואחרות:

- $y = C \Rightarrow y' = 0$
- $y = x^m \Rightarrow y' = m \cdot x^{m-1}$
- $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$
 $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$
- $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{\log_a e}{x}$
 $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$
- $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$
- $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$
- $y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $y = \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2+1}$
- $y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2+1}$

$$I = T_0(x)$$

$$x = T_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x))$$

$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x))$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x))$$

$$x^5 = \frac{1}{16}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x))$$

$$x^6 = \frac{1}{32}(10T_0(x) + 15T_2(x) + 6T_4(x) + T_6(x))$$

סימן