

משפטים עם הוכחות

1. משפט קנטור על פונקציות רציפות במידה שווה.

2. יחס בין דיפרנציאביליות וקיום של נגזרות חלקיות. נוסחה לדיפרנציאל עבור נגזרות חלקיות. דוגמה נגדית (נגזרות חלקיות קיימות אבל הפונקציה איננה דיפרנציאלית).

3. הגדרה של דיפרנציאל מסדר x . נוסחה ל- df עבור נגזרות חלקיות (עם הוכחה).

4. תנאי מספיק ל דיפרנציאביליות בעזרת רציפות של נגזרות חלקיות (עם הוכחה).

5. תנאי מספיק לקיצון מקומי על סמך הדיפרנציאל השני. (עם הוכחה)

6. משפט על פונקציה סתומה – מקרה של משוואה אחת (עם הוכחה).

7. משפט על פונקציה סתומה – מקרה כללי (הוכחה).

8. תנאי הכרחי לקיצון על תנאי (עם אילוצים). (באולי פאונד, עם הוכחה)

9. קריטריון של אנטגרביליות בקטע n – מימדי על סמך סכומים עליונים ותחתונים.

(עם אפסילון ק"א* → חזקה...)

משפט 1: Cantor

תהי $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, נניח כי K קומפקט ו- f רציפה ב- K , אז f רציפה במ"ש.

הוכחה

נניח ש- f לא רציפה במ"ש.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x', x'' \in K, \|x' - x''\| < \delta \wedge \|f(x') - f(x'')\| \geq \epsilon$$

$$\delta := \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots$$

$$x' := x'_k$$

$$x'' := x''_k$$

$$\|x'_k - x''_k\| < \frac{1}{k} \wedge x'_k, x''_k \in K$$

וגם

$$\|f(x'_k) - f(x''_k)\| \geq \epsilon$$

לפי למה $\exists x'_{k_i} \rightarrow x_0 \in K$ B-W

$$x''_{k_i} = \underset{\downarrow x_0}{x'_{k_i}} + \underset{\downarrow 0}{(x''_{k_i} - x'_{k_i})}$$

$$x''_{k_i}, x'_{k_i} \rightarrow x_0$$

$f(x'_{k_i}) \rightarrow f(x_0), f(x''_{k_i}) \rightarrow f(x_0)$ ולכן f רציפה ולכן

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f(x'_{k_i}) - f(x''_{k_i})) = 0$$

אבל $\|f(x'_{k_i}) - f(x''_{k_i})\| \geq \epsilon > 0$ בסתירה.

משפט 2: יחס בין דיפרנציאביליות וקיום של נגזרות חלקיות. נוסחא לדיפרנציאל עבור נגזרות חלקיות + דוגמא

טענה 1

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \overset{o}{\Omega}$$

נניח ש f דפ' בנקודה a , אזי לכל $1 \leq j \leq n$ קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j)$

הוכחה

$$L := df_a$$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)||h||$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$$f(a+te_j) - f(a) = L(te_j) + \epsilon(te_j)||te_j||$$

מכיוון ש $||e_j|| = 1$ והדיפרנציאל הוא אופרטור ליניארי, מקבלים ש:

$$L(te_j) = tL(e_j), ||e_j|| = 1$$

$$\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = L(e_j) + \underbrace{\frac{|t|}{t}\epsilon(te_j)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0}$$

נשים לב כי הגורם האחרון שואף ל 0 כאשר t שואף ל 0 ולכן:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = L(e_j)$$

כאשר אגף שמאל זה בידויק $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ואגף ימין בידויק $df_a(e_j)$ וקיבלנו את הרצוי.

טענה 2

תהי $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ כך ש $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהי $a \in \text{int}\Omega$ כך ש f דפ' בנק' a , אזי מתקיים:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

הוכחה

$$h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$$

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{j=1}^n h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n h_j df_a(e_j) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$L = df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

$$L(h) = (L_1(h), \dots, L_m(h))$$

$$\forall 1 \leq j \leq n : L_j(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(a) h_j$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ L_n(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

מטריצה של האופרטור $L = df_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$df_a \sim \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{m,n}$$

דוגמה בה כל הנגזרות החלקיות קיימות אבל הפונקציה לא דיפרנציאלית.

$$\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ לכל $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ אבל f לא דיפרנציאלית ב $(0,0)$.

הפונקציה אפילו לא רציפה ב-0 (ניקח מסלולים $y=kx$ ונקבל גבולות שונים)
אך הנגזרות החלקיות קיימות כי מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

ובאופן דומה גם לנגזרות של y .

משפט 3: הגדרה של דיפרנציאל מסדר r לנוסחה עם נגזרות חלקיות:
הגדרה:

$\mathbb{R}^n$ תהי $U \subset \circ \mathbb{R}^n; a \in U$ כך $f \in C^r(U)$ קבוצה פתוחה ומוכלת ב $\mathbb{R}^n$.
יהי $h \in \mathbb{R}^n$. נגדיר: $\varphi(t) = f(a + th)$, U – פתוחה, קיים $\delta > 0$ כך ש $B(a, \delta) \subset U$

$$|t||h| < \delta \Rightarrow a + th \in B(a, \delta)$$

$$|t| < \frac{\delta}{||h||}$$

$$\varphi \in C^r(I) \quad I = \left(-\frac{\delta}{||h||}, \frac{\delta}{||h||} \right)$$

אז מתקיים ש φ גזירה r פעמים ב-0. לכן ניתן להגדיר:

$$d^r f_a(h) := \varphi^{(r)}(0)$$

משפט

$$U \subset \circ \mathbb{R}^n; f \in C^r(U); a \in U$$

אזי

$$d^r f_a(h) = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

עבור

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

$d^r f_a$ פולינום הומוגני מסדר r .

הוכחה

$$r = 1$$

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

כלומר כאן $|\alpha| = r = 1$ $\alpha = \delta_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \Leftarrow |\alpha| = r = 1$ כלומר $\alpha = 1$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \sum_{j=1}^n \frac{1!}{1!} D^{\delta_j} f(a) h^{\delta_j}$$

נניח ש:

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

אם הדבר נכון לכל a , נחליף $a + sh$ ל a

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + sh + th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a + sh) h^\alpha$$

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + h(s + t))|_{t=0} = \{u = t + s\} = \frac{d^r}{du^r} f(a + hu)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

$$\frac{d}{ds} : (*) \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a+sh) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \frac{d}{ds} D^\alpha f(a+sh) h^\alpha = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f(a+sh) h_j \right) h^\alpha$$

$\delta_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ נגזיר

$$h_j h^\alpha = h^{\alpha+\delta_j} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f = D^{\alpha+\delta_j} f$$

$$(*) = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \sum_{j=1}^n D^{\alpha+\delta_j} f(a+sh) h^{\alpha+\delta_j}$$

$$\beta := \alpha + \delta_j \text{ בסך } \beta$$

$$|\beta| = r+1 \Rightarrow \frac{\beta!}{\beta_j!} = \alpha! \Rightarrow$$

$$(*) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r! \beta_j}{\beta!} D^\beta f(a+sh) h^\beta = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!}{\beta!} \sum_{j=1}^n \beta_j D^\beta f(a+sh) h^\beta$$

$$\beta_1 + \dots + \beta_n = |\beta| = r+1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \beta_j = r+1$$

$$\Rightarrow (*) = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r! (r+1)}{\beta!} D^\beta f(a+sh) h^\beta$$

$$s=0 \Rightarrow \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a+sh)|_{s=0} = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{(r+1)!}{\beta!} D^\beta f(a) h^\beta$$

ולכן לפי אינדוקציה כדרוש.

משפט 4: תנאי מספיק לדיפרנציאביליות לפי רציפות נגזרות חלקיות

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \overset{o}{\Omega}$ נניח כי:

$$(1) \quad B_a(\delta) \subset \Omega \text{ לכל } x \text{ בסביבה } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ קיימות}$$

$$(2) \quad \forall i: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ רציפות ב-} B_a(\delta)$$

אזי f דיפ' בנקודה a .

הוכחה

ניקח $n = 2$

$$||h|| < \delta: f(a+h) - f(a) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \underbrace{\frac{\epsilon(h)||h||}{\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}}$$

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ = \underbrace{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2)}_{\text{שינוי לגבי } x} + \underbrace{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}_{\text{שינוי לגבי } y} \end{aligned}$$

לפי משפט Lagrange למשתנה אחד $:g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0 + \theta h)h$

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) h_1 \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) h_2 \quad 0 < \theta_2 < 1$$

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) h_2 - \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 \\ = \alpha(h) h_1 + \beta(h) h_2 \end{aligned}$$

$$\alpha(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad \beta(h) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a) \quad \text{עבור}$$

$$f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 = \alpha(h) h_1 + \beta(h) h_2$$

$$\begin{aligned} \alpha(h) &\rightarrow 0 \\ \beta(h) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{הנגזרות החלקיות רציפות ולכן} \quad h \rightarrow 0$$

$$||\alpha(h) h_1 + \beta(h) h_2|| \leq |h_1| ||\alpha(h)|| + |h_2| ||\beta(h)|| \leq \sqrt{||\alpha(h)||^2 + ||\beta(h)||^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\left| \frac{\alpha(h) h_1 + \beta(h) h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \sqrt{||\alpha(h)||^2 + ||\beta(h)||^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\alpha(h) h_1 + \beta(h) h_2 = o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)_{h \rightarrow 0}$$

לכן קיבלנו

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$$

ולכן f דיפ' בנקודה a .

עבור $n > 2$

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \\ & = f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \\ & + f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_2) \\ & + f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \dots, a_n + h_n) \\ & + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

לפי משפט לגראנז' $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ כאשר $\alpha_i \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ $f(a+h) - f(a) = \alpha_1(h)h + \dots + \alpha_n(h)h_n - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \right\| \leq \sqrt{|\alpha_1(h)|^2 + \dots + |\alpha_n(h)|^2} \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$$

$$\Rightarrow f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = o(\|h\|)_{h \rightarrow 0}$$

משפט 5: תנאי מספיק לקיצון מקומי על סמך הדיפרנציאל השני

תהי פונ' $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^n$ $f \in C^2(U)$

תהי $a \in U$ נקודה קריטית, כלומר $\nabla f(a) = 0$

1. אם $d^2 f_a > 0$ אז a נקודת מינימום מקומי ממש.
2. אם $d^2 f_a < 0$ אז a נקודת מקסימום מקומי ממש.
3. אם $d^2 f_a$ לא מוגדרת סימן אז a לא נקודת קיצון.

הוכחה

$$1. \quad Q := d^2 f_a > 0$$

לפי המשפט הקודם קיים $C > 0$ כך ש $Q(h) \geq C||h||^2$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$

נוסחת טיילור מסדר 2 סביב נקודה a :

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + \frac{1}{2}d^2 f_a(x-a) + \epsilon(x-a)||x-a||^2$$

$$df_a(x-a) = \langle \nabla f(a), x-a \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2}d^2 f_a(x-a) + \epsilon(x-a)||x-a||^2 = \frac{1}{2}Q(x-a) + \epsilon(x-a)||x-a||^2 \\ &\geq \frac{1}{2}C||x-a||^2 + \epsilon(x-a)||x-a||^2 \end{aligned}$$

$$f(x) - f(a) \geq ||x-a||^2 \left(\frac{1}{2}C + \epsilon(x-a) \right)$$

$$\exists \delta > 0 : ||x-a|| < \delta \Rightarrow |\epsilon(x-a)| < \frac{1}{4}C$$

לכל x בתחום מתקיים:

$$||x-a|| < \delta \Rightarrow f(x) - f(a) \geq \frac{1}{4}C||x-a||^2 > 0 \quad x \neq a$$

$$\forall x \in U \cap B_\delta(a), x \neq a : f(x) - f(a) > 0$$

ולכן a נק' מינימום ממש.

2. נחליף f ל $-f$.

3. נניח כי Q לא שומרת סימן.

$$\exists h_+ \in \mathbb{R}^n : Q(h_+) > 0$$

$$\exists h_- \in \mathbb{R}^n : Q(h_-) < 0$$

$$f(a + th_\pm) = f(a) + df_a(th_\pm) + \frac{1}{2}d^2 f_a(th_\pm) + \epsilon(th_\pm)||th_\pm||^2$$

$$\begin{aligned} f(a + th_\pm) - f(a) &= \frac{1}{2}Q(th_\pm) + \epsilon(th_\pm)||th_\pm||^2 = \frac{1}{2}t^2Q(h_\pm) + |t|^2\epsilon(th_\pm)||h||^2 = \\ &= t^2 \left(\frac{1}{2}Q(h_\pm) + \epsilon(th_\pm)||h_\pm||^2 \right) \end{aligned}$$

$$a. \quad Q(h_+) > 0$$

$$\exists \delta > 0 : |t| < \delta \Rightarrow \left| \epsilon(th_\pm)||h_\pm||^2 \right| < \frac{1}{4}Q(h_+)$$

$$\text{אז אם } |t| < \delta \text{ אזי } f(a + th_+) - f(a) \underset{t \neq 0}{>} 0$$

$$b. \quad Q(h_-) < 0$$

$$\exists \delta' > 0 : \left| \epsilon(th_-)||h_-||^2 \right| < \frac{1}{4}|Q(h_-)| \Rightarrow \frac{1}{2}Q(h_-) + \epsilon(th_-)||h||^2 < 0$$

$$f(a + th_-) - f(a) < 0$$

ולכן a לא נקודת קיצון.

משפט 6 : משפט פונקציה סתומה – משוואה אחת

תהי $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. נתונה $F: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}; F \in C^r(\mathbb{W})$.

נתונה הנקודה $(a, b) \in W$ כך ש $F(a, b) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

אזי קיימות סביבות $a \in U, b \in V$ כך ש

$$\forall x \in U \quad \exists! y \in V \quad F(x, y) = 0$$

נסמן $\varphi: U \rightarrow V$ ו $y = \varphi(x)$ $\varphi \in C^r(U)$

הוכחה

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 ; \quad \text{WLOG} \quad \frac{\partial F}{\partial y} > 0$$

$-\frac{\partial F}{\partial y}$ רציפה ב (a, b) ולכן

$$\exists B_{(a,b)}(\epsilon): \forall (x, y) \in B_{(a,b)}(\epsilon) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$$

סביבות $b \in V' \ni a, V' \subset B_{(a,b)}(\epsilon)$ כך ש $U' \times V' \subset B_{(a,b)}(\epsilon)$

בפרט $\frac{\partial F}{\partial y}(a, y) > 0$ כלומר $F(a, y)$ ממש (לפי y).

$$V' = (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$y = b : F(a, b) = 0$$

$$y = b + \epsilon : F(a, b + \epsilon) > 0$$

$$y = b - \epsilon : F(a, b - \epsilon) < 0$$

$$\exists U'' \ni a : F(x, b + \epsilon) > 0 \quad \forall x \in U''$$

$$\exists U''' \ni a : F(x, b - \epsilon) < 0 \quad \forall x \in U'''$$

נגדיר

$$U := U' \cap U'' \cap U'''$$

נקבע $x \in U$

$$F(x, b - \epsilon) < 0, F(x, b + \epsilon) > 0$$

$F(x, y)$ – רציפה לפי y אם x קבוע.

$$\exists y : F(x, y) = 0 \quad \text{ולכן לפי משפט קושי על ערך בינוני} \quad F(x, b - \epsilon) < 0, F(x, b + \epsilon) > 0$$

אבל $F(x, *)$ ולכן y הוא יחיד.

$$y \in (b - \epsilon, b + \epsilon) = V ; \quad y = \varphi(x), x \in U$$

(1) צ"ל φ רציפה בנקודה (a, b) , כלומר צ"ל:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B(a, \delta) \subset U : \varphi(x) \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$\exists U' \subset U \quad \text{ולפי הבנייה} \quad U \times (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$x \in U' \Rightarrow y \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$U' = B(a, \delta)$$

$$y = \varphi(x)$$

$$\forall x \in B(a, \delta) \Rightarrow \varphi(x) \in (\varphi(a) - \epsilon, \varphi(a) + \epsilon)$$

ולכן φ רציפה.

$$\varphi \in C^r(U) \quad (2)$$

נכתוב נוסחת טיילור ל F בנקודה (a, b) עם סדר 0 עם שארית $Lagrange$.

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = F(a, b) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y - b)$$

$$\xi = (a, b) + \theta((x, y) - (a, b)) \quad ; \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{עבור}$$

$$y = \varphi(x); \quad b = \varphi(a)$$

$$F(a, b) = 0$$

$$x \in U \ni a; F(x, \varphi(x)) = 0$$

$$0 = 0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(\varphi(x) - \varphi(a))$$

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)(x_k - a_k) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a))$$

$$\frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x), \frac{\partial F}{\partial y}(\xi) \neq 0 \quad \forall \|x - a\| < \delta$$

$$x \rightarrow a \Rightarrow \varphi(x) \rightarrow b = \varphi(a)$$

$$(x, \varphi(x)) - (a, b) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\xi \xrightarrow{x \rightarrow a} (a, b) \quad \text{ולכן}$$

$$\frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a + \theta(x - a), b + \theta(\varphi(x) - b))}{\frac{\partial F}{\partial y}(a + \theta(x - a), b + \theta(\varphi(x) - b))}$$

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

$$\exists \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \quad \forall x \in U_a, y \in V_b$$

$$(x, \varphi(x)) \text{ ל} (a, b) \text{ אפשר להחליף}$$

$$\text{ולכן}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad x \in U_a}_{k=1, \dots, n}$$

$$\varphi \in C^r(U)?$$

$$U \text{ רציפה ב-} \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x)) - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \frac{\partial F}{\partial x_j}, \varphi$$

$$\varphi \in C^1(U) \text{ ולכן } \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) ; x \in U, k = 1, \dots, n$$

$$k < r : \varphi \in C^k(U)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial y}, \varphi \in C^k(U) \Rightarrow - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \in C^k(U)$$

ולכן

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in C^k(U) \quad k = 1, \dots, n \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}(U)$$

$$\varphi \in C^r(U) \text{ לפי אינדוקציה}$$

משפט 7: משפט על פונקציה סתומה כללית

תהי $\mathbb{W} \subset \circ \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_{x \in} \times \mathbb{R}^m_{y \in}$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

תהי $F: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}^m; F \in C^r(\mathbb{W}), r \geq 1$

(1) תהי $(a, b) \in \mathbb{W}$ כך ש $F(a, b) = 0$

$$(2) \text{ נניח כי } \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0$$

אזי קיימות סביבות $U \ni a, V \ni b$ כך ש $\forall x \in U \exists! y \in V : F(x, y) = 0$
 הפונקציה $y := \varphi(x), x \in U; \varphi \in C^r(U)$

הוכחה של המשפט

אינדוקציה לגבי m

$m = 1$ הוכחנו, נניח כי המשפט נכון עבור $m - 1$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0$$

WLOG : $\Delta_{m-1} \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0$$

מערכת:

$$\begin{cases} F_1(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{---}}, \overline{y_1, \dots, y_{m-1}}, \underline{y_m}) = 0 \\ \vdots \\ F_{m-1}(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{---}}, \overline{y_1, \dots, y_{m-1}}, \underline{y_m}) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_{m-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{m-1})}(a, b) \neq 0$$

לפי הנחה של אינדוקציה

$\exists U \ni a, \exists V \ni b, (a, b_m), V \ni (b_1, \dots, b_{m-1})$ כך ש:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, y_m) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m) \end{cases}$$

$$(x, y_m) \in U, y' := (y_1, \dots, y_{m-1}) \in V$$

$$\varphi_j \in C^r(U)$$

$$F_j(x, \varphi_1(x, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0; 1 \leq j \leq m - 1 \quad ; \quad (x, y_m) \in U$$

$$\frac{\partial}{\partial y_m} : (*) \quad \boxed{\frac{\partial F_j}{\partial y_1}(a, b) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a, b_m) + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}(a, b) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a, b_m) + \frac{\partial F_j}{\partial y_m}(a, b) = 0}$$

נתבונן במשוואה

$$G(x, y_m) = F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m)$$

$$G = 0 \text{ משוואה!}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \\ 0 = F_m(a, b) = F_m(a, \varphi_1(a, b_m), \dots, \varphi_{m-1}(a, b_m), b_m) = F(a, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m) = G(a, b_m) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) \stackrel{?}{\neq} 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) = 0 \text{ נניח כי}$$

$$(**) \boxed{0 = \frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) = \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a, b_m) + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}(a, b) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a, b_m)}$$

בצורה וקטורית, לפי (*), (**):

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(a, b) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a, b_m) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_{m-1}}(a, b) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a, b_m) + \overset{\text{מקדם}=1}{\frac{\partial F}{\partial y_m}}(a, b) = 0 \Rightarrow \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} = 0 \text{ סתירה}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) \neq 0$$

$$m = 1 \text{ לפי משפט למקרה}$$

$$F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0 = G(x, y_m) \Rightarrow y_m = \varphi_m(x) : x \in U_a, y \in V_b$$

$$\exists U'_a, V'_b : \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, y_m) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_n, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$U'_a \times V'_b \ni (a, b) \text{ בסביבה}$$

$$\Psi(x) : \begin{cases} y_1 = \Psi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \Psi_{m-1}(x_1, \dots, x_n) \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \Rightarrow y = \Psi(x) : (x, y) \in U'_a \times V'_b$$

משפט 8 : תנאי הכרחי לקיצון על תנאי(עם אילוצים כופלי לגראנז')

יהי $1 \leq r \in C^r(W), f: W \rightarrow \mathbb{R}, W \subset \mathbb{R}^n$.
 $M = \{x \in W: \Phi_1(x) = \dots = \Phi_m(x) = 0\}$ משטח C^r .
 אם $a \in M$ נקודת קיצון מקומי עם תנאי $\Phi(x) = 0$ אז קיימים מספרים $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ כך ש:
 $\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(a), \dots, \lambda_m \nabla \Phi_m(a)$ אזי $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ נקראים כופלי לגראנז'.
 ז"א: $\nabla f(a) \perp T_a(M)$.

הוכחה:

$(\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x))$, $a \in M$ רגולרית ב-a.

$$rank = \begin{pmatrix} (a) & \dots & (a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a) & \dots & (a) \end{pmatrix} = m$$

$\Delta_m \neq 0$ ש: כך $m \times m$ בגודל מינור שקיים להניח ש

לפי משפט על פונק' סתומה:

$$M \cap (U_{a'} \times V_{a''}) = \Gamma_\varphi, \quad k = n - m, \quad \exists U_{a'}, V_{a''}: \varphi: U_{a'} \rightarrow V_{a''}$$

$$M \cap (U_{a'} \times V_{a''}) = \{(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)): x \in U_{a'}\}$$

$$g(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k))$$

$$g(a') = f(a', \varphi(a')) = f(a)$$

$$\forall x \in U_{a'}: g(x) \geq g(a')$$

$$U_{a'} \subset \mathbb{R}^n, U_{a'} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ ולכן } a' \text{ נקודה קריטית ל-} g, \text{ כלומר } (a')=0, j=1, \dots, k$$

נגזור את g לפי x_j :

$$(a') = (a) + \sum_{s=1}^m (a)(a') = 0$$

$$\nabla f(a) \perp E_1, \dots, E_k: \text{ ומכאן נקבל: } 1 < j < k. \nabla f(a) \perp (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0, (a'), \dots, (a')) = E_j$$

כעת נוסיף את האילוצים:

$$(x_1, \dots, x_k) \in U_{a'}, \begin{cases} \Phi_1(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)) = 0 \\ \Phi_2(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)) = 0 \end{cases}$$

נגזור עכשיו לפי x_j :

$$\begin{cases} (a) + \sum_{s=1}^m (a)(a') = 0 \\ (a) + \sum_{s=1}^m (a)(a') = 0 \\ \vdots \\ (a) + \sum_{s=1}^m (a)(a') = 0 \end{cases}$$

$$1 \leq j \leq k: \langle \nabla \Phi_j(a), E_i \rangle \leftarrow \nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a) \perp E_1, \dots, E_k$$

$$\dim(\text{span}\{E_1, \dots, E_k\}) = k \text{ ולכן } \dim(\text{span}\{E_1, \dots, E_k\}^\perp) = n - k = m$$

$$\nabla f(a) \perp \underbrace{\nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a)}_{\text{בת"ל}} \perp \text{span}\{E_1, \dots, E_k\}$$

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \Phi_i(a) \text{ ולכן: מש"ל.}$$

משפט 9 : קריטריון של אינטגרביליות בקטע n ממדי על סמך סכומים עליונים ותחתונים.

$\mathbb{R} : P \rightarrow f$ כך ש: $\exists C \forall x \in P: ||f(x)|| \leq C$. אזי $f \in \mathcal{R}(P)$ (אינטגרבילית לפי רימן) אם ורק אם :

$\forall \varepsilon > 0 \exists P: 0 \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$ כלומר לכל ε קיימת חלוקה כך שההפרש בין הסכומים העליונים לתחתונים קטן ε .

הוכחה:

$\Rightarrow$

יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת חלוקה P כך ש $0 \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$. כלומר $0 \leq \bar{S}(f, P) < \underline{S}(f, P) + \varepsilon$ ומכאן ש:

$\bar{I}(f) = \inf_Q \bar{S}(f, P) < \underline{S}(f, P) + \varepsilon$ אז $\bar{I}(f) = \inf_Q \bar{S}(f, P) < \underline{S}(f, P) + \varepsilon$ ולכן $\bar{I}(f) - \varepsilon < \underline{S}(f, P) \leq \sup_Q \underline{S}(f, P) = \underline{I}(f)$ ולכן $\bar{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon$

לכן $\varepsilon > 0$. $\bar{I}(f) = \underline{I}(f) \leftarrow \bar{I}(f) - \underline{I}(f) = 0$ ואז $f \in \mathcal{R}(P)$.

$\Leftarrow$

נניח $f \in \mathcal{R}(P)$ אז $\bar{I}(f) = \inf_Q \bar{S}(f, P) = \sup_Q \underline{S}(f, P) = \underline{I}(f) = I(f)$

יהי $\varepsilon > 0$ אז $\exists P: I(f) + \frac{\varepsilon}{2} > \bar{S}(f, P) \geq I(f)$, $\exists Q: I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, Q) \leq I(f)$

לכן קיימות חלוקות P, Q כך ש: $I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, Q) \leq \bar{S}(f, P) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

נגדיר: $T := P \cap Q$. מכאן $I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, Q) \leq \underline{S}(f, T) \leq \bar{S}(f, T) \leq \bar{S}(f, P) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

לכן: $\bar{S}(f, T) - \underline{S}(f, T) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$