

הצגה 1.

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma)$$

הקבוצה הפתוחה במישור:

$$(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = \alpha + \gamma + (\beta + \delta)i$$

$$i, i^2 = -1$$

$$\alpha + \beta i \leftrightarrow (\alpha, \beta)$$

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$$

$$i = 0 + 1 \cdot i \leftrightarrow (0, 1)$$

האיבר היחידה בחיבור, איבר האחדות הוא $(0, 0)$ שכן $0 + \beta i = 0 + 0i \leftrightarrow (0, 0)$

יש הרבה מרחבים (מרחב) (x, y) כגון $(1, 0) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$

$$(1) \quad \alpha x + \beta y = 1 \quad (2) \quad \alpha y + \beta x = 0$$

נניח $\alpha \neq 0$ ונפתור את המערכת (1) ו-(2) ב x ו y :

$$\alpha^2 x + \beta \alpha y = \alpha$$

נחסר את המשוואה (2) מ-(1):

$$\alpha^2 x + \beta^2 x = \alpha$$

$$\alpha^2 x + \beta^2 x = \alpha$$

נחסר את שני המשוואות ונקבל:

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\alpha y + \beta \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = 0$$

$$y + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$(\alpha, \beta)^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \quad \text{זו ההיפוך הוא:}$$

עם מרחקים "קטעים" מסומנים ב- z $z = x + yi$ y, x ממשיים. צמוד של $\bar{z}$

מרוכב הוא, העם המרוכב z של $\bar{z}$ הוא הצמוד הממשי: $\bar{z} = x - yi$

$$\begin{array}{|c} z = x + yi \\ \hline \bar{z} = x - yi \end{array}$$

$$z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

(0,0) ו (x,y) של המרחב $\sqrt{x^2+y^2}$ *

10361

(0,0) ו z של המרחב $-|z|$.

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} .$$

$$0 \neq |z| \Leftrightarrow z \neq 0 .$$

$$\rightarrow \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{! יודון } \otimes$$

$$z = \alpha + \beta i \rightarrow z^{-1} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\alpha = \operatorname{Re} z \quad \beta = \operatorname{Im} z$$

המשפטים

$p=0 \Leftrightarrow$ נומר של $z \Leftrightarrow z = \bar{z}$.1

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad .2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad .3$$

לכל $\bar{z}$ של המרחב $\bar{z} \cdot \bar{z}^{-1} = 1 \Leftrightarrow z \cdot z^{-1} = 1 \quad : \quad z \cdot z^{-1} = 1 \quad : \quad z \neq 0$.4

$\bar{\bar{z}} = z$: נומר, z של המרחב $\bar{z}$ של המרחב

$$\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \quad : \text{המשפט 5}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n \quad : p1$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad .6$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} =$$

$$(|z_1| \cdot |z_2|)^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

המשפט 6

7 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ של $z \neq 0$ של

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2^{-1}} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\bar{z}_2^{-1}} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2^{-1} =$$

$$= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

הצגת המספרים המרוכבים בצורה (R, θ)

נניח מספר מרוכב $z = x + yi$ נמצא את (R, θ) עבור (x, y) נתון

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = R \leftarrow \text{המרחק מהמקור}$$

אם θ הוא הזווית בין הציר החיובי של x לוקטור (x, y) אז $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$$z = -1 - i \quad \text{לדוגמה} \quad (x, y)$$

$$R = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

אבל x, y שליליים, לכן θ נמצא ברביע השלישי, $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$$(-1, -1) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4}, \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$z = (R \cos \theta, R \sin \theta) \quad \theta = \theta + 2\pi k$$

אם $z = x + yi$ אז (R, θ) נקראים הצורה הפolar של z .
 $R > 0$ ו- $\theta \in [0, 2\pi)$

$$z = x + yi \Leftrightarrow (x, y) \Leftrightarrow (R, \theta)$$

$$\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$$

אם $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ אז $x = R \cos \theta$ ו- $y = R \sin \theta$

הצגת המספרים המרוכבים בצורה $e^{i\theta}$

$$|e^{i\theta}| = 1$$

$$z = R e^{i\theta} : \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$R_1 e^{i\theta_1} \cdot R_2 e^{i\theta_2} = R_1 R_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

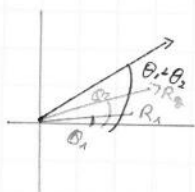
$$R_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot R_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = R_1 R_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 +$$

$$+ i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] = R_1 R_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + i R_1 R_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= R_1 R_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

אם $z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$ ו- $z_2 = R_2 e^{i\theta_2}$ אז $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ו- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

המרחק בין z_1 ו- z_2 הוא $|z_1 - z_2|$. המרחק בין z_1 ו- z_2 הוא $|z_1| |z_2|$ אם $\theta_1 = \theta_2$.



המרחק בין z_1 ו- z_2 הוא $|z_1| |z_2|$ אם $\theta_1 = \theta_2$.

$$z^{-1} = \frac{1}{R} \cdot e^{i\theta} = \frac{Re^{-i\theta}}{R^2} =$$

$$= \frac{R(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{x^2 + y^2} = \frac{R\cos\theta - R\sin\theta}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

הצגת הפונקציה

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

: הצגת הפונקציה

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \quad | \quad n=2$$

הוכחה של זהירות

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

$$2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\{Re^{i\theta} : R=1\}$$

$$= \{z : |z|=1\} : \text{הצגת הפונקציה}$$

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} : \text{הוכחה}$$

הוכחה של זהירות : הוכחה

$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$$

$$z^n = z_0 \quad \text{הוכחה}$$

$$z = Re^{i\theta}$$

$$z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$$

$$R^n e^{in\theta} = z$$

$$R_0^n = R^n \quad n\theta = \theta_0 + 2\pi k$$

$$0 \leq k \leq n-1 \quad \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

$$R = \sqrt[n]{R_0}$$

$$k=n \Leftrightarrow k=0$$

$$k=n+1 \Rightarrow k=1 \quad k=-1 \Rightarrow k=n-1$$

$$\theta_0 = 0, R=1, n=3, z^3=1 : \text{הוכחה}$$

$$z_0 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi \cdot 0}{3}\right)} = 1$$

$$z_1 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{אם } z^3 = 1 \quad (1)$$

$$z = x + iy$$

• פתור y, x

$$(x + iy)^3 = 1$$

$$x^3 + 3x^2iy + 3x(yi)^2 + (iy)^3 = 1$$

$$x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = 1$$

$$x^3 - 3xy^2 + 3x^2iy - iy^3 = 1$$

$$x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 1$$

$$(1) \quad x^3 - 3xy^2 = 1 \quad 3x^2y - y^3 = 0 \quad (2)$$

↓

$$y = 0$$

אם $y = 0$ אז

$$\frac{3}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$z_0 = 1 + 0i = 1$$

$$3x^2 - y^2 = 0$$

• $y \neq 0$ אז $3x^2 = y^2$

$$y^2 = 3x^2$$

$$x^3 - 3x(3x^2) = 1 \quad (1) \text{ ו } (3)$$

$$-8x^3 = 1$$

$$(-2x)^3 = 1$$

$$-2x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

אם

$$f(z) = c \quad f(z) = 1 \quad \text{אם } z = 0, \quad f: D \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{אם } f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = A \cdot z + B \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad A \neq 0$$

$$R(z) = \frac{z\bar{z} - z}{z + z}$$

$$f(z) = A\bar{z} + Bz + c, \quad A \neq c$$

$$R(z) = \bar{z} \quad h(x, y) = (x - y)$$

$$f(h(z)) = A\bar{z}^2 + B\bar{z} + c$$

$$L(z) = |z|$$

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מרוכבים, R^2 היא המישור המרוכב $\mathbb{C}$ עם המרחק האוקלידי.

אם $z_n = x_n + iy_n$ אז $\{x_n\}$ ו- $\{y_n\}$ הן סדרות מממיות. $\Leftrightarrow$

הסדרה $\{z_n\}$ 收收收

$|z_n - z| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall n > N \quad \forall p > n \quad \varepsilon > 0 \quad z_n \rightarrow z$ כל ε

אם $\{z_n\}$ 收收收 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收收收

$\{z_n\}$ 收收收 $\Leftrightarrow \{x_n\}$ 收收收 $\wedge \{y_n\}$ 收收收

אם $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收收收 $\wedge \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收收收 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收收收

$$\sum x_n + iy_n = x + iy \quad \wedge \quad \sum y_n = y, \quad \sum x_n = x$$

$$|\operatorname{Im}(z)|, |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{כל } z \in \mathbb{C}$$

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

$\sum |z_n| < \infty$ אז $\sum z_n$ 收收收 כל $z_n \in \mathbb{C}$

כל $z_n \in \mathbb{C}$ אז $\sum z_n$ 收收收 כל $\sum |z_n| < \infty$

$$z_n = x_n + iy_n$$

$$\sum |y_n| < \infty \quad \wedge \quad \sum |x_n| < \infty \quad \text{אז} \quad |y_n|, |x_n| \leq |z_n|$$

אם $\sum z_n$ 收收收 אז $\sum x_n + i \sum y_n$ 收收收 $\Leftrightarrow \sum x_n$ 收收收 $\wedge \sum y_n$ 收收收

כל $n \in \mathbb{N}$ אז $\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (x_k + iy_k)$ אז $\sum_{k=1}^n |z_k| < \infty$ אז $\sum_{k=1}^n x_k$ 收收收 $\wedge \sum_{k=1}^n y_k$ 收收收

אם $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$ אז $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收收收

סדרה (סדרים) של מס מרוכב

$$z_n = x_n + iy_n \quad \text{סדרה}$$

$\{z_n\}$ מתכנסת אם $\exists$ מס M כך ש $|z_n - z| < \epsilon$: מכל

האז z הוא המס המיוחד $\{z_n\}$ מתכנס אל z , סדרה מתכנסת אם $x_n \rightarrow x$

$$z_n \rightarrow x + iy \quad y_n \rightarrow y$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{מתכנס} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{מתכנס} \quad \text{ומ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad \text{מתכנס}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

קריטריון קהתנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) < \infty$$

אם $\sum z_n$ מתכנס קהתנס מתכנס

(2) . $\{z_n\}$ מתכנסת אם $\{x_n\}$ מתכנסת ו $\{y_n\}$ מתכנסת

הוכחה

(1) . $\sum |x_n|, \sum |y_n| < \infty$ מתכנסים לפי קריטריון קהתנס

אז $\sum z_n$ מתכנס ו $\sum (x_n + iy_n)$ מתכנס לפי קריטריון קהתנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{p(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{p(n)} + iy_{p(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{p(n)} + i \sum_{n=1}^{\infty} y_{p(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

הערה : אם $\sum z_n$ מתכנס קהתנס מתכנס $\sum x_n$ ו $\sum y_n$

$$\sum z_n w_n \rightarrow 0 \quad \text{אם} \quad \sum z_n \text{ מתכנס קהתנס} \quad \text{ומ} \quad w_n \rightarrow 0$$

נגזרת

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

המשפט : f מתכנסת ב z_0 אם $\Delta(z_0, r)$ קיים

$$\Delta(z_0, r) \rightarrow B(z_0, r)$$

$$f(z_0) = r \cdot e^{i\theta_0}$$

נניח

השני והשלישי קיימים גם בקצו נוסף של הקטע $z_0 + z$ וההקשר
הוא לאורך θ של $f(z)$ וזהו $z \cdot \epsilon(z)$



כך קיים $\epsilon(z)$ וזהו הקטע z וזהו הקטע z וזהו הקטע z

$$z f'(z_0) \approx f(z_0 + z) - f(z_0)$$

$$f'(z_0) + \epsilon(z) = \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z}, \quad \epsilon(z) \rightarrow 0, z \rightarrow 0$$

$$z \cdot f'(z_0) + \epsilon(z) \cdot z = f(z_0 + z) - f(z_0)$$

הקטע $\epsilon(z)$ נקרא קטע $\epsilon(z)$ וזהו הקטע $\epsilon(z)$

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + A \cdot z + \epsilon(z) \cdot z, \quad \epsilon(z) \rightarrow 0$$

(אנחנו חושבים, $\epsilon(z) \cdot z$ סתם $\alpha(z)$ או $\epsilon(z)$ קטן קטנה במעט)

$A = f'(z_0)$ וזהו הקטע A וזהו הקטע A

$f(z) = \bar{z}$ אינה פונקציה אנליטית

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + z} - \bar{z}_0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}_0 + \bar{z} - \bar{z}_0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

ואם $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ו $z = re^{i\theta}$ אז $\frac{\bar{z}}{z} = e^{-2i\theta}$

הקטע $\bar{z}$ אינו קטע z וזהו הקטע $\bar{z}$ וזהו הקטע $\bar{z}$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

אם $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ אז $e^{-2i\theta_0} = i$ וזהו הקטע i

זהו הקטע $\bar{z}$

הקטע $\bar{z}$ וזהו הקטע $\bar{z}$

אם f ו g פונקציות אנליטיות אז $f \pm g$ ו $f \cdot g$ פונקציות אנליטיות

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(4) $g(z) \neq 0$ כל z אז $\frac{f}{g}$ נגזרת

(5) כל h נגזרת $h \circ f$ אז $h \circ f$ נגזרת ונגזרתה:

$$(h \circ f)'(z) = h'(f(z)) \cdot f'(z)$$

(ההוכחה מסתמכת על דבר ש (א))

(6) $f(z) = z$ נגזרת: $f'(z) = 1$ וכל z חסמה (שיטה): $z, z^2, \dots$ נגזרת

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

$$(i z^2 - x z + 3)' = i 2 z - x$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

כל z שבו $q(z) \neq 0$ אז $f(z)$ נגזרת

נגזרתה:

(7) $f(z) = |z|^2$ נגזרת? 0

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 - 0}{z} = 0$$

$$0 < \left| \frac{|z|^2}{z} \right| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \rightarrow 0$$

$$\frac{|z|^2}{z} = \frac{x^2 + y^2}{x + iy} \cdot \frac{(x - iy)}{(x - iy)} = \frac{(x^2 + y^2)(x - iy)}{x^2 + y^2} = x - iy \rightarrow 0$$

(נגזרת פונקציה ממשית)

אם z ממשית אז $x = y = 0$

$x, y \rightarrow 0$

כל z נגזרת $f(z) = z \cdot \bar{z}$ אז $f'(z) = \bar{z}$

$$\bar{z} = \frac{f(z)}{z}$$

$$f(z) = x^2 + y^2$$

אם f אינה נגזרת, הוכחה כי f אינה נגזרת, כלומר f אינה נגזרת

כל z נגזרת $f(z) = x^2 + y^2$

$$f'_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t \cdot e^{i\theta}) - f(z_0)}{t \cdot e^{i\theta}} \cdot e^{i\theta}$$

$f'(z_0)$

$$\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta + iy_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t} : \text{נגזרת} \right)$$

$$= e^{i\theta} \cdot f'(z_0)$$

2) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ $u(x,y) = x^2 + y^2$ $v(x,y) = 0$

$u'_x = 2x$ $v'_y = 0$

$u'_y = 2y$ $v'_x = 0$

$x \neq 0 \Leftrightarrow 2x=0 \Rightarrow$ מתקיים $\subset R$, $y \neq 0 \Leftrightarrow 2y=0$

ולכן נראה רק ב (0,0).

נסיון אחר $\subset R$ מכיון אחר:

$f = u + iv$
 $z = x$ נראה

נראה: $f' = u'_x + i v'_x$ (יחסור של z במחלקה)

נראה: $z = iy$

$$\frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{iy} = -i \left[\frac{u(z_0 + iy) - u(z_0)}{y} + i \frac{v(z_0 + iy) - v(z_0)}{y} \right] =$$

$= i [u'_y + i v'_y] = \underline{v'_y - i u'_y}$

סדרת קוסינוס וסינוס (מסומן) שמתקיים
 דיו חלוקה ולכן אף נראה ממש ומתקיים
 למחלקה נראה אף

$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$

$= e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

הנחה.

$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

הנחה.

$R = |z|$, $\frac{|z|^n}{n!} = \frac{R^n}{n!}$; מראה כי מנגנון קוסינוס

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{R^n} = \frac{R}{n+1} \rightarrow 0$$

נראה:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_1^l}{l!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l+k=n} \frac{z_1^l}{l!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^l}{l!} \cdot \frac{z_2^{n-l}}{(n-l)!} =$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n n! \frac{z_1^l}{l!} \frac{z_2^{n-l}}{(n-l)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} z_1^l z_2^{n-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1 + z_2}$$

נראה כי
 נראה כי
 נראה כי

הצגת הפונקציה $z = x + iy$, $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ $f(z) = e^z$ הצגה.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

הצגת e^x על ידי טור

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

$$i \sin y = iy - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

$$\cos y + i \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^{iy}$$

הצגה

$$e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

הצגה

הצגת $f = u + iv$

הצגה

$$f'(z) = u'_x + i v'_x =$$

$$= v'_y - u'_y$$

הצגה

הצגת f ב z , $u(x,y) = e^x \cos y$ $v(x,y) = e^x \sin y$ הצגה

$$u'_x = e^x \cos y \quad v'_y = e^x \cos y$$

$$u'_y = -e^x \sin y \quad v'_x = e^x \sin y$$

הצגת f ב z הצגה

$$f'(z) = u'_x + i v'_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = f(z)$$

הצגת f ב z הצגה

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$(e^z)^{-1} = e^{-z}$$

$$1 = e^0 = e^{-z+z} = e^{-z} \cdot e^z$$

הצגה

$$e^z \cdot e^{-z} = 1$$

$$e^z \cdot e^{-z} = 1$$

$$z_1 - z_2 = x + iy, \quad e^{z_1 - z_2} = 1$$

$$e^{z_1} / e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$$

$$f'(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = 1$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 2\pi k \quad p.s. \quad e^{iy} = 1$$

$$z_1 - z_2 = 2\pi i k$$

הצגה

18.3.13

$$|z| \rightarrow \infty \Leftrightarrow z \rightarrow \infty : \text{מגד}$$

$$e^{-\frac{1}{z^4}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty \quad \text{p.m.}$$

$$e^z = e^{x+iy} \quad z = x+iy \quad \text{נלקח}$$

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x$$

$$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow e^z \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow e^z \rightarrow 0$$

$$z = R \cos \theta + i \sin \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} < -\theta_0 < \theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta > \cos \theta_0 > 0$$

$$R \cos \theta > R \cos \theta_0 \rightarrow \infty$$

: p.m.

$$-\infty < y < \infty \quad z = iy \quad \text{נלקח}$$

$$x \rightarrow \infty \quad \text{p.m.}$$

$$e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$|e^z| = e^3$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$e^z = e^{3+2iy}$$

: הפתרון

: נגד

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

(המשפט של זיגמונד) 0-7 הוא מספר שלם 0-7 $\in \mathbb{R}$ נלקח θ של $1/n$

$$r \rightarrow 0, \quad z^4 = r^4 e^{4i\theta}, \quad z = re^{i\theta} \quad \text{נלקח}$$

$$-\frac{1}{z^4} = \frac{-1}{r^4 e^{4i\theta}} = \frac{e^{ix}}{r^4 e^{4i\theta}} = \frac{1}{r^4} \cdot e^{i(x-4\theta)}$$

$$\frac{1}{r^4} \rightarrow \infty$$

$$-\frac{1}{z^4}$$

המשפט של זיגמונד $-\frac{1}{z^4}$ p.m. $e \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$ p.m.

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} < x - 4\theta < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{נלקח}$$

$$\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4} - \theta < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}k$$

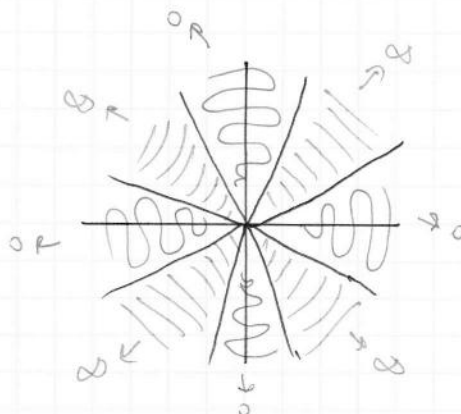
$$\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}k < \theta < \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}k$$

• $k=0$: $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{3\pi}{8}$

• $k=1$: $\frac{5\pi}{8} < \theta < \frac{7\pi}{8}$

• $k=2$: $\frac{9\pi}{8} < \theta < \frac{11\pi}{8}$

• $k=3$: $\frac{13\pi}{8} < \theta < \frac{15\pi}{8}$



עבור $k=4$ אנו מקבלים את אותו תוצאה כמו $k=0$ כי 2π הוא מחזור של $e^{i\theta}$.

אם $z = e^{i\theta}$ אז $z^{-1} = e^{-i\theta}$ וזהו הפוך של z ביחס למישור המרוכב.

$$\begin{cases} e^{it} = \cos t + i \sin t \\ e^{-it} = \cos t - i \sin t \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$$

המשוואה הזו נקראת משוואת אוילר.

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t$$

המשוואה הזו נקראת משוואת אוילר.

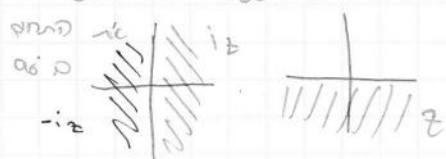
$$\Rightarrow \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

אנו יכולים להשתמש במשוואות אלו כדי להוכיח את זהויות הסינוס והקוסינוס עבור כל z מרוכב.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

המשוואה הזו נקראת משוואת אוילר.



אם $z \rightarrow \infty$ אז $e^z \rightarrow 0$ וזהו הפוך של z ביחס למישור המרוכב.

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} = \frac{2}{4} + \frac{-2}{-4} = 1$$

$$\cdot (\sin z)' = \frac{i e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \frac{iz - iz}{2} = \cos z$$

$$-\sin z = (\cos z)'$$

הידועות היסודיות

$$\cdot \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cdot \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cdot \cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z} - (e^{2z} - 2 + e^{-2z})}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$(\sinh z = y, \cosh z = x) \quad x^2 - y^2 = 1 \quad \text{מרחב היפרבולי}$$

נקודת משימה של היפרבול וזו נקראת היפרבול.

$$\cdot (\cosh z)' = \sinh z$$

$$\cdot (\sinh z)' = \cosh z$$

הלוגריתם

נחשב את הערך של e^z : נראה כי התחום של z הוא תחום היפרבול (המרחב של

הוא תחום היפרבול)

$$e^{z/2} = x \quad e^{z/2} = -x \quad \text{עם } z = -x$$

$$\{ z : -x < \operatorname{Im} z \leq x \}$$

הוא תחום היפרבול, כלומר תחום היפרבול (המרחב של

הוא תחום היפרבול, כלומר תחום היפרבול (המרחב של

$$\log w = u + iv$$

$$u = \ln |w|, \quad -\pi < v = \operatorname{Arg} w < \pi$$

$$e^{\log w} = w$$

$$e^{u+iv} = w \quad \text{כלומר}$$

$$e^u = |w| \Rightarrow u = \ln |w|$$

$$e^{u+iv} = |w| \cdot e^{i\theta}$$

$$e^{iv} = e^{i\theta}$$

$$w = |w| e^{i\theta}$$

: P201

$$\log w: \{x: x \leq 0\} \mapsto \{z: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

$$w = e^z \Leftrightarrow z = \log w \quad \text{if } w \neq 0$$

$$x_1 = x_2 = i \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2$$

$$\log x_1 = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = \log x_2$$

$$\log x_1 x_2 \rightarrow \text{not possible}$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad : \text{not possible}$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\log z_1 = i\frac{3\pi}{4}$$

$$\log z_2 = i\frac{\pi}{2}$$

$$\log z_1 + \log z_2 = i\frac{5\pi}{4}$$

$$z_1 z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \Rightarrow \log z_1 z_2 = i(-\frac{3\pi}{4})$$

$$\log w = u + iv \quad : \quad v \in (-\pi, \pi]$$

$$w = x + iy \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & : w \in 1^{\text{st}} \text{ quadrant} \\ \arctan \frac{y}{x+x} & : 2^{\text{nd}} \text{ quadrant} \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & : 3^{\text{rd}} \text{ quadrant} \\ \arctan \frac{y}{x} & : 4^{\text{th}} \text{ quadrant} \end{cases}$$

: C.P. (complex plane)

$$u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$u'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v'_y = (\arctan \frac{y}{x})'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$u'_y = -v'_x \quad \text{Cauchy-Riemann conditions}$$

* (2.2) $\lim_{x \rightarrow 0} u'_x$ and $\lim_{y \rightarrow 0} v'_y$ are not equal: $\lim_{x \rightarrow 0} u'_x = \frac{1}{2}$ and $\lim_{y \rightarrow 0} v'_y = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u'_x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{y}$$

הפונקציה $V(x,y)$ היא פוטנציאל

$$V_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

הפונקציה $V(x,y)$ היא פוטנציאל

הפונקציה $V(x,y)$ היא פוטנציאל

הפונקציה $V(x,y)$ היא פוטנציאל

הפונקציה $V(x,y)$ היא פוטנציאל

הפונקציה $f(z)$ היא פוטנציאל

הפונקציה $f(z)$ היא פוטנציאל

$$f^{-1}(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

הפונקציה $f(z)$ היא פוטנציאל

הפונקציה $f(z)$ היא פוטנציאל

$$(\log w)'(w_0) = \frac{1}{(e^z)'_{z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w}$$

הפונקציה $f(z)$ היא פוטנציאל

$$\log w = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

$$(\log w)' = (\log u)'_x = u'_x + i v'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x + i \frac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{w}}{w^2} = \frac{1}{w}$$

$$e^{\log w} = w$$

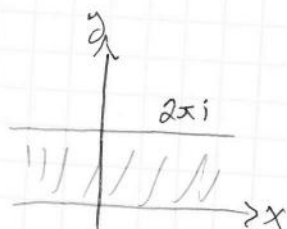
$$\log e^z = z$$

$$z = \pi i$$

$$e^z = e^{2\pi i} = 1$$

$$\log e^{2\pi i} = 2\pi i$$

הפונקציה $\log w$ היא פוטנציאל



הפונקציה $\log w$ היא פוטנציאל

$$\log w = \ln|w| + i \arg w \quad 0 < \arg w < 2\pi$$

$$(\log w)' = \frac{1}{w}$$

זוהי פונקציה

הפונקציה הזו היא פונקציה אנליטית

הפונקציה הזו היא פונקציה אנליטית, ולכן היא מתאפסת בנקודה אחת בלבד, וזוהי הנקודה 0 .

$$\log w_2 = \log w_1 + 2\pi i k$$

$$\log w = \log w + 2\pi i k \quad w = e^{\log w} = e^{\log w + 2\pi i k}$$

אינטגרציה

נניח $f(t)$ היא פונקציה מממית, $[a, b]$ קטע סגור, f אינטגרלית.

אם $f(t) = u(t) + i v(t)$ אז $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$

$$f(t) = u(t) + i v(t)$$

אם $f(t) = u(t) + i v(t)$ אז $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$

הפונקציה $F(t)$ היא פונקציה אנליטית, ולכן $F'(t) = f(t)$.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$$F = u + i v \quad f = u' + i v'$$

$$F' = u' + i v'$$

$$v = v, \quad u = u$$

הפונקציה F היא פונקציה אנליטית.

$$\operatorname{Re} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f) dt$$

$$R \rightarrow b, a \quad \int_a^b e^{at} \cos bt \, dt$$

הפונקציה $f(t) = e^{at} \cos bt$ היא פונקציה אנליטית.

$$e^{at} = e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

$$= e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

$$e^{at} \cos bt = \operatorname{Re} [e^{at}]$$

הפונקציה $f(t) = e^{at}$ היא פונקציה אנליטית.

הפונקציה $f(t) = e^{at}$ היא פונקציה אנליטית.

$$\int_a^b e^{at} \cos bt \, dt = \operatorname{Re} \int_a^b e^{at} dt = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{at}}{a} \right]_a^b$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{bt} - e^{at}}{a} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{bt} (\cos bt + i \sin bt) - e^{at} (\cos at + i \sin at)}{a} \right]$$

$$\frac{2\sqrt{2}\pi}{2\pi b^2} = \frac{e^a \cos b - 1 + i e^a \sin b}{a^2 + b^2} (a - bi) = \frac{(e^a \cos b - 1) \cdot a + e^a (\sin b) \cdot b + i(10\pi)}{a^2 + b^2} =$$

$$\cdot \int_0^t = \frac{(e^a \cos b - 1)a + e^a \cdot b \sin b}{a^2 + b^2} : p^2,$$

אינטגרל

fg מוקדל כחסם ב $[a,b]$, fg אינטגרלית !

$$\int_a^b fg dt = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f'g dt$$

אינטגרלית f $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$: אי-שוויון

הוכחה:

הקצרה סכומי רימן (משפט)

9 $\int_a^b f(t) dt$ סך ממוצע $\bar{f}$:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = e^{i\theta} \cdot \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{i\theta} f(t) dt =$$

$$f(t) = u(t) + i v(t)$$

[u, v חסומים]

$$\sum u(z_i) \Delta t_i + i \sum v(n_i) \Delta t_i$$

$$\Delta t_i = \tilde{\Delta t}_i$$

$$z_i = n_i$$

$$= \text{Re} \left[\int_a^b e^{i\theta} f(t) dt \right] = \int_a^b \text{Re} [e^{i\theta} f(t)] dt \leq \int_a^b |e^{i\theta} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt$$

משפט (R²)

מסלול חסום ב $[a,b]$ מרחב R^2 (כלי) , $z(t) = (x(t), y(t))$, x, y חסומים ב $[a,b]$, $z(t) = z(t)$ חסום ב $[a,b]$

(משפט ממוצע)

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

$$R \cos t + i R \sin t$$

$$= \tilde{z}(t) = R e^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

! הוכחה

משפט :

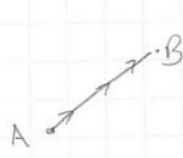
$$0 \leq t \leq \pi$$

$$z_1(t) = R e^{it}$$

$$\text{משפט} \rightarrow 0 \leq t \leq 4\pi$$

$$z_2(t) = R e^{it}$$

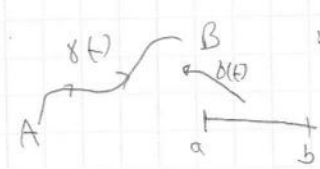
ב משפט :

(3) הנח $[A, B]$ ונבנה למטה את הדרך הזו: 

$$\gamma(t) = A + t(B-A) \quad 0 \leq t \leq 1$$

קצת אחרת: $\alpha \leq t \leq \beta \quad \gamma(t) = A + \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}(B-A)$

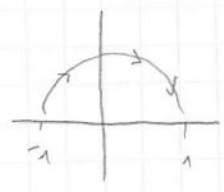
באם קבוצה מחוברת, אם ניקח נקודה חלקה ממנה $\gamma(t)$ קצתה סגורה ושל, נחלקים (מחלקת) $A = x_1 + y_1 i, B = x_2 + y_2 i$ (אם זה לא מובן).

(4) הנחיה: 

$-\gamma : [-b, -a] \rightarrow C$

$$(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$$

$0 \leq t \leq \pi \quad \gamma(t) = e^{it}$: שאלה בן גורן



$-\pi \leq t \leq 0 \quad -\gamma(t) = e^{-it}$

הנחיה

נניח $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ונניח $z(t) = \gamma(t)$ ונניח t_0 ונניח Δt ונניח Δz ונניח $z'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$

אז $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$

אם $z'(t_0) \neq 0$ ונניח $r = |z'(t_0)|$ ונניח θ ונניח $z'(t_0) = r e^{i\theta}$

אם $z'(t_0) = 0$ ונניח $r = 0$ ונניח θ ונניח $z'(t_0) = 0 e^{i\theta}$

הנחיה

$$r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right|$$



$$-1 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = t + it$$

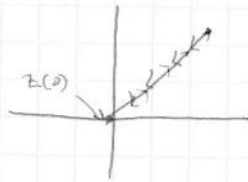
$$z'(t) = 1 + i$$

$$|z'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tilde{z}(t) = t^2 + it^3$$

$$-1 \leq t \leq 1$$



$$-1 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = t^2 + it^3$$

$$z'(t) = 2t + i3t^2 \rightarrow z'(0) = 0$$

⊗ משפט: אם z מסלול, ופונקציה f ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z_1 = f \circ z_2$ אם ורק אם $z_1(t_1) = z_2(t_2) = z_0$ ופונקציה f ב $\mathbb{C}$.

משפט 2: אם z_1, z_2 מסלולים ב $\mathbb{C}$ ופונקציה f ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z_1 = f \circ z_2$ אם ורק אם $z_1(t_1) = z_2(t_2) = z_0$ ופונקציה f ב $\mathbb{C}$.

אם $f(z_0) \neq 0$ אז המסלול z הוא $z(t) = z_0 + f(z_0)t$ ופונקציה f ב $\mathbb{C}$.

משפט 3: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

משפט 4: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

$$(f \circ z_1)'(t_1) = f'(z_1(t_1)) \cdot z_1'(t_1) = f'(z_0) \cdot z_1'(t_1)$$

משפט 5: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

$$(f \circ z_2)'(t_2) = f'(z_2(t_2)) \cdot z_2'(t_2) = f'(z_0) \cdot z_2'(t_2)$$

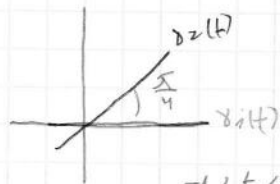
משפט 6: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

משפט 7: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

משפט 8: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

משפט 9: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

משפט 10: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.



$$-1 \leq t \leq 1$$

$$f(z) = z^2$$

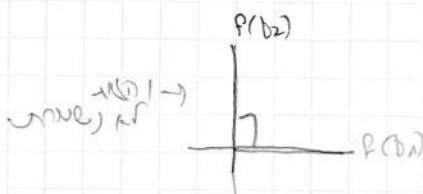
$$f'(0) = 0$$

משפט 11: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

$$z_1(t) = (t, 0)$$

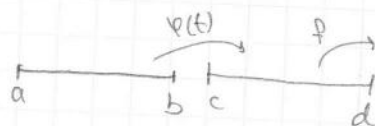
$$z_2(t) = t + it$$

$$z_1(0) = z_2(0) = 0$$



משפט 12: אם f פונקציה ב $\mathbb{C}$ ופונקציה z ב $\mathbb{C}$, אז $f \circ z$ פונקציה ב $\mathbb{C}$.

Integration of a function



2025

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Integration of a function

Integration

Integration of a function



$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt =$$

Integration

$$[x(t) = x(t) + i y(t), x'(t) = x'(t) + i y'(t)]$$

$$= \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt + i \int_a^b f(x(t)) y'(t) dt$$

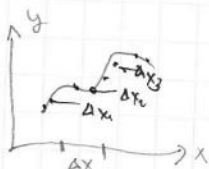
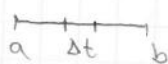
$$① = \int_a^b f dx$$

$$② = \int_a^b f dy$$

$$\int_a^b f dz = \int_a^b f dx + i \int_a^b f dy$$

Integration

$$dz = dx + i dy$$



Integration

$$\Delta t \xrightarrow{x(t)} x(t_i) \Delta t_i \approx \Delta x_i$$

$$\int_a^b f dy$$

Integration

$$\int_a^b f dx = \lim \sum f(z_i) \Delta x_i, \max |\Delta x_i| \rightarrow 0$$

Integration

$$\int_a^b f dy$$

Integration

$$\int_a^b f dx = - \int_b^a f dx$$

Integration

$$\int_a^b f dz = - \int_b^a f dz$$

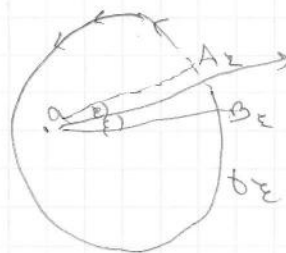
Integration

הוכחה שיש פונקציה a שמתקיים

הפונקציה $\log(z-a)$ היא פונקציה חד-ערכית

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z-a} =$$

$$\log(B_\epsilon - a) - \log(A_\epsilon - a) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi i$$



$$b(t) = b + re^{it} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

$$b(0) = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-a} = \log(b(2\pi)-a) = \log(b(0)-a) \quad : p)$$

הנקודה a נמצאת בתוך המעגל γ ויש לה נקודה a :

אם $0 \leq t < 2\pi$, $b(t) = a + re^{it}$: נקודה a בתוך המעגל γ

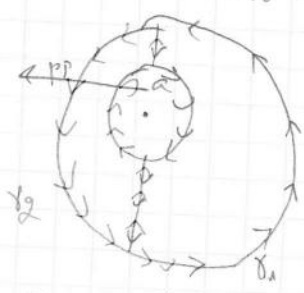
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(a+re^{it}) \cdot a} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = 1$$

אם a אינה נמצאת בתוך המעגל γ :

הנקודה a נמצאת מחוץ למעגל γ :

המעגל γ נחלק לשתי קשתות γ_1 ו- γ_2 :

הקשתות γ_1 ו- γ_2 :



הקשתות γ_1 ו- γ_2 נחלקות את המישור לשתי קצוות γ_1 ו- γ_2 :

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a} = 0$$

הקשתות γ_1 ו- γ_2 (הקשתות) :

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = -1$$

הנקודה a נמצאת מחוץ למעגל γ :

הנקודה a נמצאת מחוץ למעגל γ :

: $\oint_C f(z) dz$, $\nabla f = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$\int_0^1 f(x) dx = 0$ ist also schon ok, wenn

⑤ ~~הערה~~ לא על ע"ו רבקה וע קדומה:

$C = \{z : |z| = 1\}$: دائرة الوحدة $f(z) = \bar{z}$: مرآة

$$\Rightarrow \int_C \bar{z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{z-0} dz = 2\pi i$$

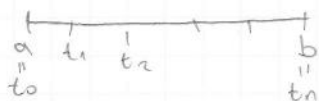
$\int_{\partial B} f \, d\mu = \int_B \operatorname{div} f \, dx$
 $|Z|^2 = Z \cdot Z = R^2 \Rightarrow \bar{Z} = \frac{R^2}{Z}$

LA) Don se mik

יחסים בין γ ל Φ ו R^2 - ריבוע מסתור $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

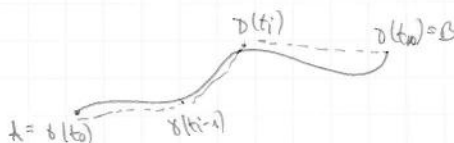
$$\sup \sum_{i=1}^n |b(t_i) - b(t_{i-1})|$$

• $[a, b]$ ከ n ጊዜ $\{t_i\}_{i=0}^n$ ላይ



NON, PLE, D, SUP, PUP, SD, D, PLE, NON

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |t_i(t_i) - t_i(t_{i-1})| \otimes = \sup - \text{D} \quad \text{so}$$



1. $\lim_{T \rightarrow 0} \chi(T) = 0$ (כן, מסתבר) (מחשבה קצתה)

$$L(x) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

∴ slope of, $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$: then this is hypoten.

2. SpT) $\Delta x_i = \Delta t_i \cdot \bar{x}(\hat{t}_i)$, $\Delta y_i = \Delta t_i \cdot \bar{y}(\hat{t}_i)$

$$\Delta x^2 = x'(t_i)^2 \cdot \Delta t_i^2, \quad \Delta y^2 = y'(t_i)^2 \cdot \Delta t_i^2$$

④ P von $p(t)$ $\sqrt{x(t_i)^2 + y(t_i)^2} \Delta t_i \approx \sqrt{x(t_i)^2 + y(t_i)^2} \Delta t_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2} \Delta t_i$ Richtung

$$\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{is the magnitude}$$

יְהוָה וְהַמִּלְאָכִים

ist $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$\int_C |dz| = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2} = \text{se}^{\text{path}}$$

האם f נכנסת ל $\mathbb{R}^1$?

אם $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ אז $\int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt$
 $|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

אפשר גם לראות כי $\int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt$ קיים לכל f וכל z .

אם $f \in \mathbb{R}^1$ אז $\int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt = \int_a^b f(x(t)) dx$.

$\int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt = \int_a^b f(z(t)) dz$: כי $\int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt = \int_a^b f(z(t)) dz$ (משוואה)

אם $z: [-b, a] \rightarrow \mathbb{C}$, $z(s) = z(t)$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$: (המשוואה)

$$\int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt = \int_{-b}^a f(z(s)) |z'(s)| ds = \int_{-b}^a f(z(-s)) |z'(-s)| ds = \int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt = \int_a^b f(z(t)) dz$$

אם

אם $z \in \mathbb{C}$, $M = \max |f(z)|$: אז $|\int_a^b f(z(t)) dz| \leq M \cdot L(b)$

$$\left| \int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt \right| \leq M \cdot \int_a^b |z'(t)| dt = M \cdot L(b)$$

אם

$$\left| \int_a^b f(z(t)) dz \right| \leq M \cdot L(b)$$

אם f היא פונקציה אנליטית ב D : אז $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ (משוואה)

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

אם f היא פונקציה אנליטית ב D : אז $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.

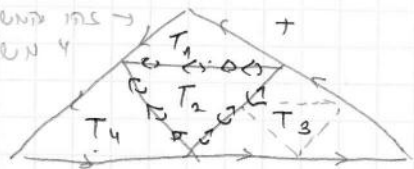


אם $d(A_n) \rightarrow 0$: אז $A_n \rightarrow 0$ (משוואה)

$$d(A_n) = \max \{ |z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in A_n \}$$

$$\int_a^b f(z) dz = A$$
 : (משוואה)

אם f היא פונקציה אנליטית ב D : אז $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ (משוואה)



$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{T_1} f(z) dz + \int_{T_2} f(z) dz + \int_{T_3} f(z) dz + \int_{T_4} f(z) dz$$

אם f היא פונקציה אנליטית ב D : אז $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ (משוואה)

נספח 1

$$|A| = \left| \int_T f dz \right| = \left| \int_{T_1} f dz + \int_{T_2} f dz + \int_{T_3} f dz + \int_{T_4} f dz \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{T_1} f dz \right| + \left| \int_{T_2} f dz \right| + \left| \int_{T_3} f dz \right| + \left| \int_{T_4} f dz \right|$$

ש $1 \leq k \leq 4$ כך ש:

המשולש T_k הוא משולש ישר זווית עם זווית של 45° וזווית של 45° וזווית של 90° .
 היתרון הוא שכל המשולשים T_k הם משולשים ישרי זווית.

נסתכל על המשולש T_1 (המשולש הראשון) שבו $T_1 = T_0$, $T = \Delta_0$ ונסתכל על המשולש T_2 .

$$\left| \int_{\Delta_0} f dz \right| = |A|, \quad \left| \int_{\Delta_n} f dz \right| \geq \frac{A}{4} \quad \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$$

$$\left| \int_{\Delta_n} f dz \right| \geq \frac{|A|}{4^n}$$

אם נסתכל על המשולשים Δ_n ונראה שיש להם זווית של 45° וזווית של 45° וזווית של 90° .

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \{z\}$$

אם נסתכל על המשולשים Δ_n ונראה שיש להם זווית של 45° וזווית של 45° וזווית של 90° .

$$f(z) = f(z) + f'(z)(z-z) + \alpha(z)(z-z), \quad \alpha(z) \rightarrow 0, z \rightarrow z$$

נסתכל על המשולש Δ_n שבו $T = \Delta_0$ ונראה שיש להם זווית של 45° וזווית של 45° וזווית של 90° .

$$|z_1 - z_2| < \frac{L}{2^n}$$

$$\frac{|A|}{4^n} \leq \left| \int_{\Delta_n} f dz \right| = \left| \int_{\Delta_n} [f(z) + (z-z)f'(z) + \alpha(z)(z-z)] dz \right|$$

אם נסתכל על המשולשים Δ_n ונראה שיש להם זווית של 45° וזווית של 45° וזווית של 90° .

$$z \cdot f'(z) + \frac{(z-z)^2}{2} f''(z)$$

נסתכל

$$\left| \int_{\Delta_n} \alpha(z)(z-z) dz \right| \leq L(\Delta_n) \cdot \max_{z \in \Delta_n} |\alpha(z)(z-z)| \leq L(\Delta_n) \cdot \max |\alpha(z)| \cdot \max |z-z| \leq$$

$$\leq \frac{L}{2^n} \max |\alpha(z)| \cdot \frac{L}{2^n} = \frac{L^2}{4^n} \cdot \max |\alpha(z)|$$

נסתכל על המשולשים Δ_n ונראה שיש להם זווית של 45° וזווית של 45° וזווית של 90° .

$$|A| \leq L \max |\alpha(z)| \Rightarrow \frac{|A|}{L^2} \leq \max |\alpha(z)| \rightarrow 0$$

מקור ממש

$$\leq \frac{1}{h} \cdot |h| \cdot \max |f(z) - f(z_0)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

קוב

④ הוכחה: נניח $f(z) = \frac{1}{z}$ ו- $0 < |z| < 1$ קי $f(z) = \frac{1}{z}$ נכונה. נניח $z_0 = 1$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dz}{z} = \ln 1$$

• משפט: תהי f פונקציה ב- D ש- f קבועה ו- f קבועה. אז $\int f = 0$.

הוכחה

$$\int f dz = F(B) - F(A) \quad \boxed{=}$$

• נניח $z_0 \in D$ ונניח:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

נניח f קבועה, F פונקציה קבועה, $F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(z) dz = \int_z^{z+h} c dz = c \cdot h$.

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(z) dz = \int_z^{z+h} c dz = c \cdot h$$

$$= \int_z^{z+h} f(z) dz \rightarrow \text{המשפט של גרין}$$

• $|h|$ קטן מספיק כך ש- $z+h \in D$.

• משפט: תהי f פונקציה קבועה ב- D ונניח $z_0 \in D$ ונניח $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z} dz$$

④ הוכחה

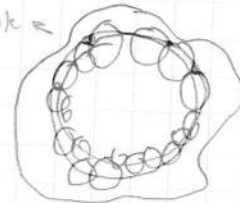
$$1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z-z}$$

• $f(z) = 1$

• D קטן מספיק כך ש- $z_0 \in D$.

הוכחה: קבועה

• משפט: נניח f פונקציה קבועה ב- D ונניח $z_0 \in D$ ונניח $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$. אז $F(z) = f(z) \cdot z$.



$$-f(z) + f(z)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) - f(z)}{z-z} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z} dz$$

• משפט

is not a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

if z_0 is inside the region bounded by C and f is analytic in D .

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

if z_0 is outside the region bounded by C

$$\left| \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi \cdot \max_{z \in C} |f(z) - f(z_0)|$$

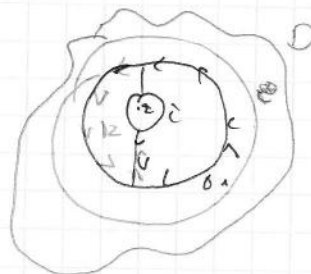
$$\leq 2\pi \cdot M \xrightarrow{M \rightarrow 0} 0$$

if z_0 is inside the region bounded by C

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

if z_0 is outside the region bounded by C

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$$



if z_0 is inside the region bounded by C and f is analytic in D , then $\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$

if z_0 is outside the region bounded by C

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

if z_0 is inside the region bounded by C

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

if z_0 is outside the region bounded by C

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 + 0 = 0$$

$$1) \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-0} dz = e^0 = 1$$

Wikipedia.

$$2) \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+z} dz = \int \text{partial fractions: } \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z} - \frac{0.5}{z+i} - \frac{0.5}{z-i} \Bigg\} =$$

$$= \int \left(\frac{\cos z}{z} - \frac{1/2 \cos z}{z+i} - \frac{1/2 \cos z}{z-i} \right) dz = 2\pi i \left[\cos(0) - \frac{1}{2} \cos(-i) - \frac{1}{2} \cos(i) \right]$$

$|z+i| = \frac{1}{2}$: from my sb

$$3) \oint_{|z+i|=1/2} \frac{\cos z}{z^2+z} dz = \int \frac{\cos z}{z} dz + \int \frac{-1/2 \cos z}{z+i} dz + \int \frac{-1/2 \cos z}{z-i} dz$$

$|z+i|=1/2$: $|z+i|=1/2 \downarrow$ $|z+i|=1 \downarrow$ $|z+i|=1/2 \downarrow$
 or $|z+i|=1/2$: $|z+i|=1/2 \downarrow$ $|z+i|=1 \downarrow$ $|z+i|=1/2 \downarrow$
 or $|z+i|=1/2$: $|z+i|=1/2 \downarrow$ $|z+i|=1 \downarrow$ $|z+i|=1/2 \downarrow$
 $= 0 = 2\pi i (-1/2 \cos(-i)) + 0 = 2\pi i (-1/2 \cos(i))$

$|z+i|=1/2 \rightarrow$



אם D גלילי f ; $\Delta(\alpha, \delta)$ יחסית δ ו- n : (המשפט של פאן) (פאן).

המשפט של פאן $\Delta(\alpha, \delta)$ יחסית

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi$$

המשפט של פאן : (המשפט של פאן)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$$

(המשפט של פאן) (המשפט של פאן)

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\delta} \cdot \frac{1}{h} \left[\int_{|z+h-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{\xi-(z+h)} d\xi - \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\delta} \cdot \frac{1}{h} \left[\frac{f(\xi) \cdot (\xi-z) - f(\xi) \cdot (\xi-(z+h))}{[\xi-(z+h)](\xi-z)} \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\delta} \cdot \left[\frac{f(\xi) \cdot h}{[\xi-(z+h)](\xi-z)} \right] \otimes$$

המשפט של פאן : (המשפט של פאן)

$$\frac{1}{2\pi\delta} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi - \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-(z+h))} = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{\xi-z} \left[\frac{1}{\xi-z} - \frac{1}{\xi-(z+h)} \right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{\xi-z} \cdot \frac{-h}{(\xi-z)(\xi-(z+h))} d\xi = -\frac{h}{2\pi\delta} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z)^2(\xi-(z+h))}$$

$|\xi-(z+h)| > c_1$, $|\xi-z| > c_1$, c_1 קבוע ו- δ קטן , δ קטן

$|\xi-z| = r$, $|f(\xi)| < C_2$, C_2 קבוע (המשפט של פאן)

$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2(\xi-(z+h))} \right| \leq \frac{C_2}{C_1^2} \cdot \frac{1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1^3}$$

המשפט של פאן : (המשפט של פאן)

$$\leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{C_2}{C_1^3} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\delta} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$$

המשפט של פאן : (המשפט של פאן)

$$1) \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \cdot \frac{3!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{(z-0)^{3+1}} dz = \sin^3(0) \cdot \frac{2\pi i}{3!} = -\cos(0) \cdot \frac{2\pi i}{3!} = -\frac{\pi i}{3}$$

⊕ משפט של קושי : אם f פונקציה אנליטית אז

יש לה f, g : משפט.

$$\int_{\gamma} f \cdot g' dz = f \cdot g \Big|_A^B - \int_{\gamma} f' g dz$$

$$\int_{\gamma} (f \cdot g' + f' g) dz = \int_{\gamma} (f \cdot g)' dz = (f \cdot g) \Big|_A^B$$

$$(f \cdot g) \Big|_A^B = 0 \quad \text{אם } f \text{ ו-} g \text{ הם פונקציות אנליטיות}$$

$$\begin{cases} f = \sin z & f' = \cos z \\ g' = \frac{1}{z^4} = z^{-4} & g = -\frac{1}{3} z^{-3} \end{cases}$$

$$= 0 + \frac{1}{3} \int \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{3 \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2\pi i} \int \frac{\cos z}{z^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{3 \cdot 2!} \cos^{(2)}(0) =$$

$$= -\cos(0) \frac{\pi i}{3} = -\frac{\pi i}{3}$$

⊕ משפט של קושי : אם f פונקציה אנליטית אז

$$\int_{\gamma} f'(g(t)) g'(t) dz = f \cdot g \Big|_A^B$$

אם f פונקציה אנליטית אז $f'(z)$ היא פונקציה אנליטית.

משפט של קושי : אם $P(x, y)$ ו- $Q(x, y)$ הם פונקציות אנליטיות אז

יש לה P, Q : משפט.

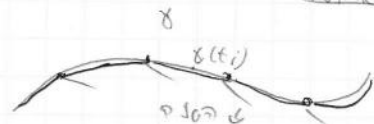
$$\oint P dy - Q dx = \int_D (P'x + Q'y) dx dy$$

המשפט מתאר את הקשר בין האינטגרל של $P dy - Q dx$ לאינטגרל של $P'x + Q'y$ על האזור D .

$$\bullet \int_a^b f dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt, \quad \phi(t) = (x(t), y(t)) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bullet \int_a^b f dy = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

הסבר גאומטרי:



סכום הקטעים הנ"ל

$$\sum f(z(t_i))$$

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור

הקטעים הנ"ל

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור



הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור, $f = u + iv$, u, v פונקציות של x, y .

$$\int f dz = \iint_D (-v'_x - u'_y) dx dy + i \iint_D (u'_x - v'_y) dx dy$$

$$\int f dz = \int (u + iv)(dx + idy) = \int -v dy + u dx + i \int u dy + v dx$$

הקטעים

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור

$$\int f dz = \iint_D (-v'_x - u'_y) dx dy + i \iint_D (u'_x - v'_y) dx dy$$

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x$$

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור

$$\int f dz = 0$$

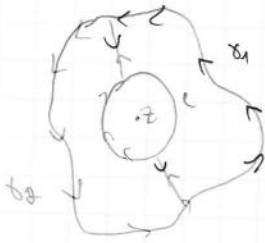
הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור, $T = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור

הקטעים הנ"ל הם קטעים של המישור

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-z} dz$$

1) $h(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$: $h(z)$ is analytic in D and $h(z_0) = f'(z_0)$



$$\int_{C_1} h(z) dz = \int_{C_2} h(z) dz = 0$$

$$\int_{C_2} h(z) dz = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} h(z) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f'(z_0)$$

Cauchy's integral formula for the n -th derivative of f at z_0

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

2) f is analytic in D and $z_0 \in D$. Then f is analytic in D and $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$\leftarrow z \rightarrow z_0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$$



Cauchy's integral formula

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$C: |z-z_0|=r$

$z = z_0 + re^{i\theta}$

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz = ire^{i\theta} d\theta \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

$$u(z_0) + iv(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(z_0 + re^{i\theta}) + iv(z_0 + re^{i\theta})] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

המשפט של פאנורא

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

המשפט של פאנורא : $f^{(n)}(z_0)$: זה פה זה המספר הזה

המשפט של פאנורא

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad z = z_0 + re^{i\theta}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) \cdot i re^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^n} \right| d\theta = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

המשפט של פאנורא : זה המספר הזה

זהו $|f(z)| \leq M$ (מ) : זה המספר הזה

זהו $n=1$: זה המספר הזה

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi M = M \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

$f'_x = u'_x + v'_x$, $f = u + iv$: זה המספר הזה

$$(f'_y = v'_y + i u'_y)$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-b} dz$$



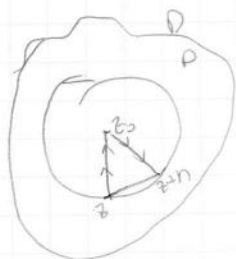
$$|f(a) - f(b)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right] dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)(a-b)}{(z-a)(z-b)} dz \right|$$

$$= ? \quad |z-a|, |z-b| > \frac{R}{2} \quad \text{+ פה זה המספר הזה}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R \cdot M |a-b|}{(R/2)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$\int_T f dz = 0$ אם f היא פונקציה אנליטית ב-D פנימייה של D ו- T סגורה.

אם f איננה אנליטית ב-D.



$$F(z) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

הפונקציה:

$$F(z+h) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

אם $F'(z) = f(z)$ אזי f היא פונקציה אנליטית ב-D.

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) = \frac{1}{h} \int_{\gamma} f(z) dz - \frac{1}{h} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{h} \int_{\gamma} (f(z) - f(z)) dz \rightarrow 0$$

8 תורת

מספיק : f היא פונקציה רציפה ב D ויש לה טור פולינמי T :

$$\int_T f(z) dz = 0$$

יש לה אינפיניט D .

מכאן :

משפט ויטמן : נניח $f_n \in L^\infty$ סימטרי אינפיניט D , $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .

נניח P : $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .
 נניח N : $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .

$$\forall z \in K : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

⊕ תוצאה : $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .

משפט ויטמן : נניח $f_n \in L^\infty$ סימטרי אינפיניט D , $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .



$$\int_T f_n dz \rightarrow \int_T f dz$$

$$\left| \int_T f_n dz - \int_T f dz \right| = \left| \int_T (f_n - f) dz \right| \leq \int_T |f_n - f| |dz| \leq$$

$$\leq \max_{z \in T} |f_n(z) - f(z)| \cdot \text{מסלול } T \rightarrow 0 \rightarrow f_n \Rightarrow f \text{ ב } D$$

אם $\int_T f dz = 0$ ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .

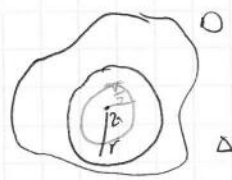
נניח $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .



$f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .
 נניח N : $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .
 נניח N : $f_n \Rightarrow f$ ב D ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .

$$z \in D : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

$$N = \max_{1 \leq i \leq l} N_i$$



$\Delta z = \Delta(z_0, \frac{\epsilon}{2})$ ויש לה אינפיניט D $\Rightarrow$ f היא פונקציה רציפה ב D .

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z)^2} dz$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z)^2} dz$$

יע

$$|f_n(z) - f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-z)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{(r/2)^2} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f_n(z) - f(z)|$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ועל $\max |f_n| \leq \max f + \max |f_n - f|$ (כל f מוגבלת)
כך ש $\max \frac{1}{(z-z_0)^2} \leq \frac{1}{(r/2)^2}$

כי זה המקסימום של $|f_n - f|$ הוא קטן יותר.

גורם של $\bar{z}$ מתכנסות

אנחנו נסתכל על מתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ונראה שהיא מתכנסת ב- D אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ מתכנסת ב- D .
אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ מתכנסת ב- D .
אם $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ מתכנסת ב- D .
אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D .

אם $\text{Re } z > 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D .

אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D .

אם $|u_n(z)| \leq a_n$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ מתכנסת ב- D .
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ מתכנסת ב- D .
אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D .

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = e^{\text{Re}[-z \log n]} = e^{-\log n \cdot \text{Re } z} = \frac{1}{n^{\text{Re } z}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$$

אם $\text{Re } z > 1 + \varepsilon$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D .
אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D .
אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנסת ב- D .

תרגיל

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

מטרה: נקבעים מסוימים (אופקציות) של α

מסומן: קיים $0 \leq R \leq \infty$ הסיור מתבסס: $R = \sup \{ |z-\alpha| : \dots \}$

מסקנות:

I. אם $R=0$ הסיור מתבסס ב- $z=\alpha$ בלבד

II. אם $R=\infty$ הסיור מתבסס בכל z

III. אם $0 < R < \infty$ הסיור מתבסס על z כזה ש $|z-\alpha| < R$, מתפרק על z כזה ש $|z-\alpha| > R$

בדיוק z כזה ש $|z-\alpha| = R$ ייתכן ש לא יספיק.

מסקנה: $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (כאן, אם קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ אז זהו R)

(הוכחה: כמו באינסוף)

נניח שמתנה, קיים $\alpha \neq 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

נניח, (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ מתבסס על z

נניח $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$: קיים n מסוים ש $\left| \frac{z^n}{n^n} \right| \leq \frac{1}{2}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$R = \frac{1}{0} = \infty$$

אם נניח $z \in \Delta(0, L)$ אז $\Delta(0, L)$ מוכלל ב- $\Delta(0, 2L)$ ו- $\alpha = 0$ אז $\Delta(0, L) \subset \Delta(0, 2L)$

$$\left| \frac{z^n}{n^n} \right| \leq \left| \frac{z}{n} \right|^n \leq \left| \frac{L}{n} \right|^n \leq \frac{1}{2} \quad \text{בדיוק } n > 2L$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ על $z \neq 0$:

$$a_n z^n \rightarrow 0 \quad \text{כאשר} \quad n^n z^n = (nz)^n \rightarrow \infty$$

הסיור מתפרק $R=0$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $a_n = 1$, $R=1$ $\Leftarrow \sqrt[n]{a_n} = 1$, $0 \leftarrow z^n$, $1 = |z|$ בדיוק

הסיור מתפרק בדיוק, $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

$$4) \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ זוגי} \\ (-1)^{n/2} & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

דיוק $n=2k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \quad R=1 \rightarrow \text{המקרה } z=1 \text{ ו-} z=-1$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} : |z| \leq 1 \quad \text{כל } R=1$$

הסדרה $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ ולכן המעגל $R=1$

② z_0 : נקודה פנימית $|z_0| < R$ כל $\rho < R$ $\Delta(0, \rho)$ ש' המעגל $\Delta(0, \rho)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב- $|z_0|$ $\rho < |z_0|$ $\Delta(0, \rho)$ $|z| \leq \rho$ $a_n z^n \rightarrow 0$

$$|a_n z^n| = \left| a_n \cdot \frac{z^n}{z_0^n} \cdot z_0^n \right| \leq \left(\frac{\rho}{|z_0|} \right)^n \cdot |a_n \cdot z_0^n|$$

כל $|a_n \cdot z_0^n| \leq 1$ $n > N_{z_0}$: נקודה פנימית

$$\left(\frac{\rho}{|z_0|} \right)^n, \sum \left(\frac{\rho}{|z_0|} \right)^n < \infty \rightarrow \text{סדרה מתכנסת}$$

לפיכך $\sum a_n z^n$ מתכנס בתנאי $R=1$

③ $\sum a_n$ מתכנס וכן $\sum a_n \cdot 1^n$ $R \geq 1$ $\Delta(0, R)$ $\sum |a_n| \cdot 1^n = \sum |a_n| = \infty$

$$\sum |a_n| \cdot 1^n \text{ נכש, } \sum a_n z^n \text{ נכש, } \sum |a_n| \cdot 1^n = \sum |a_n| = \infty$$

כל $R \leq 1$ $\Delta(0, R)$ $R=1$ $\Delta(0, R)$ $\sum |a_n| \cdot 1^n = \sum |a_n| = \infty$

④ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב- $\Delta(0, R)$ $R \geq 1$ $\Delta(0, R)$ $\sum |a_n| \cdot 1^n = \sum |a_n| = \infty$

כל $\Delta(0, R)$ $S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \Rightarrow S(z)$

כל $S_N(z) \Rightarrow S(z)$ $\Delta(0, R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^{n-1} \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)'$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' \quad \sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^{n-1}$$

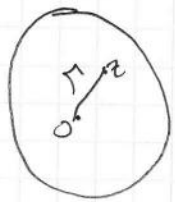
כל $\Delta(0, R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^{n-1}$

⑤ $\Delta(0, R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב- $\Delta(0, R)$ $\sum |a_n| \cdot 1^n = \sum |a_n| = \infty$

כל $\Delta(0, R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב- $\Delta(0, R)$ $\sum |a_n| \cdot 1^n = \sum |a_n| = \infty$

כל $\Delta(0, R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב- $\Delta(0, R)$ $\sum |a_n| \cdot 1^n = \sum |a_n| = \infty$

אם נבחר את האינטגרל הזה אז נקבל:



$$\int_{\Gamma} f(z) dz \Rightarrow \int_{\Gamma} f(z) dz$$

נניח

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=0}^N a_n z^n dz = \sum_{n=0}^N \int_{\Gamma} a_n z^n dz =$$

$$= \sum_{n=0}^N \int_0^1 \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

אם נבחר את האינטגרל הזה אז נקבל:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$: הפונקציה $f(z)$ שנקבעה היא הפונקציה $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$: הפונקציה $f(z)$ שנקבעה היא הפונקציה $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

אם $a_0 = f(0)$

אם $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Rightarrow f'(0) = 1 \cdot a_1$

$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \Rightarrow f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$

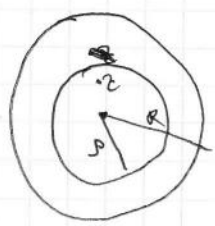
$\Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$

אם $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

אם $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$



אם $r < R$

אם $r < R$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

$\Rightarrow \frac{f(z)}{z-z} = \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z}} = \frac{f(z)}{z} \cdot \left[1 + \frac{z}{z} + \frac{z^2}{z^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{z^n}{z^n} + \frac{z^{n+1}}{z^{n+1}} + \dots \right]$

$\frac{z^n}{z^n} + \frac{z^{n+1}}{z^{n+1}} + \dots = \frac{z^n}{1-\frac{z}{z}} = \frac{z^n}{z^{n+1}(z-z)}$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{f(z)}{z} + z \cdot \frac{f(z)}{z^2} + z^2 \cdot \frac{f(z)}{z^3} + \dots + z^{n-1} \cdot \frac{f(z)}{z^n} + \frac{z^n}{z^n} \cdot \frac{f(z)}{z-z} \right]$

$= f(0) + z \cdot f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + z^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta$

$$\therefore p_k, \quad z^n \cdot g_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (0 \neq n \neq \infty)$$

$$|z^n g_n(z)| \cdot |z^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z^n (z-z)}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi p}{p^n(p-|z|)} \cdot M_p |z|^n = \frac{p \cdot M_p}{p-|z|} \cdot \left(\frac{|z|}{p}\right)^n \xrightarrow{\text{majorant}} 0$$

מקור $z^n g_n(z) = o(z^n)$
 $z \rightarrow 0$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x < 0 \end{cases}$$

max-7: יש להוסיף את המספרים של max-7 ושל max-8 כדי לקבל את התוצאה.

∴ $D_1 C D_2$ is $\Rightarrow D_2 D$ is $\perp$ to AC in $\triangle ABC$! may

f. Se

מחיר פד : 50 ₪

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{! 6ms}$$

01903 - Γ $\vartheta_1 = \Delta(0, 1) : N$

ע' שם חתונה:

1. Δ_2 2. Δ_1 3. Δ_0 4. Δ_{-1} 5. Δ_{-2} 6. Δ_{-3} 7. Δ_{-4} 8. Δ_{-5} 9. Δ_{-6} 10. Δ_{-7} 11. Δ_{-8} 12. Δ_{-9} 13. Δ_{-10} 14. Δ_{-11} 15. Δ_{-12} 16. Δ_{-13} 17. Δ_{-14} 18. Δ_{-15} 19. Δ_{-16} 20. Δ_{-17} 21. Δ_{-18} 22. Δ_{-19} 23. Δ_{-20} 24. Δ_{-21} 25. Δ_{-22} 26. Δ_{-23} 27. Δ_{-24} 28. Δ_{-25} 29. Δ_{-26} 30. Δ_{-27} 31. Δ_{-28} 32. Δ_{-29} 33. Δ_{-30} 34. Δ_{-31} 35. Δ_{-32} 36. Δ_{-33} 37. Δ_{-34} 38. Δ_{-35} 39. Δ_{-36} 40. Δ_{-37} 41. Δ_{-38} 42. Δ_{-39} 43. Δ_{-40} 44. Δ_{-41} 45. Δ_{-42} 46. Δ_{-43} 47. Δ_{-44} 48. Δ_{-45} 49. Δ_{-46} 50. Δ_{-47} 51. Δ_{-48} 52. Δ_{-49} 53. Δ_{-50} 54. Δ_{-51} 55. Δ_{-52} 56. Δ_{-53} 57. Δ_{-54} 58. Δ_{-55} 59. Δ_{-56} 60. Δ_{-57} 61. Δ_{-58} 62. Δ_{-59} 63. Δ_{-60} 64. Δ_{-61} 65. Δ_{-62} 66. Δ_{-63} 67. Δ_{-64} 68. Δ_{-65} 69. Δ_{-66} 70. Δ_{-67} 71. Δ_{-68} 72. Δ_{-69} 73. Δ_{-70} 74. Δ_{-71} 75. Δ_{-72} 76. Δ_{-73} 77. Δ_{-74} 78. Δ_{-75} 79. Δ_{-76} 80. Δ_{-77} 81. Δ_{-78} 82. Δ_{-79} 83. Δ_{-80} 84. Δ_{-81} 85. Δ_{-82} 86. Δ_{-83} 87. Δ_{-84} 88. Δ_{-85} 89. Δ_{-86} 90. Δ_{-87} 91. Δ_{-88} 92. Δ_{-89} 93. Δ_{-90} 94. Δ_{-91} 95. Δ_{-92} 96. Δ_{-93} 97. Δ_{-94} 98. Δ_{-95} 99. Δ_{-96} 100. Δ_{-97} 101. Δ_{-98} 102. Δ_{-99} 103. Δ_{-100} 104. Δ_{-101} 105. Δ_{-102} 106. Δ_{-103} 107. Δ_{-104} 108. Δ_{-105} 109. Δ_{-106} 110. Δ_{-107} 111. Δ_{-108} 112. Δ_{-109} 113. Δ_{-110} 114. Δ_{-111} 115. Δ_{-112} 116. Δ_{-113} 117. Δ_{-114} 118. Δ_{-115} 119. Δ_{-116} 120. Δ_{-117} 121. Δ_{-118} 122. Δ_{-119} 123. Δ_{-120} 124. Δ_{-121} 125. Δ_{-122} 126. Δ_{-123} 127. Δ_{-124} 128. Δ_{-125} 129. Δ_{-126} 130. Δ_{-127} 131. Δ_{-128} 132. Δ_{-129} 133. Δ_{-130} 134. Δ_{-131} 135. Δ_{-132} 136. Δ_{-133} 137. Δ_{-134} 138. Δ_{-135} 139. Δ_{-136} 140. Δ_{-137} 141. Δ_{-138} 142. Δ_{-139} 143. Δ_{-140} 144. Δ_{-141} 145. Δ_{-142} 146. Δ_{-143} 147. Δ_{-144} 148. Δ_{-145} 149. Δ_{-146} 150. Δ_{-147} 151. Δ_{-148} 152. Δ_{-149} 153. Δ_{-150} 154. Δ_{-151} 155. Δ_{-152} 156. Δ_{-153} 157. Δ_{-154} 158. Δ_{-155} 159. Δ_{-156} 160. Δ_{-157} 161. Δ_{-158} 162. Δ_{-159} 163. Δ_{-160} 164. Δ_{-161} 165. Δ_{-162} 166. Δ_{-163} 167. Δ_{-164} 168. Δ_{-165} 169. Δ_{-166} 170. Δ_{-167} 171. Δ_{-168} 172. Δ_{-169} 173. Δ_{-170} 174. Δ_{-171} 175. Δ_{-172} 176. Δ_{-173} 177. Δ_{-174} 178. Δ_{-175} 179. Δ_{-176} 180. Δ_{-177} 181. Δ_{-178} 182. Δ_{-179} 183. Δ_{-180} 184. Δ_{-181} 185. Δ_{-182} 186. Δ_{-183} 187. Δ_{-184} 188. Δ_{-185} 189. Δ_{-186} 190. Δ_{-187} 191. Δ_{-188} 192. Δ_{-189} 193. Δ_{-190} 194. Δ_{-191} 195. Δ_{-192} 196. Δ_{-193} 197. Δ_{-194} 198. Δ_{-195} 199. Δ_{-196} 200. Δ_{-197} 201. Δ_{-198} 202. Δ_{-199} 203. Δ_{-200} 204. Δ_{-201} 205. Δ_{-202} 206. Δ_{-203} 207. Δ_{-204} 208. Δ_{-205} 209. Δ_{-206} 210. Δ_{-207} 211. Δ_{-208} 212. Δ_{-209} 213. Δ_{-210} 214. Δ_{-211} 215. Δ_{-212} 216. Δ_{-213} 217. Δ_{-214} 218. Δ_{-215} 219. Δ_{-216} 220. Δ_{-217} 221. Δ_{-218} 222. Δ_{-219} 223. Δ_{-220} 224. Δ_{-221} 225. Δ_{-222} 226. Δ_{-223} 227. Δ_{-224} 228. Δ_{-225} 229. Δ_{-226} 230. Δ_{-227} 231. Δ_{-228} 232. Δ_{-229} 233. Δ_{-230} 234. Δ_{-231} 235. Δ_{-232} 236. Δ_{-233} 237. Δ_{-234} 238. Δ_{-235} 239. Δ_{-236} 240. Δ_{-237} 241. Δ_{-238} 242. Δ_{-239} 243. Δ_{-240} 244. Δ_{-241} 245. Δ_{-242} 246. Δ_{-243} 247. Δ_{-244} 248. Δ_{-245} 249. Δ_{-246} 250. Δ_{-247} 251. Δ_{-248} 252. Δ_{-249} 253. Δ_{-250} 254. Δ_{-251}

Δ_1 מרחב
 5-7
 מרחב

13.5.13

2013

השאלה היא: האם יש פונקציה אנליטית ב- $z=1$?

התשובה:

$$1) f(z) = \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots, \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty, R=1$$

$$d=1-|z_0|, R=1-|z_0|$$

הפונקציה $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב- $z=1$.

$$2) f(z) = \log z, z_0 = -1+i$$

השאלה היא: האם יש פונקציה אנליטית ב- $z=-1+i$?

$$f(z) = \log(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}$$

$$f'(z) = \frac{1}{z}, f''(z) = -\frac{1}{z^2}, f^{(3)}(z) = \frac{2}{z^3}, \dots, f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-2}}{z^n}$$

$$f(z) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(-1)^{n-2}}{n!(-1+i)^n} (z-z_0)^n =$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n!(-1+i)^n} (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup |a_n|}, |a_n| = \frac{1}{n!(-1+i)^n} = \frac{1}{n!2^{n/2}}$$

$$\limsup |a_n| = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

לכן:

$$C \setminus \{x : x \leq 0\}$$

הפונקציה $\log z$ היא פונקציה אנליטית ב- $z=-1+i$.

התשובה:

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}, \log z$$

השאלה היא: האם יש פונקציה אנליטית ב- $z=-1+i$?

התשובה היא: כן, הפונקציה $\log z$ היא פונקציה אנליטית ב- $z=-1+i$.

$$R=\sqrt{2}$$

חילוק סדר גבוה של מכלול/חיסור / חילוק / חכמה של

נוח $f(z)$, $g(z)$ אינן-פסיקה z (כל מה שכן סדר גבוה)

מהו סדר גבוה של $f+g$, $f \cdot g$, f/g , $f \cdot g$?

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots, \quad z=0, \dots$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \dots$$

$$f(z) \pm g(z) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)z + \dots$$

$$(f \pm g)^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \pm g^{(n)}(0)$$

כאשר f ו- g הם פונקציות אנליטיות:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

כאשר f ו- g הם פונקציות אנליטיות:

$$h(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + o(z^n) \dots$$

$$a_{n+1} z^{n+1} \left[\frac{1 + a_{n+1} z}{a_{n+1} z} \right]$$

$o(z^n)$

סדר $h(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + o(z^n)$

f, g פונקציות אנליטיות c_0, c_1, c_2

$$d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n + o(z^n) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + o(z^n) \quad \text{אם: } d_i = c_i$$

$$0 \leq i \leq n, \quad c_i = d_i$$

כאשר $z \rightarrow 0$ ו- $z \neq 0$ (כלומר $z=0$)

$$c_1 + c_2 z + \dots + c_n z^{n-1} + o(z^{n-1}) = d_1 + d_2 z + \dots + d_n z^{n-1} + o(z^{n-1})$$

$$c_1 = d_1 \quad \text{כאשר } z \rightarrow 0$$

$$(z \neq 0 \text{ ו-} z \neq 1) \quad c_n + z(1) = d_n + o(1)$$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + o(z^2) \quad \text{אם: } a_i = b_i$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + o(z^2)$$

$$f(z) \cdot g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + o(z^2)$$

כאשר f, g הם פונקציות אנליטיות:

הבה:

1) $f(z) = \sin^2(z)$, $z_0 = 0$

$f(0) = 0$

~~$f'(0) = 0$~~

$f'(z) = 2\sin z \cos z$

$f'(0) = 0$

$f''(z) = 2\cos 2z \rightarrow f''(0) = 2 \neq 0$

לפי משפט 4.

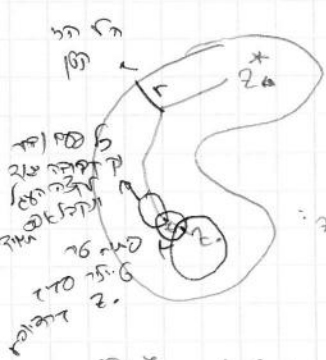
אם $h^{(n)}(z_0) = 0$ עבור $n=0,1,2,\dots$ ו- $h(z_0) \neq 0$ אז h אינה מתאפסת ב- z_0 .

משפט: אם $f \equiv 0$ או $f \neq 0$ אז f אינה מתאפסת ב- z_0 .

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

לפי משפט 4, אם f אינה מתאפסת ב- z_0 אז f אינה מתאפסת ב- z_0 .

משפט: אם h אינה מתאפסת ב- z_0 אז h אינה מתאפסת ב- z_0 .
הוכחה: נניח $h(z_0) = 0$ ו- $h \neq 0$. אז h אינה מתאפסת ב- z_0 .



$\text{dist}(L, z_0) = r > 0$

משפט: אם h אינה מתאפסת ב- z_0 אז h אינה מתאפסת ב- z_0 .
הוכחה: נניח $h(z_0) = 0$ ו- $h \neq 0$. אז h אינה מתאפסת ב- z_0 .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

משפט: אם $f \equiv 0$ אז f אינה מתאפסת ב- z_0 .

משפט: אם $f \neq 0$ אז f אינה מתאפסת ב- z_0 .

משפט: אם $f \neq 0$ אז f אינה מתאפסת ב- z_0 .

$$h(z^*) = 0$$

משפט: אם $h \neq 0$ אז h אינה מתאפסת ב- z_0 .

משפט: אם $h \neq 0$ אז h אינה מתאפסת ב- z_0 .

$$h(z) = 0 = 1 + \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z-z_0)^{n+2} + \dots$$

$$= \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \left[1 + \frac{a_{n+1}}{h^{(n)}(z_0)} (z-z_0) + \dots \right]$$

$\Delta(z_0, \varepsilon)$
 $f(z_0) \neq 0$ ואיננו נק' סדוקה z_0 : $f(z) \neq 0$ ונק' סדוקה :

$$h(z) = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \cdot g(z)$$

$\Delta(z_0, \varepsilon)$: הפונקציה $g(z)$ איננה 0

מכאן: אם f, g איננו 0 ב- D , $f=g$ ב- D ו- $z \in A$ אז $f(z) = g(z)$ ב- D .

נניח $h = f \cdot g$, $h \equiv 0$ ב- D ו- $z \in A$ אז $h(z) = 0$ וכל $z \in D$ אז $h(z) = 0$.

משפט: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: (א)

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$$

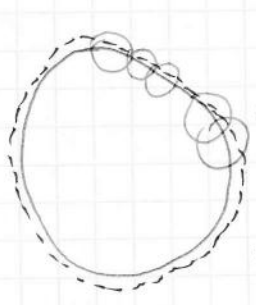
$$g(z) = 1$$

⊗ הצגה: חסר שם ההצגה חסר ב-0

⊗ הצגה: $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ איננו 0 ב- $z \neq 0$, $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$, $\frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$ כ- $n \rightarrow \infty$.

מכאן נניח R מספיק גדול ו- $0 < R < \infty$, אז $z \in D$ ו- $z \in A$ אז $|z - z_0| = R$ ו- $z \in D$.

זו: "סינגולר" חסר שם איננו סדוקה z_0 שבה f איננה סדוקה בנקודה z_0 .



החומר נניח קטנה שם z_0 איננו סדוקה z_0 שבה f איננה סדוקה בנקודה z_0 .

אם $z_1, z_2 \in D$ אז $|z_1 - z_2| < R$ ו- $z_1, z_2 \in D$ אז $|z_1 - z_2| < R$.

וכן, d המרחק ה-min של z_1, z_2 איננו סדוקה z_0 שבה f איננה סדוקה בנקודה z_0 .

מכאן, קיבלנו כי המרחק d של z_1, z_2 איננו סדוקה z_0 שבה f איננה סדוקה בנקודה z_0 .

היחס d המרחק d של z_1, z_2 איננו סדוקה z_0 שבה f איננה סדוקה בנקודה z_0 .

ב- D המרחק d של z_1, z_2 איננו סדוקה z_0 שבה f איננה סדוקה בנקודה z_0 .

⊗ הצגה: $R=1$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$|f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

! idk $a_0 = 0$ plz $f(z)(z-z_0)^m = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$



$$f(z)(z-z_0)^{m-1} = \underbrace{a_1 + a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^2 + \dots}_{\text{holomorphic at } z_0}$$

sk 230) $a_0 \neq 0$ plz. mmo $f(z)(z-z_0)^{m-1}$ is holomorphic at z_0

$$g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

! idk $g(z_0) = a_0 \neq 0$! holomorphic

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

7 סיגל

סיגל

הפונקציה $r(u,v): (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ מהווה

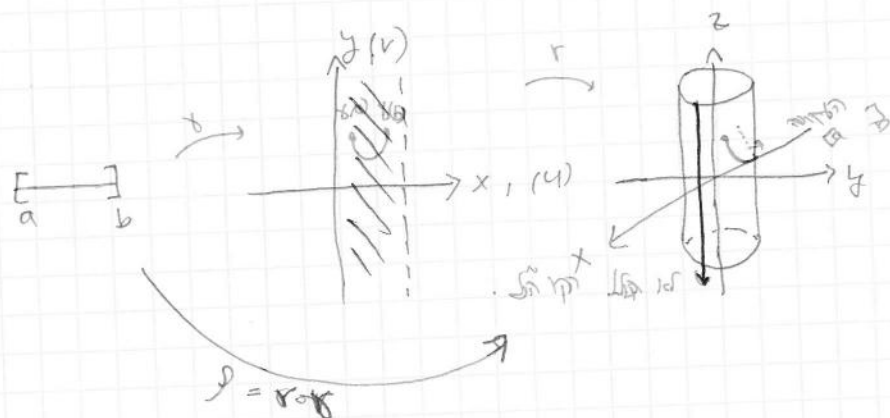
הפונקציה $r(u,v) = (r \cos u, r \sin u, v)$

המשטח $M = \{x^2 + y^2 = 1\}$ בסיס P : מסלול

$$g(t) = r(g(t))$$

המשטח P מהווה מסלול

סיגל



המשטח P מהווה מסלול

המשטח P מהווה מסלול $g(t) = (u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$

המשטח P מהווה מסלול $g'(t) = (u'(t), v'(t))$: מסלול

$$\|g'(t)\| = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}$$

המשטח P מהווה מסלול $g(t)$: מסלול

$$L[g] = \int_a^b \|g'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt$$

$$g(t) = r(g(t)) = r(u(t), v(t)) =$$

$$= (r \cos u(t), r \sin u(t), v(t))$$

$$g'(t) = (-r \sin u(t) \cdot u'(t), r \cos u(t) \cdot u'(t), v'(t))$$

$$\|g'(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 u(t) \cdot u'(t)^2 + r^2 \cos^2 u(t) \cdot u'(t)^2 + v'(t)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2 u'(t)^2 + v'(t)^2}$$

$$\Rightarrow L(g'(t)) = \int_a^b \|g'(t)\| dt = \int_a^b \|g'(t)\| dt$$

$$\Rightarrow L[g] = L[g]$$

האם יש פונקציה ϕ כזו?

הבה נניח שיש פונקציה כזו, אז $\phi = 0$ בנקודה זו, וזה אומר שיש פונקציה ϕ שמתאמת את ϕ ו-1.

אם $\phi = 0$ בנקודה זו, אז ϕ מתאמת את ϕ ו-1.

$$\textcircled{*} \int_a^b \sqrt{\delta(t)^T (g_{ij}) \delta(t)} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

הנה, $\delta(t)$ הוא וקטור המהירות.

$$\delta(t) = (\dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t))^T$$

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dx^2}{dt} \end{pmatrix} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle$$

$$\delta(t)^T (g_{ij}) \delta(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} & \frac{dx^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dx^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} & \frac{dx^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \frac{dx^1}{dt} + g_{12} \frac{dx^2}{dt} \\ g_{12} \frac{dx^1}{dt} + g_{22} \frac{dx^2}{dt} \end{pmatrix} =$$

הנה,

$$= g_{11} \frac{dx^1}{dt} \cdot \frac{dx^1}{dt} + g_{12} \frac{dx^1}{dt} \cdot \frac{dx^2}{dt} + g_{21} \frac{dx^2}{dt} \cdot \frac{dx^1}{dt} + g_{22} \frac{dx^2}{dt} \cdot \frac{dx^2}{dt} =$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt}$$

אם $\tilde{O}$ הוא נקודה בנקודה $\tilde{O}$ של D , אז $\tilde{O}$ הוא נקודה בנקודה $\tilde{O}$ של D .

$$A = \iint_D \sqrt{\det(g_{ij})} du dv$$

לחשב

נקודה $\alpha(t) = (t, t)$, $u = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi\}$: u הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

לחשב $\alpha(t)$ הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

לחשב $r: u \rightarrow \mathbb{R}^3$ הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

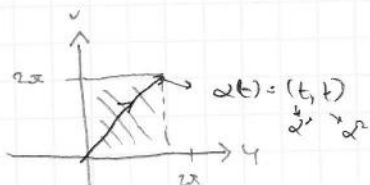
לחשב r הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

לחשב r הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2e^u & 0 \\ 0 & 2e^v \end{pmatrix}$$

לחשב $\alpha(t)$ הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

לחשב



$$L[\alpha] = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

לחשב $\alpha(t)$ הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

לחשב $\alpha(t)$ הנקודה μ μ $0 \leq t < 2\pi$

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (1, 0, 0), \quad \frac{\partial r}{\partial v} = (0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow g_{11} = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1$$

$$g_{12} = 0 = g_{21}$$

$$\Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$g_{22} = 1$$

$$\Rightarrow L[\alpha] = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11} \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + g_{12} \left(\frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} \right) + g_{22} \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

$$0 < u < 2\pi, \quad r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

התבונן מ 33, 2

$$0 < v < 2\pi$$

התבונן מ 33, 2

$$p(t) = r(\gamma(t)) = r(t, t) =$$

$$= (t \cos t, t \sin t, t)$$

התבונן מ 33, 2

התבונן מ 33, 2

$$p'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

$$\|p'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{t^2 + 2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt = \left\{ t = \sqrt{2} \sinh \theta, t^2 = 2 \sinh^2 \theta, t^2 + 2 = 2 [\sinh^2 \theta + 1] = 2 \cosh^2 \theta, \right.$$

$$dt = \sqrt{2} \cosh \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \int \sqrt{2 \cosh^2 \theta} \cdot \sqrt{2} \cosh \theta d\theta$$

התבונן מ 33, 2

$$t = \sqrt{2} \sinh \theta, \quad \frac{t}{\sqrt{2}} = \sinh \theta, \quad \theta = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right)} \cosh^3 \theta d\theta$$

$$= \cosh^2 \theta : \text{התבונן מ 33, 2}$$

$$\Rightarrow \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \Rightarrow \cosh^2 \theta = \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^\theta + e^{-\theta})^2 =$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2\theta} + e^{-2\theta}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cosh 2\theta + \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right)} \cosh^3 \theta d\theta = \int_0^{\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right)} (\cosh 2\theta + 1) d\theta = \left. \frac{\sinh 2\theta}{2} + \theta \right|_{\theta=0}^{\theta=\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right)} =$$

$$= \frac{\sinh \left(2 \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right) \right)}{2} + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \right) \approx 22.43$$

! p m n) : (g_{ij}) d' r p r . 2

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

$$\Rightarrow g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = u^2 + 1 \quad *$$

$$\Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L[\alpha] = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

$$\alpha(t) = (t, t)$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11} \cdot 1 \cdot 1 + g_{12}(\quad) + g_{21}(\quad) + g_{22} \cdot 1 \cdot 1} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(t^2 + 1) + 1} dt$$

! p m n) g_{ij} p m n) 1 2 3 . 2

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2e^{2u} & 0 \\ 0 & 2e^{2v} \end{pmatrix}$$

$$g_{ij}|_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$L[\alpha] = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^1}{dt} + g_{12}(\quad) + g_{21}(\quad) + g_{22} \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^2}{dt}} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t} \cdot 1 \cdot 1 + 2e^{2t} \cdot 1 \cdot 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4e^{2t}} dt = \int_0^{2\pi} 2e^t dt = 2e^t \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2(e^{2\pi} - 1)$$

סוג סינגולר

f אנליטי ב- $\Delta(\alpha, r)$:

- (1) α סינגולר סדור אם g אנליטי ב- $\Delta(\alpha, r)$ כפ $g = f$ ב- $\Delta'(\alpha, r)$ בלבד.
- (2) α קווקס סדור אם קיים m כך ש- $f(z) = g(z)(z-\alpha)^m$, $g(\alpha) \neq 0$, $\Delta(\alpha, r)$ ב- g אנליטי.
 קדמית $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty$ - תנאי הכרחי ומספיק
- (3) סינגולר אסידור אם סוג (א) ולא סוג (2).

למקרה מיוחד: α קווקס סדור $m \Leftrightarrow \alpha$ סוג סדור של $f(z)(z-\alpha)^m$ ליתר סדור סדור
 של $f(z)(z-\alpha)^{m-1}$.

דוג:

$\alpha = 0$, $f(z) = \sin(z) =$ סינוס סינגולר .
 $= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$
 = סוג סדור סדור

$f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$
 ב- $z=0$ קווקס $g(z)$

2790 - $\frac{\cos z}{z^2}$, 1790 - $\frac{\cos z}{z}$: דוג.

סינגולר אסידור : $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ אנליטי ב- $\Delta(0, r)$, r לכל, אבל $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ אינו קיים.

ההתנהגות של $f(z)$ בסביבת 0 תלויה ב- $\frac{1}{z}$ (אם z קטן, $\frac{1}{z}$ גדול).

$\lim_{z \rightarrow 0^+} f(z) = +\infty \Rightarrow$ 0 לא סדור סדור

$\lim_{z \rightarrow 0^-} f(z) = 0 \Rightarrow$ 0 לא קווקס

$z = iy$, $|e^{\frac{1}{z}}| = 1$ [התנהגות סינגולר אסידור]

$z = iy \rightarrow \frac{1}{z} = -\frac{i}{y}$

[$e^{\frac{1}{z}} = e^{i(-\frac{1}{y})} = \cos(-\frac{1}{y}) + i \sin(-\frac{1}{y})$]

$z_n = \frac{1}{n\pi}$, $\alpha = 0$, $f(z) = \sin \frac{1}{z}$

$f(z_n) = 0$ ב- z_n קווקס

$z_n^* = \frac{1}{2n\pi + \pi} \Rightarrow f(z_n^*) = 1$

ולכן f לא סדור סדור, 0 לא סדור סדור.

3 $f(z) = \sin\left(\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}\right)$: כל פונקציה $f(z)$ היא פונקציה של z

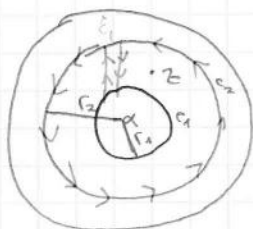
היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

4 $f(z) = \log z$, $z=0$, $x < 0$, $x > 0$

$\log re^{i\theta} = \log r + i\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty}$

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

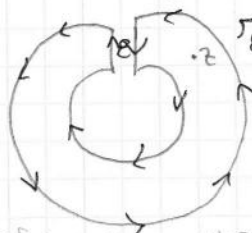
פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית



היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

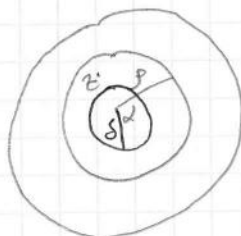
היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

$$\tilde{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

$$\tilde{f}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

היא פונקציה של z סימטרית וזוהי אינה פונקציה של z סימטרית

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ישו: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ קומה ע"פ δ ו- ϵ קטן מספיק

$$|z-\alpha|=\delta, \quad |f(z)(z-\alpha)| < \epsilon$$

$$|f(z)| < \frac{\epsilon}{\delta}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)-(z-\alpha)} dz \right| <$$

מכאן

$$\leq \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi\delta \cdot \frac{\epsilon}{\delta} \cdot \frac{1}{|z-\alpha|-\delta} = \frac{\epsilon}{|z-\alpha|-\delta} < \frac{\epsilon}{\frac{\delta}{2}} = \frac{2\epsilon}{\delta}$$

$$\delta < |z-\alpha| : \delta \text{ כך } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0$$

מכאן

קטן: $f(z) = \tilde{f}(z)$ כש $\tilde{f}$ אנליטי ב- α ו- $\tilde{f}$ חסומה סביב α

הוכחה

משפט: $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = L \iff f$ חסומה ו- f אנליטי ב- α

משפט: $\lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^m f(z) = L \iff f$ חסומה ו- f אנליטי ב- α ו- f חסומה סביב α

מכאן

הוכחה: כי $\lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^m f(z) = L$ אז $(z-\alpha)^m f(z)$ חסומה ו- f חסומה סביב α

$$g(z) \neq 0, \quad (z-\alpha)^m f(z) = g(z)$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$$

משפט: $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty$ אז f חסומה סביב α

הוכחה: $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{1}{f} = 0$. $\Delta(\alpha, r)$: α חסומה סביב α ו- $\frac{1}{f}$ חסומה סביב α

משפט: $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty$ אז f חסומה סביב α ו- f חסומה סביב α

$$\frac{1}{f} = (z-\alpha)^m \cdot g(z)$$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{1}{(z-\alpha)^m} : g(\alpha) \neq 0, \quad g \text{ חסומה סביב } \alpha$$

משפט: $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty$ אז f חסומה סביב α

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty \iff f \text{ חסומה סביב } \alpha$$

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty \iff f \text{ חסומה סביב } \alpha$$

משפט (קוואלי-ווייטשטיין): יהי f פונקציה אנליטית ב- $\Delta(\alpha, r)$ ו- $0 < \rho < r$ אז

$$f(\Delta(\alpha, \rho)) \subset \mathbb{C}$$

וכן: $A \subset B$ כאשר B הוא דיסק $\Delta(\alpha, r)$ ו- A הוא דיסק $\Delta(\alpha, \rho)$ ו- $0 < \rho < r$

אם B הוא דיסק $\Delta(\alpha, r)$ ו- A הוא דיסק $\Delta(\alpha, \rho)$ ו- $0 < \rho < r$

הוכחה:

נניח: $z_n \rightarrow \alpha$ ו- $w \in \mathbb{C}$ אז $f(z_n) \rightarrow w$ ו- $z_n \neq \alpha$ ו- $w \neq f(\alpha)$

נניח: $0 < \rho < r$ ו- $w \in \mathbb{C}$ אז $0 < \rho < r$ ו- $w \in \mathbb{C}$

$$z \in \Delta(\alpha, \rho) : |f(z) - w| \geq \epsilon_0$$

$$|f(z) - w| \leq \frac{1}{\epsilon_0} \quad \Delta(\alpha, \rho) \quad \psi(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad \text{נניח:}$$

אם $\psi(z)$ הוא פונקציה אנליטית ב- $\Delta(\alpha, \rho)$ ו- $\psi(\alpha) \neq 0$

$$f(z) - w_0 = \frac{1}{\psi(z)} \quad \psi(\alpha) \neq 0$$

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{\psi(z)}$$

אם f היא פונקציה אנליטית ב- $\Delta(\alpha, r)$ ו- $f(\alpha) = w_0$

נניח: $g(z) \neq 0$ ב- $\Delta(\alpha, r)$ ו- $\psi(z) = (z - \alpha)^m g(z)$ ו- $\psi(\alpha) = 0$

$$f(z) - w_0 = \frac{1}{\psi(z)} = \frac{1}{(z - \alpha)^m g(z)}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^m g(z)} + w_0$$

סדרה

יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ סדרה מסתכנת, ו- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ הסכום שלה

אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ מסתכנת, אז $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ הוא הסכום שלה

נניח: $A_n, B_n \rightarrow \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=A_n}^{B_n} a_n$ קיים: $\Leftrightarrow$ קיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$

אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ מסתכנת, אז $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ הוא הסכום שלה

יהי A קבוצה קומפקטית, ו- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ סדרה מסתכנת ב- A ו- $A = \emptyset$

אם A היא קבוצה מסתכנת, אז $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ מסתכנת ב- A

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad \text{!} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

הסבר: הנוסחה מתקנה $\Leftrightarrow$

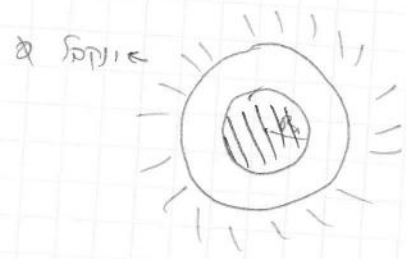
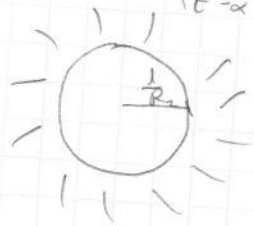
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-\alpha}\right)^n$$

אם $|z-\alpha| > \frac{1}{R_2}$:

אם $\left|\frac{1}{z-\alpha}\right| < R_2$ מתקנה II



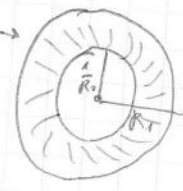
← I מתקנה P



(2)

המקרה השני: המקרה הראשון

→ המקרה השני המקרה הראשון



(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n^2}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

(3) מקרה זה:



$\{z|z|=1\}$

מקרה קבוע ק

$n \neq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

מקרה של מקרה זה

(4) מקרה מיוחד $R_2 = \infty, R_1 = 1$



המשפט: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ מתקנה $\Delta(\alpha, R_2)$ קטן $\Delta(\alpha, r)$ $r < R_1$ וכן מתקנה $\bar{\Delta}(\alpha, \frac{1}{r})$ $\bar{\Delta}(\alpha, \frac{1}{R_2})$ קטן $\bar{\Delta}(\alpha, \frac{1}{R_2})$ וקטן $\bar{\Delta}(\alpha, \frac{1}{r})$

אם $r < R_2$ (אם $\frac{1}{r} > \frac{1}{R_2}$)

המשפט: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ מתקנה המקרה המקרה המקרה המקרה

מקרה מקרה מקרה

ומקרה, המקרה המקרה המקרה המקרה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n (z-\alpha)^n$$

אז $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot n (z-\alpha)^{n-1}$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \right)' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot n (z-\alpha)^{n-1}$$

מקרה מקרה מקרה

כדי להוכיח את המשפט של פאן-קוראני-הורוויץ.

משפט (פאן-קוראני-הורוויץ): יהי f פונקציה אנליטית ב- $D(\alpha, r)$ עבור $-\infty < \alpha < \infty$, $r > 0$.

$$0 < \rho < 1, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\rho} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

אז:

$$D(\alpha, r) \text{ פונקציה אנליטית } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

2. נניח $a_n = b_n$ אז $D(\alpha, r) \text{ פונקציה אנליטית } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n$: פירוש, כי:

3. יהי $\rho_1 < \rho_2 < r$ עבור $\rho_1 < |z-\alpha| < \rho_2$ ונניח $D(\alpha, r)$ פונקציה אנליטית.

לפי (1) יהי f פונקציה אנליטית ב- $D(\alpha, r)$ (קטגוריה של פונקציות אנליטיות).

הוכחה:

4. יהי z ב- $D(\alpha, r)$ נבחר $\rho_1 < |z-\alpha| < \rho_2$ ונניח $a_n = b_n$.

$$\int_{\Gamma} h(z) dz = 0 \quad \text{כאשר } h(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

$$\int_{\Gamma} h(z) dz = \int_{\Gamma} (-v'_x + u'_y) dx dy +$$

$$+ i \int_{\Gamma} (u'_x - v'_y) dx dy = 0 \rightarrow \text{קושי-הירדן}$$

הפונקציה h היא פונקציה אנליטית.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz = 0$$

עבור $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{|z-\alpha|=\rho_2} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz = \int_{|z-\alpha|=\rho_1} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

לפי (2) יהי f פונקציה אנליטית ב- $D(\alpha, r)$.

כעת נניח f פונקציה אנליטית ב- $D(\alpha, r)$ ונניח $a_n = b_n$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

נניח f פונקציה אנליטית ב- $D(\alpha, r)$ ונניח $a_n = b_n$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} \frac{f(z)}{z-\alpha} \left[\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\rho_2-\alpha}} \right] dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} \frac{f(z)}{z-\alpha} \left[1 + \frac{z-\alpha}{\rho_2-\alpha} + \frac{(z-\alpha)^2}{(\rho_2-\alpha)^2} + \dots \right] dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + \frac{z-\alpha}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz + \frac{(z-\alpha)^2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^3} dz + \dots + \frac{(z-\alpha)^{n-1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

↓
n-1-tes qn

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha-(z-\alpha)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{-(z-\alpha) \cdot [1 - \frac{z-\alpha}{z-\alpha}]} dz$$

: yun formula +

$|z-\alpha| = \rho_1$ $|\frac{z-\alpha}{z-\alpha}| < 1$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-\alpha)} \left[1 + \frac{z-\alpha}{z-\alpha} + \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\alpha)^2} + \dots \right] dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2} dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)(z-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3} dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)(z-\alpha)^{n-1}}{(z-\alpha)^{n+1}} dz =$$

$(z-\alpha)^{-n}$ $\downarrow$ n

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

27.5.13

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

משפט: יהי f פונקציה אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ ו $0 < \rho < r$ אז:

אז:

$$\Delta(\alpha, r) \text{ פ } f(z) \text{ מתקן } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

הקטור, חיובי

הטור מתקן פונקציה $f(z)$ ב $\Delta(\alpha, r)$ אם ורק אם $\Delta(\alpha, r)$ מתקן $f(z)$

נניח שהפונקציה $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ מתקנה $\alpha=0$ ונניח $b_k = a_k$:

טור זה מתקן את $f(z)$ ב $\Delta(0, r)$ אם ורק אם $\Delta(0, r)$ מתקן $f(z)$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-k-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{\gamma} z^{n-k-1} dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = b_k$$

המשפט נכון ו α סתמי (אם $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ אז $a_{-1} = \text{Res}(f, \alpha)$

$\text{Res}(f, \alpha) = a_{-1}$ ו α

$$\text{Res}(f, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} a_n (z-\alpha)^n dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-\alpha} = a_{-1}$$

~~$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$~~

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

המשפט: אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

המשפט: אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

המשפט:

אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \dots}{(z-\alpha)^m} = \frac{a_0}{(z-\alpha)^m} + \frac{a_1}{(z-\alpha)^{m-1}} + \dots$$

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-\alpha)^m} + \frac{a_1}{(z-\alpha)^{m-1}} + \dots = \frac{a_0 + a_1(z-\alpha) + \dots}{(z-\alpha)^m} = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$$

אם f אנליטית ב $\Delta(\alpha, r)$ אז $a_{-1} = 0$ ו γ סגור אז $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

$$\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \dots \quad \forall w$$

האם זה נכון?

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \dots \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

$$z \sin z = z - \frac{1}{z^2 3!} + \frac{1}{z^4 5!} - \dots \rightarrow \infty \text{ או } 0$$

$$f(z) = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \dots \quad |z| < 1$$

האם זה נכון?

הערה: לא קורה שכל סדרה מתכנסת.

$\sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$ נכון $|z| < 3$ מתכנס $\sum_0^{\infty} z^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $|z| < \frac{1}{3}$ מתכנס $\sum_0^{\infty} z^n z^n$
 מתכנס $|z| < 3$ נכונה, נראה $|z| > \frac{1}{3}$ סדרה מתכנסת או לא מתכנסת? $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$
 $\sum_0^{\infty} \frac{(1/3)^n}{z^n} + \sum_0^{\infty} z^n z^n$

המשפט: יהי f פונקציה אנליטית ב D , $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$, $f(z) : r_1 < |z-\alpha| < r_2$?

אם $r_1 < \rho < r_2$, $\infty < n < \infty$,
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

אם f היא פונקציה אנליטית ב D ,
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

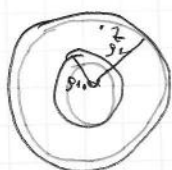
2. הפיתוח יחיד

3. התחלקות הפונקציה

4. ההתאמה של פונקציה אנליטית

הוכחה:

אנחנו רוצים להוכיח ש $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב D , $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $f(z) : r_1 < |z-\alpha| < r_2$?



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

19

1) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$, $|z| < 1$

2) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| > 1$, $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב D , $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $f(z) : r_1 < |z-\alpha| < r_2$?

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right] =$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \rightarrow$$

הפיתוח יחיד של $f(z)$ הוא $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots$

המשפט: אם $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב D , $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $f(z) : r_1 < |z-\alpha| < r_2$?

הפיתוח יחיד של $f(z)$ הוא $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots$

אם $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב D , $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $f(z) : r_1 < |z-\alpha| < r_2$?

אם $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב D , $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $f(z) : r_1 < |z-\alpha| < r_2$?

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \dots$$

19

1) $g'(z) = g_1(z) \cdot (z-\alpha)^{n+1}$

polynomial

$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f_1'(z)}{g_1'(z)} (z-\alpha)^{n-m} \xrightarrow{z \rightarrow \alpha} \infty$

1) $m < n$ pole

$\frac{f(z)}{g(z)} = 0 = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f'(z)}{g'(z)}$

$m = n$ zero

$f_1'(\alpha) = -m \cdot f_1(\alpha)$

$g_1'(\alpha) = -m g_1(\alpha)$

2) $\lim$

$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)} = \frac{-m f_1(\alpha)}{-m g_1(\alpha)} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z)}{g(z)}$

$z = e^{\frac{1}{z}} - 1$

to have the limit

1)

$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-0}{e^z-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 1, a_1 = 1$

2) $\text{Res}(\sin \frac{1}{z}, 0) = ?$

$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} \Rightarrow \text{Res}(\sin \frac{1}{z}, 0) = 1$

3) $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)}$

$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} [(z-\alpha)^m f(z)]^{(m-1)}$

1) $m=1$

2) $m=2$

3) $m=3$

$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-\alpha)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \dots$

$\Rightarrow (z-\alpha)^3 f(z) = a_{-3} + a_{-2}(z-\alpha) + a_{-1}(z-\alpha)^2 + a_0(z-\alpha)^3 + a_1(z-\alpha)^4 + \dots$

1) $\text{Res}(\sin \frac{1}{z}, 0) = ?$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots = z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right)$

$\sin^2 z = z^2 \cdot g_1(z)^2$

৩০০

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \frac{1 - \cos 2z}{2} - (\sin 2z) \cdot z^2}{\sin^4 z}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z^4}{\sin^4 z} \cdot \left[\frac{0 \cdot z^3 + (-\frac{2}{3})z^4 + 0z^5 \dots}{z^4} \right] = -\frac{2}{3} = a_1$$

מגוון של ציוד חשמלי, כולל: $\frac{1}{5.2}$ ש, 10 קבוצות

විද්‍යාගාරයේ සිටින විදුහත්පාලියා

⊕ שלש הקווים באינן שייכות למישור המישורי, נחמיה ל נק:

$$\int \frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) \quad \text{אם } \text{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) \neq 0$$

תחום שלם קטן

התחום D נקרא תחום שלם קטן (א.ס.ק) אם:

(1) הנקודה z_0 נמצאת במרכז D , נמצא ϵ כך ש-

(2) D היא קבוצה פתוחה, כל נקודה $z \in D$ היא חלק ממשפחה

(3) D היא קבוצה פתוחה, כל נקודה $z \in D$ היא חלק ממשפחה

(4) D היא קבוצה פתוחה, כל נקודה $z \in D$ היא חלק ממשפחה

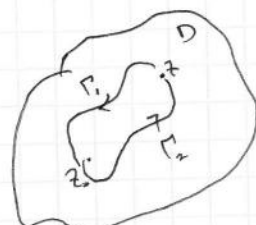
(5) D היא קבוצה פתוחה, כל נקודה $z \in D$ היא חלק ממשפחה

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:



בנקודה z_0 של התחום D איננו מתקבלים שלוש
אנחנו יחידים של D איננו חסום של D
(קנה) השפה של D אינה קטנה (השפה של
של התחום D היא פתוחה) וכל נקודה $z \in D$ היא חלק ממשפחה
כי כמעט כל הנקודה z_0 היא חלק ממשפחה
התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:



התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

$$f(z) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

$$f'(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

התחום D נקרא תחום שלם קטן אם:

$$(e^{-f} \cdot f)' = -e^{-f} \cdot f' \cdot f + e^{-f} \cdot f' = e^{-f} (f' - f \cdot f') = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^z}{(z-a)^2} dz$$

a=b

: a 2nd order pole

$$e^z = e^a + e^a(z-a) + e^a \frac{(z-a)^2}{2!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{e^z}{(z-a)^2} = \frac{e^a}{(z-a)^2} + \frac{e^a}{z-a} + \frac{e^a}{2!} + \dots$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^z}{(z-a)^2}, a\right) = e^a$$

(p)

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{e^b - e^a}{b-a} = (e^z)' = e^a$$

: (p)

השדה המרוכב של המישור המרוכב

המרחב המרוכב של המישור המרוכב

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

המרחב המרוכב של המישור המרוכב

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$z = e^{ix}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$dz = i e^{ix} dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz}$$

: (p)

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

המרחב המרוכב של המישור המרוכב

המרחב המרוכב של המישור המרוכב

$$a) \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \int_{|z|=1} \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^n \frac{dz}{iz} = \frac{i}{2^n} \int_{|z|=1} (z + \frac{1}{z})^n \frac{1}{z} dz = \frac{i}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{n-k} \frac{1}{z} dz =$$

$$= \frac{i}{2^n} \sum_{k=0}^n \sum_{|z|=1} \binom{n}{k} z^{2k-2n-1} dz$$

המרחב המרוכב של המישור המרוכב

$$\int_{|z|=1} z^{2k-2n-1} dz = 0$$

המרחב המרוכב של המישור המרוכב

$$= \frac{i}{2^n} \cdot 2\pi i \binom{2n}{n} = \frac{2\pi}{2^n} \cdot \binom{2n}{n}$$

אינטגרל של פונקציה

$\mathcal{H}_+ = \{f(z) \mid \text{Im } z > 0\}$: פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$ ופונקציה f ב- $\mathcal{H}_+$ נקראת פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$.

$$\mathcal{H}_+ : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$$

הפונקציה f היא פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$.

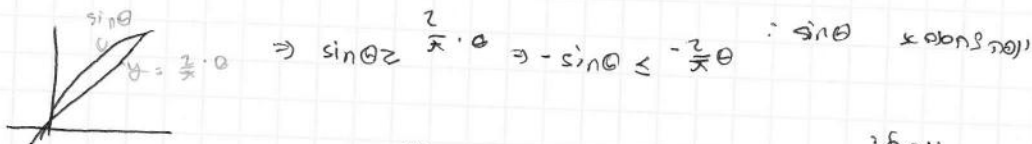
$$\left| \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz \right| \leq \max_{|z|=R} |f| \cdot \frac{\pi}{R}$$

הוכחה

$$\left| \int_0^\pi f(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} iRe^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \max_{|z|=R} |f| \cdot \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta$$

הפונקציה f היא פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$ ופונקציה f ב- $\mathcal{H}_+$ נקראת פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$.



$$= \max_{|z|=R} |f| \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq 2 \max_{|z|=R} |f| \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}R\theta} d\theta =$$

$$= 2 \max_{|z|=R} |f| \cdot R \cdot \frac{\pi}{-2R} \cdot e^{-\frac{2}{\pi}R\theta} \Big|_0^{\pi/2} = 2 \max_{|z|=R} |f| \cdot R \left(\frac{\pi}{2R} - \frac{\pi}{2R} e^{-1} \right) \leq$$

$$\leq \frac{\max_{|z|=R} |f| \cdot \pi}{R}$$

הפונקציה f היא פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$ ופונקציה f ב- $\mathcal{H}_+$ נקראת פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$.

הפונקציה f היא פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$ ופונקציה f ב- $\mathcal{H}_+$ נקראת פונקציה אנליטית ב- $\mathcal{H}_+$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i)$$

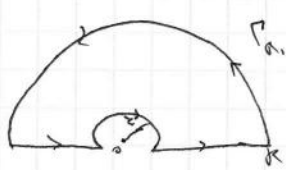
1) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 'פון

1.03

אין P פון e^{ix} און $i \sin x$: $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

און $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ און $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$ און $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$



$\oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz$

$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$ און $\int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow -\pi i$

$\Rightarrow \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\epsilon}^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin x}{x} dx$

$= i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \pi i$

און

$\int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow -\pi i$

$\Rightarrow \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\epsilon}^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin x}{x} dx$

$= i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx$

און $(R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0)$ און

$\Rightarrow -\pi i + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ און $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

המשפט של קושי : $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ אם f אנליטית בפרט γ .

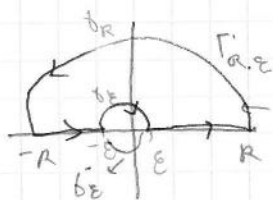
$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\beta z} dz \right| \leq \max_{\gamma_R} |f| \cdot \frac{\pi}{\beta}$$

אם $\beta > 0$, γ_R היא קשת חצי עיגול ברמת העליונה.

$$\left| \int_{\gamma_R} e(z) e^{i\beta z} dz \right| \leq \max_{\gamma_R} |f| \cdot \frac{\pi}{\beta}$$

המשפט של קושי : $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ אם f אנליטית בפרט γ .

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$



$$\oint_{\gamma_R \cup \gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\frac{e^{ix}}{x} = \frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x}$$

המשפט של קושי : $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ אם f אנליטית בפרט γ .

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\pi i$$

המשפט של קושי : $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ אם f אנליטית בפרט γ .

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma_R \cup \gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

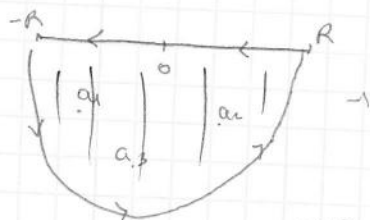
המשפט של קושי : $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ אם f אנליטית בפרט γ .

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \pi i = 2\pi i$$

המשפט של קושי : $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ אם f אנליטית בפרט γ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\beta x} dx = 2\pi i \sum_{a_i \in \mathbb{C}^+} \text{Res}(f(z) e^{i\beta z}, a_i)$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^n \text{Res}(f(z) e^{i\beta z}, a_i)$$



נקודת המפגש
בין שני

בנקודה הנמוכה פשוטה

$$I_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx$$

השאלה:

התשובה:

• $\lambda = 0$:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

• $\lambda > 0$:

הפונקציה היא פונקציה של ז'אנור

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \sum \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}, ai \right)$$

הנקודה ai היא הנקודה היחידה
הנמצאת בתוך

העליון, ולכן נבחרת

$$f = \frac{e^{i\lambda z}}{z^2+1} = \frac{e^{i\lambda z}}{(z+i)(z-i)}$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \frac{e^{i\lambda i}}{2i} = \frac{e^{-\lambda}}{2i}$$

וכך נקבל את התוצאה:

$$\frac{2\pi i e^{-\lambda}}{2i} = \pi e^{-\lambda}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx$$

התשובה:

• $\lambda < 0$:

הנקודה -i היא הנקודה היחידה
הנמצאת בתוך

$$\text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}, -i \right) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{i\lambda z}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-\lambda}}{-2i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = -2\pi i \cdot \frac{e^{-\lambda}}{-2i} = \pi e^{-\lambda}$$

וכך נקבל את התוצאה:

התשובה:

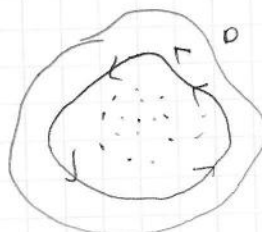
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\lambda|}$$

(צ"ל לא סוגרתי) (מקרה)

Γ $\vdash$ $\exists x (x \in \omega \wedge x \neq \emptyset)$

$P = \text{מחיר של } 1 \text{ ק"ג פירורי בייקונ}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$


$$\frac{d}{dt} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{d}{dt} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{2^3} \quad (A) : \underline{00}$$

על כן נקבל $n-p = 0-3 = -3$: הפה 3 נקודות ופיה 3 נקודות.

$$\left. \frac{1}{2\pi i} \right) \frac{3}{z} dz = 3, \quad p=3, \quad p=0 \quad \frac{f}{f'} = \frac{3}{2} \quad f = z^2, \quad f = z^3 \quad (2)$$

פירוש: הפירוש

$\frac{P}{P_0} \uparrow$ (יחס) (נאדרת) (אחידות) $P = A \cdot B \cdot C$: 5%

$$\frac{P'}{P} = \frac{A'B'C + AB'C + ABC'}{ABC} = \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{C'}{C}$$

$$f' = \frac{A'B - B'A}{B^2} \quad ; \text{ also } f = \frac{A}{B} \quad ; \text{ (quotient)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A'B - B'A}{B} \cdot \frac{B}{A} = \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}$$

$$f(z) = (z - z_0)^m h(z), \quad h(z_0) \neq 0, \quad m \text{ is an order of zero}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{m(z-z_0)^{m-1}}{(z-z_0)^m} + \frac{h}{h(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{h}{h} \Rightarrow \text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = m$$

! mibp mudi pidi $f(z) = (z - z_0)^{10}$: 1st z_0 pidi mudi pidi

$$\frac{f}{f} = \frac{P}{(T - T_0)} + \frac{h'}{n}$$

$$f(z) = (z - z_0)^{-p} \cdot h(z)$$

$$\Rightarrow \text{Res}\left(\frac{1}{z}, z_0\right) = -p$$

10

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz = \sum \operatorname{Res} \left(\frac{f}{z}, a_i \right), \quad \text{D.D. f so proper in each } a_i$$

ג. אלס גור כחיסוקו ול קרא גור (חיסוקו)

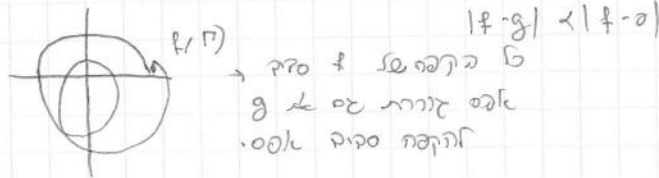
כמה אלמנטים - $g(z) = 1 + 11z + 6z^4 + z^6$ ρ $|z| < 1$

$f(z) = 11z$ - פונקציה אנליטית בתחום $|z| < 1$

$$|f(z) - g(z)| = |11z - (1 + 11z + 6z^4 + z^6)| = |1 + 6z^4 + z^6| \leq 1 + 6|z|^4 + |z|^6 = 1 + 6 + 1 = 8 < 11 = |f(z)|$$

מסקנה: f היא פונקציה אנליטית ב- $|z| < 1$ ולכן $f(z)$ מתאפס רק ב- $z=0$ (חוקי אפס)

הפונקציה $f(z)$ איננה מתאפסת



התחלה מקומית של הפונקציה

נניח $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)h(z)$ $h(z)$ היא פונקציה אנליטית, $h(z_0) \neq 0$.
אם $0 < \epsilon < |f(z_0) - f(z)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

$|f(z) - f(z_0)| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \delta$

הוכחה:

יש לי $f(z)$ סתם z שבו z הוא הנקודה הנקודה $f(z) = w$ w הוא נקודה

אז $f(z_0) \neq f(z)$ ϵ הוא המרחק של $f(z)$ מ- $f(z_0)$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אז w $|w - f(z_0)| < \delta$ אז $|w - f(z_0)| < \delta$

$|f(z) - f(z_0)| < \delta < |f(z) - w|$ אז $|f(z) - w| < |f(z) - f(z_0)|$ אז $|f(z) - w| < |f(z) - f(z_0)|$

$|f(z) - w| < |f(z) - f(z_0)|$ אז $|f(z) - w| < |f(z) - f(z_0)|$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)h(z)$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

אם $0 < \epsilon < |f(z) - f(z_0)|$ אז קיים δ כך ש- $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)h(z)$ $h(z)$

$$f'(z) = h(z-z_0)^{n-1} h'(z) + (z-z_0)^n h''(z)$$

$$f'(z_0) = 0$$

המשפט הנ"ל

מקבל $\Delta(z_0, \epsilon)$ כך שכל z המקיים $|z-z_0| < \delta$ ו w המקיים $|w-f(z_0)| < \delta$; $0 < \epsilon < 1$

$(\Delta(z_0, \epsilon) \cap \{z : |f(z)-w| < \delta\}) \neq \emptyset$ כלומר יש z המקיים $|z-z_0| < \delta$ ו $|f(z)-w| < \delta$

כלומר $f(\Delta(z_0, r)) \subset \Delta(f(z_0), \delta)$; כלומר f מקיים את התנאי

למשפט הפוך (המשפט הנ"ל) כלומר f מקיים את התנאי

למשפט הפוך (המשפט הנ"ל) כלומר f מקיים את התנאי

$$f'(f(z_0)) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{f'(f(z_0) + \Delta w) - f'(f(z_0))}{\Delta w}$$

$$f'(f(z_0) + \Delta w) = z_0 + \Delta z, \quad z \rightarrow 0$$

כלומר $f'(f(z_0)) = 1/f'(z_0)$

$$= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

כלומר, $f(z) = az + b$; כלומר f מקיים את התנאי

המשפט

(כלומר $f(z) = az + b$; כלומר f מקיים את התנאי

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$$

כלומר f מקיים את התנאי

$$f(z) = a_0 + a_1 z$$

כלומר f מקיים את התנאי

$$1 \leq n, \quad f(z_1) = 0, \quad f(z) = a(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n)$$

$$f(z) = a(z-z_0)^n$$

כלומר f מקיים את התנאי

$$a(z-z_0)^n = w_0$$

$$(z-z_0)^n = \frac{w_0}{a} = r_0 e^{i\theta}$$

$$z-z_0 = r_0^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n})} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

כלומר f מקיים את התנאי

פרקים 5 ו-6

מבני R על $(S, \cdot)$ R היא חבורה M נחשב R חבורה

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(a, m) \mapsto a \cdot m$$

$$(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$$

$$a(m+n) = a \cdot m + a \cdot n$$

$$1 \cdot m = m$$

$$a(b \cdot m) = (ab) \cdot m$$

$$(ma)b = m(ab)$$

הקשר בין R ו- M

1. R

F היא R חבורה F היא R חבורה F היא R חבורה

$$M = R^n = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_n$$

$$r \cdot (r_1, \dots, r_n) = (rr_1, \dots, rr_n)$$

הקשר בין R ו- M R היא R חבורה R היא R חבורה R היא R חבורה

R היא R חבורה R היא R חבורה R היא R חבורה

$$r \cdot x = rx$$

M היא R חבורה M היא R חבורה M היא R חבורה

$$r \cdot m = \underbrace{rm_1 + \dots + rm_n}_n$$

הקשר

R היא R חבורה R היא R חבורה R היא R חבורה

$$r(x+I) = rx + I$$

$$\left\{ x_i \in F \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} = M = F^n$$

$$(A, \vec{x}) \rightarrow A \cdot \vec{x} : M_n(F) \rightarrow M_n(F)$$

$$M = (R^n)^n, R = M_n(R), R$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mid r_i \in R \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \mid r_{ij} \in R \right\} = I_n R = M_n(R)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mid r_i \in R \right\} \cong \frac{M_n(R)}{I}$$

$$R \times M \rightarrow M$$

דפוס

יש אפליקציות מ R אל M שנקראות דפוס.

דוגמאות:

$$r \in R, a, b \in M, r(a+b) = ra + rb$$

1.

$$r, s \in R, a \in M, (r+s)a = ra + sa$$

2.

$$r, s \in R, a \in M, r(sa) = (rs)a$$

3.

$$a \in M \text{ לר } 1_R \cdot a = a$$

4.

$$0_R \cdot a = 0_M \quad a \in M \text{ לר } 0_M$$

$$r \in R \text{ לר } r \cdot 0_M = 0_M$$

דוגמאות:

המבנה M הוא מודול על R .

יש R מודול M שנקרא מודול.

$a \in A$ אפליקציה מ A

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ פעמים}}$$

יש $b \in B, a \in A, A$ מודול B ויש $\varphi: A \rightarrow B$ אפליקציה מ A אל B .
 $a \cdot b = \varphi(a) \cdot b$

יש $n \in \mathbb{N}, r \in R$ לר $r^n \in R$ ויש $M \subset M, R$ מודול M ויש $n \in \mathbb{N}$.

דוגמאות:

$$ra = ar$$

R מודול M על A

Q מודול M ויש $z \in Q, a \in M$ לר Q

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$$

$F[x]$ מודול V ויש $T: V \rightarrow V$ אפליקציה מ V אל V .

$f(x) \in F[x]$ ויש

$$f(x) \cdot v = f(T)v$$

הצגה:

V ו- W הם מרחבי וקטורים מעל F , $T: V \rightarrow W$ היא תמונה ליניארית. $F[X]$ הוא המרחב הפולינומיים. T נקראת המרחב T של T על W .

משפט:

אם T היא תמונה ליניארית, אז T היא תמונה ליניארית.

$T \in F[X]$ ו- $w \in W$:

$$T.w = f(T)w = a_n T^n + \dots + a_0 I w$$

הצגה: M הוא מרחב וקטורי מעל R , $N \subset M$ הוא תת-מרחב וקטורי. M/N הוא המרחב הפונקטור.

$$T(a+N) = Ta + N$$

הצגה: M_1, M_2 הם מרחבי וקטורים מעל R , $f: M_1 \rightarrow M_2$ היא תמונה ליניארית.

$$f(m) = f(m)$$

הצגה:

R הוא מרחב וקטורי מעל R , E היא תמונה ליניארית. $R \rightarrow R$ היא תמונה ליניארית.

$R \cong E$ ו- $R \cong E$ הם מרחבי וקטורים מעל R .

משפט:

$$(f \circ g)(i) = f(g(i))$$

R הוא מרחב וקטורי מעל R .

$$f(i) = (f(i), \dots, f(i))$$

$$f: E \rightarrow R^n$$

f היא תמונה ליניארית.

$$f(i) = (f(i), \dots, f(i))$$

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i)$$

$$f(i) = (f(i), \dots, f(i))$$

f היא תמונה ליניארית.

הצגה: M הוא מרחב וקטורי מעל R , $N \subset M$ הוא תת-מרחב וקטורי.

משפט:

M/N הוא מרחב וקטורי מעל R .

$$(rM \subset M, r \in R, M \leq R)$$

M is a R -module, $\langle a \rangle$ is a submodule of M , $0 \neq r \in R$, $0 \neq \sum_{i=1}^n r_i a_i$ is

non-zero

$r \neq 0 \Leftrightarrow r \cdot 1 \neq 0$: R is a domain, R is a PID, R is a UFD

(2) R is a PID, R is a UFD, R is a domain

(3) R is a PID, R is a UFD, R is a domain, R is a PID

R is a PID, R is a UFD, R is a domain, R is a PID

! R is a PID

(4) R is a PID, R is a UFD, R is a domain, R is a PID

! R is a PID

(5) R is a PID, R is a UFD, R is a domain, R is a PID

! R is a PID, R is a UFD, R is a domain, R is a PID

$Ann(x) \subseteq R$: $Ann(x) = \{r \in R : rx = 0\}$

$Ann(x) \subseteq R$, $r \in R \rightarrow M : r \mapsto rx$

! R is a PID, R is a UFD, R is a domain, R is a PID

$Tor(M) = \{m \in M : \exists r \neq 0 \in R : rm = 0\}$

$= \{m \in M : Ann(m) \neq 0\}$

$Tor(M) = \{m \in M : Ann(m) \neq 0\}$ is a submodule of M

! R is a PID

$Tor(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$, $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_6$

$Tor(\mathbb{Z}) = 0$, $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$

$Tor(\mathbb{Z}_6) = \{0, 2, 4\}$, $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_6$

$Ann(3) = \{0, 2, 4\}$

R is a PID, R is a UFD, R is a domain, R is a PID

$r + \langle a \rangle \in R/\langle a \rangle$

$a(r + \langle a \rangle) = ar + \langle a \rangle = \langle a \rangle$

$r + \langle a \rangle \in Tor(R/\langle a \rangle)$

1.2.1

אם $\text{Tor}(Z_6) = \{0, 2, 3, 4\}$ אז Z_6 איז Z_6 : פרייט, פארוואס מ'קען זען $\text{Tor}(M)$ (1)

אפ'פאן

פארוואס

פארוואס $\text{Tor}(M)$ איז אונטער R און M (1)

און

$$r_1 m_1 = 0, \text{ און } r_1 r_2 \in R \text{ פרייט, } m_1, m_2 \in \text{Tor}(M) \\ r_2 m_2 = 0$$

און אזוי $r_1 \cdot r_2 \neq 0$

$$r_1 r_2 (m_1 + m_2) = r_2 r_1 m_1 + r_1 r_2 m_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 \in \text{Tor}(M)$$

$$\forall r \in R: r m_1 \in \text{Tor}(M) \text{ און } r m_2 \in \text{Tor}(M)$$

$$r m_1 = 0 \text{ און } r m_2 = 0$$

$$r(r m_1) = r(0) = 0$$

$$\Rightarrow r m_1 \in \text{Tor}(M)$$

$$\text{Tor}(N) = 0 \text{ און אונטער } R, \text{ אזוי אז } N = M(\text{Tor}(M)) \text{ (2)}$$

$$\text{און אזוי אז } M + \text{Tor}(M) \text{ איז פרייט און } R$$

$$r(M + \text{Tor}(M)) = 0$$

$$M + \text{Tor}(M)$$

$$s(r m) = 0 \text{ און אזוי אז } s r \in R \text{ פרייט און } r m \in \text{Tor}(M) \text{ (3)}$$

$$\text{און } (s r) m = 0$$

$$\Rightarrow m \in \text{Tor}(M) \Rightarrow M + \text{Tor}(M) = \text{Tor}(M)$$

⊕ משפט:

$$\alpha \neq 0, f(z) = az + b \iff \text{יש נקודה } f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

משפט:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \iff$$

יש נקודה f של $n \geq 2$ פולינום (פולינום f) $a_k = 0$ ו $a_n \neq 0$ $a_k \in \mathbb{C}$ $k=0, \dots, n$

$$f(z) = p(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$$

יש נקודה f של $n \geq 1$ $f(z) = a_n(z-z_1)^n$ $z_1 = z_2 = \dots = z_n$

יש נקודה f של $n \geq 1$ $f(z) = a_n(z-z_1)^n$ $z_1 = z_2 = \dots = z_n$

$$h(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \dots$$

$f(\Delta(0, R))$ $R > 0$ f של $\Delta(0, R)$ $h(\Delta(0, r))$ $r > 0$ f של $\Delta(0, r)$

$f(\Delta(z_0, \epsilon))$ $\epsilon > 0$ f של $\Delta(z_0, \epsilon)$ $z_0 \in \mathbb{C}$ f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

$f(\Delta(z_0, \epsilon))$ $\epsilon > 0$ f של $\Delta(z_0, \epsilon)$ $z_0 \in \mathbb{C}$ f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

$f(z) \in f(\Delta(z_0, \epsilon))$ $z \in \Delta(z_0, \epsilon)$ f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

$$f(z) = f(z_0) + \underbrace{(z-z_0)g(z)}_{r(z)}$$

$$r(z) = 0$$

$$r'(z_0) = g(z_0) \neq 0$$

$$r'(z) = g(z) + (z-z_0)g'(z)$$

יש נקודה f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

$[z_0, \dots, z_n]$ f של $\Delta(z_0, \epsilon)$

פרט של $n \geq 2$ של $f(z)$ הוא $f(z) = z^n$ ונראה כי $f(z)$ היא פונקציה אנליטית.

הוכחה: נראה כי $f(z)$ היא פונקציה אנליטית.

נראה כי $f(z)$ היא פונקציה אנליטית.

נראה כי $f(z) = e^z$ היא פונקציה אנליטית.

נראה כי $f(z) = e^z$ היא פונקציה אנליטית.

$$0 < p < 1 \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

$$1 \leftarrow \infty \leftarrow x \quad \frac{1}{(1+x)^{p-1}} = \frac{x^{p-1}}{1+x} \quad \frac{1}{x^{2-p}}$$

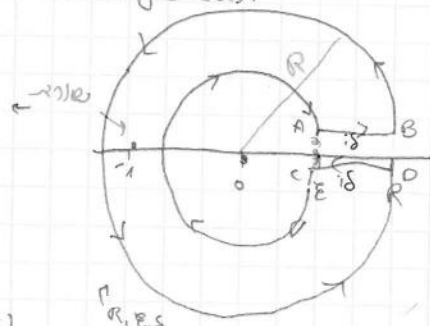
$$(z^a = e^{a \log z}) \quad f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$$

נראה כי $f(z)$ היא פונקציה אנליטית.

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_{R,\epsilon,\delta}} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(1+z)^{p-1}}{1+z} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1} z^{p-1} =$$

$$= 2\pi i e^{(p-1)\log z} = (z=-1) = 2\pi i e^{(p-1)(0+\pi i)} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$



נראה כי $f(z)$ היא פונקציה אנליטית.

$$\Rightarrow |z^{p-1}| = |e^{(p-1)\log z}| = |e^{(p-1)(\ln|z| + i\arg z)}| = e^{(p-1)\ln|z|} e^{i(p-1)\arg z} = |z|^{p-1}$$

$$\text{I: } \left| \int \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \right| \leq \frac{2\pi R \cdot R^{p-1}}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{II: } \left| \int \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \right| \leq \frac{2\pi \epsilon \cdot \epsilon^{p-1}}{1-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{III: } \int_{\Gamma} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = \int_{\sqrt{\epsilon^2-\delta^2}}^{\sqrt{R^2-\delta^2}} \frac{(x+i\delta)^{p-1}}{1+x+i\delta} dx = \int \frac{e^{(p-1)\log(x+i\delta)}}{\sqrt{1+x+i\delta}} dx =$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{(p-1)\log(x+i\delta)}}{1+x+i\delta} dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(p-1)\ln x}}{1+x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

$$\text{III: } \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = - \int_{\sqrt{\epsilon-\delta^2}}^{\sqrt{R-\delta^2}} \frac{(x-i\delta)^{p-1}}{1+x-i\delta} dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(p-1)\log(x-i\delta)}}{1+x-i\delta} dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(p-1)(\ln|x|+2\pi i)}}{1+x} dx$$

סימן: $R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ אז

$$2\pi i e^{(p-1)\pi i} = 0 + 0 + \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(p-1)(\ln|x|+2\pi i)}}{1+x} dx =$$

$$\Rightarrow 2\pi i e^{(p-1)\pi i} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(p-1)\ln x} \cdot e^{(p-1)2\pi i}}{1+x} dx =$$

$$\Rightarrow 2\pi i e^{(p-1)\pi i} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \cdot [1 - e^{(p-1)2\pi i}]$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{(p-1)2\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{-i(p-1)\pi} - e^{i(p-1)\pi}} = -\pi \cdot \frac{1}{2i} \frac{1}{\sin \pi(p-1)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

הערות: $\frac{1}{e^{-i(p-1)\pi} - e^{i(p-1)\pi}} = \frac{1}{-2i \sin \pi(p-1)}$

$$\sin(a) = \sin(\pi - a) \Rightarrow \frac{\pi}{\sin(\pi - \pi p)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

הוכחה של תכונה חשובה של פונקציית גאמא

נניח $\alpha \in \mathbb{C}$ ונניח $\Gamma(\alpha)$ מתכנס. נרצה להוכיח את התכונה:

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

הוכחה: נשתמש בפרמטריזציה של המישור המרוכב.

הוכחה

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

הפונקציה f היא מופלוקציה של המישור המרוכב.

$\delta \rightarrow \delta_+$ ונניח

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\text{נניח } |f(z)| = \left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$wz + 1 = z - 1 \Rightarrow z(1-w) = 1 - w \Rightarrow z = \frac{1-w}{1+w}$$

$$(f, g) \text{ on } \mathbb{D} \text{ is } \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} dA(z)$$

התכונה של הפונקציה f היא:

שאלה 5: נתון הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z}$ (הפונקציה "הפשוטה")

א) $f(z) = \frac{1}{z}$ (הפונקציה "הפשוטה")

$0 \rightarrow \infty$

$1 \rightarrow 1$

$\infty \rightarrow 0$

הפונקציה $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב- z .

אם $x = x_0$ אז $y = y_0$ ו- $f(z) = \frac{1}{z}$ היא פונקציה אנליטית ב- z .

אם $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב- z אז $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב- z .

הפונקציה $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב- z .

אם $f(z) = \frac{1}{z}$ אז $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב- z .

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$\frac{u-iv}{u^2+v^2} = x-iy$

$\frac{u-iv}{u^2+v^2} = x-iy$, $\frac{u}{u^2+v^2} = x$, $\frac{v}{u^2+v^2} = y$

$u^2 - 4 + v^2 = 0$

$(u - \frac{1}{2})^2 + (v - 0)^2 = (\frac{1}{2})^2$

