

מרצה פרופסור נתן נתניהו

טלפון 03-531-7721

דוא"ל nathan@cs.biu.ac.il

שעות קבלה: יום ד',  $17^{00} - 16^{00}$

- ספרים**
- An Introduction to Numerical Analysis, K.E. Atienson, Wiley, 1978
  - Introduction to Matrix Computations, G.W., Stenrant, Academic Press, 1973
  - Numerical Analysis, T. Sahen, Addison Werley, 2006
  - A Friendly Introduction to Numerical Analysis, B. Bandie, Practice Hall, 2006
  - Applied Numerical Analysis, C.F. Gerald, P.O. Wheatley, 7th edition, Addison Wesley 2004
  - Numerical Analysis and Scientific Computation, J.L. Leaden, Addison Westley, 2004

יש רשימות ידניות בספרייה למתמטיקה

## היסטוריה+מוטיבציה

- מקור מדעי המחשב מהמתמטיקה. אבי מדעי המחשב היה המתמטיקאי הבריטי אלן טיורינג. התחום התחיל באלגוריתמים וחישובים נומריים ידניים.
- נושא החישובים הנומריים הוא לא רק חלק מההיסטוריה של מדעי המחשב, אלא בעיה שמדעני מחשב נתקלים בה הרבה במהלך הקריירה.
- הרבה פעמים רוצים לחשב באופן מדויק בעיות מתמטיות שונות, ובשביל זה צריך אלגוריתמים נומריים.
- צריך ללמוד על עקרונות של חישובים נומריים שמשפיעים על אלגוריתמים:
  - התכנסות - כמה מהר ביטוי מסויים מתכנס? האם הביטוי בכלל אמור להתכנס?
  - סיבוכיות
  - יציבות - עד כמה פתרון נומרי יציב. עד כמה שינויים קלים בקלט משפיעים על הפלט? אם שינוי קטן בקלט גורם לשינוי גדול בפלט, אז כנראה שהפתרון לא יציב - או שהבעיה עצמה לא יציבה.
  - דחיסה(נפח)
  - אופטימיזציה - איך לפתור בעיות בצורה יותר יעילה.

## ייצוג מספרים ושגיאות

מכונה היא משאב סופי, ולכן היא לא יכולה לייצג מספרים (שהם חלק מקבוצה אינסופית) באופן אבסולוטי. לא כל מספר ניתן לייצג בצורה אבסולוטית במחשב. כלומר בכל מספר שמיוצג במחשב יש שגיאה מסויימת. לכן, כאשר מבצעים פעולות על המספרים, השגיאה מתפשטת.

## פתרון משוואות לא לינאריות

הבעיה הבסיסית במתמטיקה ניתנת לכתיבה בצורה

$$f(x) = 0$$

כאשר  $f(x)$  היא פונקציה של  $x$ . הפתרונות נקראים שורשי המשוואה. ניתן גם לכתוב מערכת של משוואות:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ישנן מספר שיטות לפתור בעיה כללית כזו:

- שיטת החציה
- איטרפולציה לינארית - מבצעים קירוב לינארי של הפונקציה בסביבת השורש, מה שמאפשר להשתמש בשיטות איתרטיביות
- שיטת ניוטון-רפסון
- שיטת Mullen - הרחבה לקירוב הלינארי, רק שפה הקירוב הוא ריבועי
- איטרציות "נקודות שבת" (fixed point) - הופכים את  $f(x) = 0$  למשוואה  $g(x) = x$  שהיא שקולה במובן שכל פתרון של  $f(x) = 0$  מקיים את המשוואה  $g(x) = x$
- שונות - למשל מציאת פולינומים

### שיטת החציה

כדי למצוא אריה במדבר, חוצאים את המדבר ל2, ובודקים באיזה חצי הוא נמצא. את החצי הזה מחלקים שוב ל2, וממשיכים באותה שיטה עד שמגיעים לשטח מספיק קטן. בעזרת השיטה הזו ניתן למצוא את שורשי  $f(x) = 0$ , כאשר מתקיימים שני תנאים:

- נתונים  $x_1, x_2$  כך ש  $f(x_1) f(x_2) < 0$  - כלומר צד אחד נמצא מעל לציר ה  $x$  וצד שני מתחת לציר ה  $x$ .
- הפונקציה רציפה.

בהינתן התנאים האלה, לפי משפט הערך הממוצע, יש שורש בין  $x_1$  ל  $x_2$ , וניתן למצוא אותו באמצעות האלגוריתם:

```

repeat
     $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;
    if  $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$  then
         $x_2 = x_3$ ;
    else
         $x_1 = x_3$ ;
until  $|x_1 - x_2| < 2 \cdot \text{TOL}$ 

```

הרעיון הוא שבכל איטרציה, בודקים אם  $f(x_3)$  אותו סימן כמו  $f(x_1)$  או כמו  $f(x_2)$ , ולפי זה בוחרים אם להזיז את  $x_1$  או את  $x_2$ . ממשיכים עד ש  $|x_1 - x_2|$  - כלומר מרחב הפתרונות האפשריים - קטן יותר מ  $2 \cdot \text{TOL}$ , כאשר  $\text{TOL}$  הוא קבוע שרירותי שמגביל את השגיאה האפשרית. בסוף התהליך מחזירים את  $x_3$ ,  $\text{TOL}$  הוא השגיאה האפשרית המקסימלית מהפתרון המדויק.

## דוגמה

$$f(x) = 3x + \sin x - e^x$$

השורשים הם בערך  $x_1 = 1.9, x_2 = 0.35$ . כאשר מחשבים עם שיטת החציה, עם אינטרבל התחלתי  $x_1 = 0, x_2 = 1$  ו  $\text{TOL} = 1E - 4 = 10^{-4}$ , מקבלים 0.36.

## יעילות

השיטה לא נחשבת יעילה מבחינת שיעור ההתכנסות שלה.

## מתי השיטה לא תעבוד?

- לדוגמה בפונקציה  $y = x^2$ . במקרה הזה הפונקציה תמיד חיובית, ולכן לא ניתן לדעת עם  $x_3$  נמצא מימין או משמאל לפתרון.

## מדד אלטרנטיבי

אפשר להסתכל על מדד אחר - במקום לבדוק ש  $|x_1 - x_2|$  מספיק קטן, בודקים ש  $|f(x_3)|$  מספיק קטן. אבל אז, אם הפונקציה "שטוחה" בסביבת השורש, מקבלים אזור מאוד רחב.

**תזכורת:** ראינו את שיטת החציה, שמבוססת על "אריה במדבר" - חיפוש בינארי.

ראינו קריטריונים לעצירה:

- גודל האינטרוול - עוצרים כאשר שטח החיפוש קטן מגודל מסויים קבוע מראש.
- הערך המוחלט של הפונקציה - עוצרים כאשר הערך המוחלט של ערך הפונקציה מספיק קטן.
- זה קריטריון מסוכן, כי לא בטוח שזה יתן לנו קירוב מספיק טוב.
- הקריטריון האדמיניסטרטיבי - עוצרים לאחר מספר מסויים של איטרציות.

## קירוב לינארי - שיטת Secant

פירוש המילה Secant - חותך.

- הנחות:**
- יש ערכים התחלתיים  $x_0, x_1$ , שצריכים להיות קרובים מספיק לשורש.
  - בשונה משיטת החציה, כאן לא מניחים מראש שהשורש נמצא ביניהם - זו לא דרישה.
  - בכל שלב יהיו  $x_0, x_1$  תורניים, ומניחים ש  $x_1$  קרוב יותר לשורש.

בכל שלב, מעביר בין  $x_0$  ל  $x_1$  קו ישר, ובודקים איפה הוא חותך את ציר ה  $x$  - מסמנים  $x_2$ .

את הנקודה הזו בוחרים בתור נקודה חדשה - כלומר מבצעים

$$\begin{aligned}x_0 &\leftarrow x_1 \\ x_1 &\leftarrow x_2\end{aligned}$$

מדמיון משולשים נקבל

$$\frac{x_1 - x_2}{f(x_1)} = \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$$

או

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$$

ובאופן כללי:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

הרעיון הוא שבקטע קטן בסביבת השורש, אפשר לעשות קירוב לינארי לפונקציה. השיטה דורשת ש  $|f(x_1)| < |f(x_0)|$ . ניתן לבדוק את זה בקלות ולהחליף במידת השורש

## מימוש

```
if  $|f(x_0)| < |f(x_1)|$  then  
    swap( $x_0, x_1$ );  
repeat  
     $x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$ ;  
     $x_0 = x_1$ ;  
     $x_1 = x_2$ ;  
until  $|f(x_2)| < \text{Tol}$ ;
```

כמו בשיטת החציה, גם כאן ניתן להשתמש בקריטריוני סיום חלופיים - למשל  $|x_1 - x_0| < \text{Tol}$  או מספר האיטרציות.

## יעילות

למשל, לאחר 5 איטרציות במקרה של הפונקציה  $f(x) = 3x + \sin x - e^x$  מגיעים לתוצאה יותר מדויקת מאשר עם 13 איטרציות עם שיטת החציה.

## נקודת תורפה

ייתכנו מקרים "פתולוגיים" שבהם ערכי  $x$  המתקבלים רחוקים יותר מהשורש בהשוואה לערכים הקודמים. למשל - כאשר הפונקציה רחוקה מלהיות לינארית סביב השורש, או כאשר היא לא מונוטונית.

## פתרון

נרצה לתחום את השורש מלכתחילה, כמו בשיטת החציה - כלומר לדרוש שהשורש יהיה בתוך האינטרוול ההתחלתי:  $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ . מכיוון ש  $x_2$  תמיד חיובי או שלילי (אם הוא אפס - אז סיימנו), ניתן לשמור על התנאי הזה לכל אורך החישוב:

```
repeat  
     $x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$ ;  
    if  $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$  then  
         $x_1 = x_2$ ;  
    else  $x_0 = x_2$ ;  
until  $|f(x_2)| < \text{Tol}$ 
```

- ייתכנו מקרים שבהם שיטת Secant פחות יעילה משיטת החציה.

## שיטת ניוטון-רפסון

שיטה קלאסית (בת 400 שנה)

- הנחות:**
- יש ערך התחלתי  $x_0$ .
  - בהנחה ש  $x_0$  מספיק קרוב לשורש, השיטת תתכנסת בצורה יותר יעילה מכל השיטות שהזכרנו.
  - סדר ההתכנסות הוא ריבועי, בניגוד לשיטות הקודמות שהן בסדר התכנסות לינארי. הכוונה היא שהאינטרוול קטן בקצב ריבועי.

הרעיון הוא להסתכל על  $f(x_0)$ , ולהעביר משיק דרך הנקודה הזו. נקודת המפגש של המשיק הזה עם ציר ה  $x$  תהיה  $x_0$  החדשה (כלומר  $x_1$ )

**חישוב המשיק:** נזכור ששיפוע המשיק הוא בעצם נגזרת:

$$\tan \theta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

כלומר

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ובאופן כללי

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

### מימוש

```

evaluate  $f(x_0), f'(x_0)$ ;
if ( $f(x_0) \neq 0 \wedge f'(x_0) \neq 0$ ) then
  repeat
     $x_1 = x_0$ ;
     $x_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ;
  until  $|x_1 - x_0| < \text{Tol}_1$  or  $|f(x_0)| < \text{Tol}_2$ 

```

## הערות

- צריך לחשב את הנגזרת! זה לא פעולה טריוויאלית
- אפשר גם למצוא שורשים מרוכבים
- אפשר למצוא באמצעות השיטה שורשי פולינומים
- יכול להיות מצב שהשיטה לא מתכנסת - למשל במקרה שנתקעים על נקודת קיצון

## הדמיון בין ניוטון-רפסון לשיטת Secant

ניתן לכתוב את הנוסחה של שיטת Secant בתור:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

כאשר  $|x_n - x_{n-1}| \rightarrow 0$ , הביטוי  $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$  הוא הנגזרת!

## יעילות

עבור הפונקציה  $f(x) = 3x + \sin x - e^x$ , תוך 3 איטרציות מקבלים דיוק עד 7 ספרות!

## שיטת Muller (אפרוקסימציה ריבועית)

במקום לבצע קירוב לינארי מבצעים קירוב ריבועי.  
במקום לבחור 2 נקודות  $x_0, x_1$  ולהעביר ביניהן ישר, בוחרים 3 נקודות  $x_0, x_1, x_2$  ומעבירים ביניהן פרבולה. ההנחה היא שהקירוב הריבועי יותר טוב מהקירוב הלינארי.  
ניתן למצוא פרבולה מ-3 נקודות באמצעות פתרון מערכת משוואות לינארית ב-3 משתנים, אבל כדי שזה יהיה קירוב מספיק טוב, בוחרים  $c = f(x_2)$ , ורושמים את הפרבולה בתור  $P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$ , ואז פותרים 2 משוואות:

$$\begin{cases} a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c = f(x_0) \\ a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c = f(x_1) \end{cases}$$

## איטרציות נקודות שבת (Fixed Point)

גם כאן רוצים למצוא שורש למשוואה  $f(x) = 0$ . יש עניין ואפילו תועלת לדבר דווקא על המשוואה  $x = g(x)$ , ששקולה למשוואה  $f(x) = 0$ .

בתנאים מסויימים, נקבל  $x_{n+1} = g(x_n)$ , ונרצה שזה יתכנס.

## דוגמה

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

השורשים הם  $-1, 3$

$$x = g(x) = \sqrt{2x+3} \text{ נניח}$$

**הערה:**  $g(3) = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$  וזה בסדר, אבל עבור השורש השני נקבל  $g(-1) = \sqrt{-2+3} = \sqrt{1} = 1$  - וזה לא טוב.

אם נתחיל מ  $x_0 = 4$ , אז נקבל:

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{8+3} = \sqrt{12}$$

$$x_2 = g(x_1) = \sqrt{2\sqrt{12}+3} = \dots$$

ונקבל שזה מתכנס.

פונקציה אחרות יתנו סדרות ערכים אחרות, שיכולות להתכנס או להתבדר בנפרד לכל אחד מהשורשים.

## המשמעות הגיאומטרית

מסתכלים על  $g(x)$  ביחס לקו ישר  $y = x$ . בכל איטרציה מוצאים את  $g(x)$ , לפי זה מוצאים את  $y$ , ולפי זה מוצאים את  $x$  החדש. זה אומר להתכנס לנקודת החיתוך של  $y = x$  ו  $y = g(x)$ , שהיא נקודת השבת - אבל רק בהנחה שבוחרים פונקציה  $g$  מתאימה. אם לא בוחרים פונקציה מתאימה - למשל  $\frac{x^2-3}{2}$  או  $\frac{3}{x-2}$  - זה מתבדר.

זה תלוי בקצב הגדילה של הפונקציה ביחס ל  $y = x$ . כשקצב הגדילה מאוד גבוה יחסית אז יש התבדרות, וכשקצב השינוי ב  $g$  (הנגזרת) קטן מקצב השינוי של  $y = x$  (תמיד 1) אז זה יכול להתכנס.



## שיעור (סדר) התכנסות

### הגדרה

תהא  $\{x_n | n \geq 0\}$  סדרת ערכים איטרטיביים. הסדרה מתכנסת (מסדר  $p \geq 1$ ) לנקודה  $r$  אם

$$|r - x_{n+1}| \leq c \cdot |r - x_n|^p$$

עבור  $c$  כלשהו חיובי. עבור  $p = 1$  הסדרה מתכנסת באופן ליאנרי (במקרה זה הכרחי  $c \leq 1$ ) (למעשה  $c < 1$ ). הקבוע  $c$  נקרא אז שיעור ההתכנסות הלינארית. התכנסות לינארית פירושה שהשגיאה בכל איטרציה שואפת לחלק יחסי קבוע של שגיאת האיטרציה הקודמת.

### הערה

אם יש התכנסות לינארית, אז  $c \rightarrow \frac{|r - x_{n+1}|}{|r - x_n|}$  בד"כ  $r$  לא ידוע מראש, אבל אפשר למצוא קירוב לשיעור ההתכנסות באמצעות

$$\frac{|r - x_{n+1}|}{|r - x_n|} \approx \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|}$$

## התכנסות עבור fixed point

### הערה חשובה!!!

לא להתבלבל בין  $f$  ל  $g$ !

עבור  $x_{n+1} = g(x_n)$  נכתוב  $r - x_n = r - g(x_n) = g(r) - g(x_n)$  כאשר  $r$  הוא השורש האמיתי, כלומר  $r = g(r)$ .

$$r - x_{n+1} = \frac{g(r) - g(x_n)}{(r - x_n)} \cdot (r - x_n)$$

ולפי משפט ערך הביניים

$$r - x_{n+1} = g'(\xi_n) \cdot (r - x_n)$$

עבור  $\xi_n \in [r, x_n]$  כלשהו. ז"א

$$|e_{n+1}| = g'(\xi_n) \cdot |e_n|$$

לכן אם  $|g'(\xi_n)| \leq k < 1$  עבור אינטרבל נתון בקרבת השומש, אזי עבור ערך התחלתי  $x_0$  באינטרבל שיטת נקודות השבת תתכנס בוודאות.

## משפט

תהא  $g(x)$  גזירה  $p$  פעמים לכל  $x$  בסביבה כלשהי של  $r$ , באשר  $r$  הוא שורש המשוואה  $(p \geq 2), x = g(x)$ .  
אם  $g'(r) = g''(r) = \dots = g^{(p-1)}(r) = 0$  אזי עבור  $x_0$  מספיק קרוב ל- $r$ , שיטת FPI תתכנס מסדר  $p$ .

## הערה

אם  $g'(r) = 0$  אז ההתכנסות לינארית.

## הוכחה

משתמשים בטור טיילור סביב השורש  $r$ :

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(r) + (x_n - r)g'(r) + \dots + \frac{(x_n - r)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(r) + \frac{(x_n - r)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n)$$

עבור  $\xi_n$  בין  $x_n$  ו- $r$ . אבל  $r = g(r)$  ו- $g^{(n)}(r) = 0$  עבור  $1 \leq n < p$ , לכן:

$$g(x_n) = g(r) + \cancel{(x_n - r)g'(r)} + \dots + \cancel{\frac{(x_n - r)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(r)} + \frac{(x_n - r)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n)$$

$$r - x_{n+1} = \frac{(x_n - r)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n)$$

אבל  $(x_n - r) \rightarrow 0$  ולכן ההתכנסות מסדר  $p$ .

## התכנסות עבור שיטת ניוטון

תזכורת -  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , ואז  $x_{n+1} = x_n \Leftrightarrow f(x_n) = 0$  ולכן זה שקול למקרה

פרטי של שיטת FPI עם  $g(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

מכיוון שזו שיטת FPI, נרצה להראות  $g'(r) = 0$ , ואז לפי המשפט סדר ההתכנסות לפחות 2.

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

אבל  $f(r) = 0$ , ולכן

$$g'(r) = \frac{f(r)f''(r)}{(f'(r))^2} = \frac{0 \cdot f''(r)}{(f'(r))^2} = 0$$

זה קורה רק כשהפונקציה אכן מתכנסת - כלומר כאשר

$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

## הוכחה אלטרנטיבית

אפשר גם לפתח ישירות טור טיילור של  $f(x)$  סביב  $x_n$ :

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} f''(\xi)$$

עבור  $\xi$  מסויים בין  $x$  ו  $x_n$ . עבור  $x = r$ :

$$f(r) = 0 = f(x_n) + (r - x_n) f'(x_n) + \frac{(r - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

עבור  $\xi$  בין  $r$  ו  $x_n$ , ולכן

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{(r - x_n)^2}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} = 0$$

$$r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(r - x_n)^2}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

כלומר

$$r - x_n = - \frac{(r - x_n)^2}{2} \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

וההתכנסות ריבועית!

עבור אינטרבל נתון  $I$  בקרבת השורש נגזור:

$$M = \frac{\max_{x \in I} |f''(x)|}{\min_{x \in I} |f'(x)|}$$

$$[g''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} \text{ נשים לב:}]$$

ניתן לראות כי למעשה<sup>1</sup>

$$|e_n| \leq \frac{1}{M} (M \cdot |e_0|)^{2^n}$$

כך שלהבטחת ההתכנסות  $x_0$  צריך לקיים

$$|r - x_0| < \frac{1}{M}$$

<sup>1</sup>  $e_n$  זה השגיאה בשלב  $n$

## ריבוי שורשים

לפעמים לשורש יש ריבוי גדול מ-1, למשל:

$$f(x) = (x+1)^3 \quad f(x) = (x-r)^2$$

זה לא חייב להיות דווקא פולינום:

$$f(x) = (x-1)(e^{x-1} - 1)$$

כאשר יש ריבוי שורשים, הפונקציה נעשית שטוחה באזור השורש, וזה עושה בעיה בהתכנסות:

### אי ישימות

חלק מהשיטות לא בהכרח ישימות בסביבת השורש.

### אובדן יעילות

חלק מהשיטות פחות יעילות, כלומר ההתכנסות פחות מהירה.

### הסבר אנליטי

עבור רושר בעל ריבוי  $k > 1$ , ניתן לכתוב

$$f(x) = (x-r)^k \cdot h(x)$$

עבור  $h(r) \neq 0$  ו- $h(x)$  רציף ב- $r$ . קל לראות כי

$$0 = f(r) = f'(r) = f''(r) = \dots = f^{(k-1)}(r) = 0 \quad f^{(k)} \neq 0$$

עבור שיטת ניוטון:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$f'(x) = k(x-r)^{k-1} h(x) + (x-r)^k h'(x)$$

$$g(x) = x - \frac{(x-r) \cdot h(x)}{kh(x) + (x-r) \cdot h'(x)}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{h(x)}{R \cdot h(x) + (x-r)h'(x)} - (x-r) \frac{d}{dx} \left[ \frac{h(x)}{R \cdot h(x) + (x-r) \cdot h'(x)} \right]$$

$$g'(r) = 1 - \frac{h(r)}{R \cdot h(r) + (r-r) \cdot h'(r)} - (r-r) \frac{d}{dx} \left[ \frac{h(r)}{R \cdot h(r) + (r-r) \cdot h'(r)} \right]$$

$$g'(r) = 1 - \frac{1}{R} \neq 0$$

## תיקון השיטה

נרצה פונקציה  $g(x)$  שעבור  $g'(r) = 0$   
נגדיר פונקציה

$$K(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-r)h(x)}{k \cdot h(x) + (x-r) \cdot h'(x)}$$

$$K'(r) = \frac{1}{R} m = 0$$

וברור כי  $K(2) = 0$  וכי 2 הוא שורש פשוט במקרה זה!

**החסרון:** יש צורך בחישוב נגזרות מסדר גבוה יותר ב1 (ביחס לשיטות המקוריות)

## פתרון מערכת משוואות לינאריות

$$Ax = b$$

עבור מטריצה  $A$ , רוצים למצוא בקלות את הפתרונות לכל  $b$  שיתנו לנו. בשביל זה רוצים "לזכור" את התהליך של דירוג המטריצה, שכן הוא תלוי רק ב  $A$  ולא ב  $b$ . בשלב  $i$  מאפסים את העמודה ה  $i$ . לכן, למשל לפני השלב 2 המערכת  $A^{(2)}x = b^{(2)}$  תראה כך:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

בשלב ה  $k$ :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

בכל איטרציה מקבלים סט חדש של משוואות, אבל למעשה הוא שקול לפי סט הפתרונות שאמור להתקבל. ניתן לחשב מטריצת כופלים:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

בכל שלב, כדי לעבור לסט המשוואות החדש, צריך לעדכן לכל  $i, j = k+1, \dots, n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} \cdot b_k^{(k)}$$

- השורות  $i = 1, \dots, k$  נותרות ללא שינוי - שכן לא נוגעים בהן בשלב הזה של דירוגן (כבר מדורגות)
- העמודות  $j = 1, \dots, k$  נותרות ללא שינוי - בעמודות האלה, בשורות שבהן כן נוגעים, יש רק אפסים, ולכן מקבלים חיבור של אפסים והתוצאה נשארת אפס.

• יוצא הדופן הוא  $a_{kk}^{(k)}$  - שתמיד יקבל אפס.

בסוף כל התהליך מקבלים מטריצה משולשית עליונה  $A^{(n)}$  - כל מה שמתחת לאלכסון זה אפסים. נסמן:

$$U = A^{(n)} \quad g = b^{(n)}$$

מהשלב הזה הפתרון מחושב בצורה קלה ע"י הצבה לאחור: אם יש לנו

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

מתחילים לחשב מ  $x_n$ :

$$u_{nn}x_n = g_n \Rightarrow x_n = \frac{g_n}{u_{nn}}$$

וממשיכים אחורה:

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = g_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{g_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

וכן הלאה, כל פעם מחשבים את  $x_k = \frac{g_k - \sum_{i=k+1}^n u_{ki}x_i}{u_{kk}}$ , עד שמגיעים ל  $x_1$ .

## פירוק מטריצות למטריצות משולשיות (LU decomposition)

בתהליך הזה קיבלנו מטריצה  $U$ , שהיא המשולשית העליונה שנוצרה אחרי תהליך הדירוג. בשביל לשמור אותה בזיכרון, מספיק לנו החצי הימני עליון של המטריצה - מה נעשה עם החצי השמאלי תחתון?

ניתן לאחסן שם את הכופלים  $m_{ij}$ , ולקבל מטריצה

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

מסתבר שהמטריצה המקורית שווה למכפלה של שני תוצרי הלואי:

$$A = L \cdot U$$

## הוכחה

$$(LU)_{ij} = \begin{pmatrix} m_{i1} & \cdots & m_{i,i-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

מבדילים בין שני מקרים:  $i \leq j$  ו  $i > j$ , ורואים כי בשני המקרים  $(LU)_{ij} = a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$  ולכן  $LU = A$

## מסקנה

$$\det(A) = \det(LU) = \det(U) \cdot \det(L)$$

אבל הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא איברי האלכסון, ולכן

$$\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii} \quad \det(L) = 1$$

ולכן

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

## משמעות מעשית

נניח שפתרנו  $A \cdot x = b$  עבור  $A, b$  מסויימים. זה אומר שכבר ידוע לנו הפירוק  $A = L \cdot U$ . במידה ואנו נדרשים לפתור שוב את המערכת, עבור אותו  $A$  אבל  $b$  חדש, ניתן להשתמש ב  $L$  ו  $U$  כדי לקצר את התהליך:

$$(L \cdot U) x = b$$

$$L(Ux) = b$$

$$Ux = b'$$

$$L \cdot b' = b$$

$b$  ידוע, ו  $L$  משולשית תחתונה וגם ידועה, ולכן ניתן לבצע הצבה לפנים כדי למצוא את  $b'$ . כעת חוזרים ל  $Ux = b'$ , ומכיוון שגם  $U$  כבר ידועה והיא משולשית עליונה, ניתן לבצע הצבה לאחור ולמצוא את  $x$ .



## סיבוכיות

- באיטרציה הראשונה, דבר ראשון צריך למצוא  $n - 1$  כופלים - אלו  $n - 1$  פעולות חילוק. לאחר מכן צריך לבצע  $n(n - 1)$  פעולות כפל וחסור(על כל שורה צריך לעשות  $n$  מכפלות ו- $n$  חיסורים)(העמודה הראשונה רק אפסים, אבל מחשבים גם על  $b$ ).
- באיטרציה ה- $k$  צריך לבצע  $n - k$  פעולות חילוק כדי למצוא  $n - k$  כופלים. עם כל כופל(כלומר לכל שורה) מבצעים  $n - k + 1$  פעולות כפל וחסור, ויש  $n - k$  שורות, וסה"כ  $(n - k + 1)(n - k)$  פעולות.

מספר הפעולות הכולל:

- מספר פעולות חילוק:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}n(n - 1)$$

- מספר פעולות הכפל/חסור:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + 1) = \sum_{i=1}^{n-1} i(i + 1) = \frac{1}{3}n(n^2 - 1)$$

סה"כ, לפתרון המערכת דרושות  $\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}$  פעולות - כלומר סדר הגודל של הסיבוכיות הוא  $\theta(n^3)$ .

לאחר מכן יש לבצע הצבה לאחור - אבל סדר הגודל של זה הוא  $\theta(n^2)$ , אז זה לא משפיע על סדר הגודל של הסיבוכיות.

## מסקנה

אם יש לנו  $n$  ווקטורי  $b$  שונים, ונרצה לחשב את הפתרונות לכולם מההתחלה - זה סדר גודל של  $\theta(n^4)$ . לעומת זאת, אם מבצעים פירוק  $LU$  אז מבצעים פעם אחת את הפירוק ב- $\theta(n^3)$ , ואז מוצאים את כל הפתרונות לכל ווקטורי ה- $b$  ב- $\theta(n^3)$ .

## שימוש - מציאת מטריצה הופכית

$$A \cdot X = I$$

$$Ax^1 = e_1, Ax^2 = e_2, \dots, Ax^n = e_n$$

כלומר היפוך מטריצה הוא פתרון של  $n$  מערכות עם אותו  $A$  ו- $b$ ים שונים.

## וריאנט גאוס-ג'ורדן

השיטה דומה מאוד לשיטת האלימינציה של גאוס, אבל יש שני הבדלים:

1. נירמול. הופכים את אלמנטי האלכסון ל:1:

$$a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad b_k^{(k+1)} = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad j = k, \dots, n$$

2. אלימינציה גם מעל האלכסון:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)} \quad b_j^{(k+1)} = b_j^{(k)} - a_{jk}^{(k)} b_k^{(k+1)}$$

עבור  $k$  השורה  $k$  תיראה כך:

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad \boxed{1} \quad a_{k,k+1}^{(k+1)} \quad \dots \quad a_{k,j}^{(k+1)} \quad \dots \quad a_{k,n}^{(k+1)} \quad b_k^{(k+1)}$$

ובשורה  $k > i$

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad \boxed{a_{ik}^{(k)}} \quad \dots \quad a_{ij}^{(k)} \quad \dots \quad a_{in}^{(k)} \quad b_j^{(k)}$$

## הערות

- האלגוריתם הופך את  $A^{(n)}$  למטריצת היחידה, ולכן  $b^{(n)}$  שווה לווקטור הנעלמים  $x$ , ומקבלים את התשובה ישירות, בלי צורך לבצע הצבה לאחור.
- הסיכויים של האלגוריתם היא  $\frac{1}{2}n^3 \approx \frac{n^2(n+1)}{2}$  בניגוד ל  $\frac{1}{3}n^3$  של השיטה המקורית.

## Pivoting/Scaling עבור הגדלת הדיוק

אם המטריצה  $A$  סינגולרית, בשלב מסויים ניתקל ב0 על האלכסון - מה שיעשה לנו בעיות בחישוב.

אבל יכול גם להיות שהמערכת לא סינגולרית, אבל בכל זאת ניתקל באפס על האלכסון בגלל שגיאות קירוב.  
יכול גם להיות שלא ניתקל ב0 על האלכסון, אבל בגלל שיש איברים קטנים מאוד על האלכסון החישוב משתבש.

## Pivoting חלקי

נרצה שכופלי ה  $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$  יהיו קטנים ככל האפשר.  
לכן בכל איטרציה נמצא את האלמנט שערכו המוחלט מקסימלי:

$$c_k = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

בוחרים את האינדקס  $k \leq i$  עבורו  $c_k = c_i$ , ומחליפים את השורה ה- $i$  עם השורה ה- $k$ . זה לא מפר את שקילות המערכת - אבל צריך לזכור את ההחלפות האלה, כדי לבצע את ההצבה בסוף.

ההחלפה הזאת, שנקראת Pivoting, דואגת לכך שהכופלים בכל שורה לא יהיו גדולים מ-1.

## Pivoting מלא

הרעיון הוא שבשלב ה- $k$ , מסתכלים לא רק על (תת) העמודה  $k$ , אלא על כל תת המטריצה שמתחילה מ- $a_{kk}$ , ומחפשים את  $\max_{\substack{i \geq k \\ j \geq k}} |a_{ij}|$ . מחליפים גם שורה וגם עמודה - וצריך להביא את זה בחשבון כשמציבים בסוף.

## Scaling

הרעיון כאן הוא למצוא את קנה המידה הגדול ביותר של כל השורה. מחלקים האיבר בעמודה ה- $k$  בכל שורה שעוד לא דורגה באיבר הגדול ביותר בערכו המוחלט (בשורה), ורק אז בוחרים את האיבר הכי גדול.

## הערה

יש איזשהו קשר בין Pivoting מלא לבין Scaling, שכן בשניהם מסתכלים גם על האיברים שלא נמצאים בעמודה  $k$ .

## פתרון מערכת משוואות לינאריות(המשך)

### יציבות/Conditioning

במקרה של מטריצה סינגולרית,  $A^{-1}$  לא קיימת ו  $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$  אין פתרון אחד

#### ויחיד למערכת המשוואות!

ביצוע האלימינציה ייתן בסופו של דבר אפס על האלכסון, מה שיוביל למצב של אינסוף פתרונות - או של אין פתרון.

אבל מה אם המטריצה "כמעט סינגולרית"?

במקרים בהם המערכת על סף סינגולריות, השגיאה היחסית גדולה ביותר!

#### אינטואיציה

- אם שינוי יחסי קטן בקלט גורם לשינוי יחסי קטן בפלט - אז המערכת יציבה.
- אם שינוי יחסי קטן בקלט גורם לשינוי יחסי גדול בפלט - אז המערכת לא יציבה.

#### הגדרה פורמלית

מספר מצב (condition number) מודד את השינוי היחסי בפלט לעומת השינוי היחסי בקלט:

$$K(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\delta y} \frac{\|\delta x\|/\|y\|}{\|\delta y\|/\|y\|}$$

כאשר  $y$  ו  $x$  וקטורי הקלט והפלט, בהתאמה.

$\delta y$  וקטור הפרטורבציה ו  $\delta x$  וקטור הסטיה מהפתרון האמיתי. (מונחים מעולם ההנדסה. פרטורבציה - שינוי בכניסה. סטיה - שינוי ביציאה. מערכת יציבה היא מערכת שלא מגיבה בצורה דרסטית על שינויים קטנים.)

#### חישוב נורמות של ווקטורים

$\|\cdot\|$  - נורם (norm) או אורך (גודל) של וקטור (מטריצה).  
באופן כללי:

$$\|x\|_p \triangleq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

קל לראות כי מההגדרה הזו נובעים המקרים הפרטיים:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad p = 1 \quad .1$$

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad p = 2 \quad .2$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad p = \infty \quad .3$$

הוכחה ל  $\|\cdot\|_\infty$ : נניח ש  $x_i$  הוא המקסימלי בערך מוחלט:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( |x_i|^p \left( \left| \frac{x_1}{x_i} \right|^p + \left| \frac{x_2}{x_i} \right|^p + \dots + \left| \frac{x_n}{x_i} \right|^p \right) \right)^{1/p} = x_i$$

(כל שאר ה  $x$ ים נעלמים כי  $\left| \frac{x_j}{x_i} \right| < 1$  ולכן  $\left| \frac{x_j}{x_i} \right|^p \rightarrow 0$ )

### תכונות הנורם שנדרשות מווקטורים ומטריצות

$$.1 \quad \|A\| \geq 0 \text{ ו } \|A\| = 0 \text{ אם } A = 0$$

$$.2 \quad \|k \cdot A\| = |k| \cdot \|A\| \text{ (כפל בקבוע)}$$

$$.3 \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ אי שוויון המשולש}$$

$$.4 \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \text{ אורך מכפלה קטן ממכפלת האורכים}$$

$$\text{אינטואיציה 4: } \bar{A} \cdot \bar{B} = \|A\| \|B\| \cos \theta, \text{ לכן}$$

$$\|\bar{A} \cdot \bar{B}\| = \|\|A\| \|B\| \cos \theta\| = \|A\| \|B\| |\cos \theta| \leq \|A\| \|B\|$$

### נורמות נפוצות למטריצות

$$\bullet \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \text{ - סכום עמודה מקסימלי}$$

$$\bullet \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ - סכום שורה מקסימלי}$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \text{ (נורם Frobenius) ולהראות כי } \|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

וכן  $r_\sigma(A) \triangleq \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$  באשר  $\|A\|_2 \sqrt{r_\sigma(A^t \cdot A)}$  - כלומר הערך העצמי/בערך מוחלט) הגדול ביותר של המטריצה  $A$ .

## חישוב מספר המצב עבור מערכת משוואות לינאריות

מקרה  $I$  - שינוי ב

כאשר

$$Ax = \underline{b}$$

הופך ל

$$A\bar{x} = \underline{b} + \underline{r}$$

נגדיר  $\underline{e} = \bar{x} - \underline{x}$ , ואז

$$A\underline{e} = A(\bar{x} - \underline{x}) = A\bar{x} - A\underline{x} = \underline{b} + \underline{r} - \underline{b} = \underline{r}$$

$$\underline{e} = A^{-1}\underline{r}$$

$\underline{e}$  זה השינוי בפלט ו $\underline{r}$  זה השינוי בקלט. רוצים למצוא חסם עליון ל  $\frac{\|\underline{e}\|/\|\underline{x}\|}{\|\underline{r}\|/\|\underline{b}\|}$ . לפי תכונות של נורמות של מטריצות נקבל

$$\|\underline{r}\| = \|A\underline{e}\| \leq \|A\| \|\underline{e}\|$$

$$\|\underline{e}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\underline{r}\|$$

נחלק את המשוואה הראשונה ב $\|A\| \|\underline{x}\|$  ואת השנייה ב $\|\underline{x}\|$ , ונקבל

$$\frac{\|\underline{r}\|}{\|A\| \|\underline{x}\|} \leq \frac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\underline{r}\|}{\|\underline{x}\|}$$

נוסיף לכך את אי השוויונים  $\|\underline{b}\| \leq \|A\| \|\underline{x}\|$  ו $\|\underline{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|\underline{x}\|$  ונקבל

$$\frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|} \leq \frac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|}$$

שכן

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \frac{1}{\|\underline{b}\|} \quad \frac{1}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\underline{b}\|}$$

קיבלנו שהמכפלה  $\|A\| \|A^{-1}\|$  מראה את השינוי בפלט לעומת השינוי בקלט - והיא נקראת מדד היציבות (condition number) של המטריצה. ככל שהוא גדול יותר ככה המערכת פחות יציבה. מספר המצב האופטימלי הוא 1, כי

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$$

## מקרה II - שינוי באיברי המטריצה A

במקום המטריצה A מקבלים  $A + \delta A$ . נקבל:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} = A^{-1}(A + \delta A)\underline{\bar{x}} = (I + A^{-1}\delta A)\underline{\bar{x}} = \underline{\bar{x}} + (A^{-1}\delta A)\underline{\bar{x}}$$

מכאן

$$\underline{x} - \underline{\bar{x}} = (A^{-1}\delta A)\underline{\bar{x}}$$

או

$$\frac{\|\underline{x} - \underline{\bar{x}}\|}{\|\underline{\bar{x}}\|} \leq \|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\|$$

כלומר

$$\frac{\|\underline{x} - \underline{\bar{x}}\|}{\|\underline{\bar{x}}\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

## מקרה III - שינוי גם באיברי A וגם בווקטור B

**משפט:** נתונה מערכת המשוואות  $A\underline{x} = \underline{b}$  עבור A לא סינגולרית, ויהי  $\delta(A)$  ו  $\delta(\underline{b})$  פרטורבציות הקלט.

⋮  
⋮  
⋮

מתקיים

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \right)$$

נשים לב:

$$\text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = \cancel{\text{cond}(A)} \cdot \frac{\|\delta A\| \|A^{-1}\|}{\cancel{\|A\|} \cancel{\|A^{-1}\|}}$$

$$1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 1 - \|\delta A\| \|A^{-1}\| \Rightarrow \|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$\frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \geq \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \cdot \text{cond}(A)$$

כלומר במקרה הכללי החסם יותר גדול מאשר במקרה שמשנים רק את  $A$  - וזה הגיוני!



## שיפור דיוק איטרטיבי

סביר שהפתרון שנקבל למערכת משוואות הוא לא הפתרון המדויק. יש טכניקות איטרטיביות לשפר את התוצאה.

אם  $A\bar{x} = \underline{b}$ , וקיבלנו פתרון מקורב  $\bar{x}$ , אזי וקטור השגיאה הוא  $\underline{e} = \underline{x} - \bar{x}$ .

$$\underline{r} = A\bar{x} - \underline{b}$$

$$A\underline{e} = \underline{r}$$

כלומר: יש לנו  $\bar{x}$ , לכן ניתן למצוא את  $A\bar{x}$ , ומכאן ניתן למצוא את  $\underline{r} = A\bar{x} - \underline{b}$  (כי  $A\bar{x} = \underline{b}$  ונתון לנו).

מתקיים  $A\underline{e} = \underline{r}$ , כאשר  $A, \underline{r}$  ידועים, ולכן ניתן לחלץ את  $\underline{e}$ , ומשם לקבל לקבל קירוב יותר טוב ל $\underline{x}$ , כי  $\underline{x} = \bar{x} + \underline{e}$ .

קל לחלץ את  $\underline{e}$ , כי כבר ביצענו ואריאציה כלשהי של שיטת גאוס (למשל פירוק LU) שמאפשרת לנו לפתור מערכות עם המטריצה  $A$  בצורה מהירה.

## שיטת Jacobi

### הגדרה

מערכת משוואות נקראת "שולטת אלכסונית" (diagonally dominant) אם ניתן לסדרה כך שאיבר האלכסון גדול מסכום שאר האלמנטים בשורה (לכל איבר האלכסון).

### השיטה

דומה מאוד ל fixed point iteration, אבל הפעם יש לנו מטריצות:

$$\underline{x}^{(n+1)} = \varsigma \left( \underline{x}^{(n)} \right) = \underline{b}' - B\underline{x}^{(n)}$$

כאשר

$$A = L + D + U$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = (L + D + U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$D\underline{x} = -(L + U)\underline{x} + \underline{b}$$

$$\underline{x} = -D^{-1}(L + U)\underline{x} + D^{-1}\underline{b}$$

ואז, האיטרציה היא:

$$\underline{x}^{(n+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_B \underline{x}^{(n)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{\underline{b}'}$$

כאשר

$$\underline{b}' = D^{-1}\underline{b} \quad B = D^{-1}(L+U)$$

הצדקת ההתכנסות - Atkinson עמודים 472-476

## אינטרפולציה (Interpolation) והתאמת עקומים

הרעיון הוא שנתונות לנו דגימות של פונקציה לא ידועה, ואנו צריכים למצוא את הפונקציה המקורית. יש לנו קבוצה של פונקציות שממנה אנו צריכים להרכיב את הפונקציה שלנו. תיאורטית זה אפשרי עם הרבה סוגים של פונקציות, אבל משתמשים בפולינומים, כי יש להם תכונות מאוד נוחות.

### אינטרפולציה ע"י פולינומים

נתונים מספרים ממשיים (או מדומים) שונים  $x_0, x_1, \dots, x_n$  והערכים של פונקציה  $f(x)$  לא ידועה עבור אותם  $x_i$  -  $f_0, f_1, \dots, f_n$ . רוצים למצוא פולינום  $p(x)$  המקיים

$$p(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

**הערה:** בניגוד לאפרוקסימציה (קירוב), שבה מחפשים קו ישר שיעבור קרוב לכל הנקודות, כאשר צריך שהפולינום יעבור דרך כל נקודה ונקודה מהדגימות.

נניח כי הפולינום המבוקש הוא מהצורה

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

כלומר יש למצוא  $(m+1)$  מקדמים (או נעלמים). יש לנו  $n+1$  אילוצים, ולכן יש לנו  $n+1$  משוואות, ולכן  $m = n$ . הנעלמים של הבעיה הם המקדמים  $a_i$ :

$$p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n$$

⋮

$$P(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n$$

שוב - ערכי  $x_i$  ידועים לנו, והנעלמים הם  $a_i$ . למרות שהפולינום עצמו לא לינארי(הוא ממעלה  $n$ ), מערכת המשוואות שקיבלנו כאן היא לינארית. אפשר לכתוב את זה בכתוב מטרצ'י:

$$Xa = \underline{f}$$

$X$  היא מטריצת Vandermonde הידועה(לשמצה):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = (x_i^j)$$

צריך לפתור

$$Xa = \underline{f} \Rightarrow \underline{a} = X^{-1}\underline{f}$$

האם יש ל- $X$  מטריצה הופכית? מכיוון ש- $X$  היא מטריצת וונדרמונדה, אפשר למצוא לה הופכי. תנאי הכרחי שתהייה לה הופכי היא שה- $x_i$ ים שונים - אם יש שני  $x$ ים זהים, אז יש לנו שתי שורות זהות במטריצה ומגיעים לסינגולריות<sup>1</sup>. ספציפית, לגבי מטריצת וונדרמונדה, מתקיים

$$\det(X) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

ולכן  $\det(X) \neq 0$  עבור  $x_i$  שונים, ומובטח לנו שיהיה הופכי.

## פולינומי לגרנז'(Lagrange)

זוהי שיטת אינטרפולציה אלטרנטיבית שמסתכלת על  $n+1$  מקרים פרטיים, ולכל אחד מהמקרים מתאימה פונקציה משלו.

מגדירים פולינום לגרנז'  $l_i(x)$  שכל אחד מהם הוא פתרון עבור תת בעיה:

$$l_i(x) = c(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)$$

מבניית הפולינום מקבלים שלכל  $j \neq i$ ,  $f_i(x_j) = 0$ . כמו כן דורשים שעבור קבוע  $c$  מסויים,  $f_i(x_i) = 1$  ולכן

$$c = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

<sup>1</sup>למרות שבמקרה הזה, אפשר פשוט לוותר על נקודה. אבל בצורה שניסחנו את זה מגיעים לסינגולריות.

ולכן ניתן לכתוב

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

עכשיו, הפתרון למערכת הוא

$$p(x) = \sum l_i(x) f_i = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \cdots + f_n l_n(x)$$

ואז, לכל  $j$ ,

$$p(x_j) = f_0 \underbrace{l_0(x_j)}_{=0} + \cdots + f_{j-1} \underbrace{l_{j-1}(x_j)}_{=0} + f_j \underbrace{l_j(x_j)}_{=1} + f_{j+1} \underbrace{l_{j+1}(x_j)}_{=0} + \cdots + f_n \underbrace{l_n(x_n)}_{=0} = f_j$$

## יחידות הפתרון

הפולינום  $p(x)$  אחד ויחיד.

## הוכחה

נניח בשלילה שקיים פולינום נוסף  $q$  ממעלה קטנה או שווה ל  $p$  המקיים את התנאים. נגדיר  $r(x) = p(x) - q(x)$ . ברור ש  $\deg r \leq n$ . מתקיים  $r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0$  כלומר  $r(x_i) = 0$  עבור  $i = 0, 1, \dots, n$ . אבל פולינום מדרגה קטנה או שווה ל  $n$  מתאפס ב  $n+1$  מקומות. לפי המשפט היסודי של האלגברה, זה ייתכן רק אם  $r \equiv 0$  ולכן  $q(x) \equiv p(x)$ .

## שיטת פולינומי לגרנז' - המשך

כל פולינום דואג לפתור את הבעיה החלקית

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

בסופו של דבר הפולינום המבוקש ניתן לביטוי ע"י

$$p(x) = \sum l_i(x) f_i = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \dots + f_n l_n(x)$$

## הערה

מעבר למציאת הפונקציה עצמה, המטרה של האינטרפולציה היא לבצע הערכה לערכי  $x$  שונים - כלומר לפי הערכים שכבר יש לנו, להעריך את ערך הפונקציה במקומות נוספים. לכן, לא חייבים לעשות תמיד את הפעולה היקרה של העברת הפולינום לייצוג קאנוני - לפעמים מספיק להשאיר את הפונקציה בצורה של צירוף לינארי של פולינומי לגרנז'. אמנם בצורה כזו ההצבה נעשית ב  $O(n^2)$  במקום  $O(n)$  בצורה הקאנונית - אבל זה חוסך לנו את מציאת הצורה הקאנונית ב  $O(n^3)$ .

## שגיאת האינטרפולציה

מכיוון שלא מובטח לנו שהפונקציה המקורית היא פולינום ממעלה  $n$  - אין אפשרות להגיע באינטרפולציה בדיוק לפונקציה המקורית. ניתן לבטא את השגיאה בתור

$$E(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot g(x)$$

עבור פונקציה כלשהי  $g(x)$ .  
נגדיר פונקציית עזר  $w(t)$  המקיימת

$$w(t) \stackrel{\text{def}}{=} (f(t) - p_n(t)) - (t - x_0)(t - x_1) \cdot \dots \cdot (t - x_n) \cdot g(x)$$

(שימו לב! המרנו  $x$  ב  $t$  לכל  $x$  פרט ל  $g(x)$ )  
 $w(t)$  מתאפסת ב  $t = x_0, x_1, \dots, x_n$  (כי אז  $f = p_n$  ולכן  $f(t) - p_n(t)$  מתאפס, וגם  $(t - x_0) \cdot \dots \cdot (t - x_n) g(x)$  מתאפס), ובנוסף לכך גם ב  $t = x$  (כי אז  $f(t) - p_n(t) = E(x)$  והוא שווה ל  $-(t - x_0) \cdot \dots \cdot (t - x_n) g(x)$ ).  
היא בדיוק השגיאה).

כלומר ל  $w(t)$   $(n+2)$  שורשים (שונים). בהנחת רציפות וגזירות של  $w(t)$ , לפי משפט ערך הביניים, הנגזרת הראשונה  $w'(t)$  חייבת להתאפס לפחות  $(n+1)$  פעמים - לפחות פעם אחת בין כל אחד מ  $(n+2)$  השורשים של  $w(t)$ .  
באופן דומה, אם  $w''(t)$  קיימת היא מתאפסת לפחות  $n$  פעמים, וכן הלאה - עד שמקבלים ש  $w^{(n+1)}(t)$  מתאפסת לפחות פעם אחת.

נניח ש  $w^{(n+1)}(t)$  מתאפסת ב  $t = \xi$ . אזי

$$0 = w^{(n+1)}(\xi) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [(f(t) - P_n) - (t - x_0) \cdots (t - x_n) g(x)] = \dots$$

$P_n$  פולינום מדרגה  $n$ , ולכן  $P_n^{(n+1)} = 0$ . לגבי  $(t - x_0) \cdots (t - x_n) g(x)$  קבוע (גזרים לפי  $t$ ), והשאר זה פולינום מדרגה  $n + 1$  שהמקדם של המעלה הגבוהה ביותר שלו היא 1 - ולכן  $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (t - x_0) \cdots (t - x_n) g(x) = (n + 1)! g(x)$ . נציב בחישוב:

$$\dots = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - (n + 1)! g(x)$$

ולכן

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}$$

## שיטת חלוקות הפרשים לפי ניוטון (Divided Differences)

גם בשיטה הזו, הייצוג שמקבלים הוא לא ייצוג מפורש של הצורה הקאנונית. הייצוג של הפולינום הוא

$$\begin{aligned} P_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} a_0 + (x - x_0) a_1 \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) a_2 \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) a_3 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) a_n \end{aligned}$$

נשים לב:

- מה שצריך למצוא כאן זה ה  $a$ ים - אבל אלו לא ה  $a$ ים של הצורה הקאנונית!
- המכפלה האחרונה היא עד  $x - x_{n-1}$ , לא עד  $x - x_n$ !

### הגדרה - חלוקת הפרשים

- חלוקת הפרשים מסדר 1: מוגדרת באופן טריוויאלי:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

- חלוקת הפרשים מסדר 2

$$f[x_0, x_1, x_2] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- באופן כללי - חלוקת ההפרשים מסדר  $n$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

### חישוב המקדמים $a_i$

- את  $a_0$  קל לחשב, שכן  $P_n(x_0) = a_0$
- אחרי שמצאנו את  $a_0$ , אפשר למצוא את  $a_1$  באמצעות  $P_n(x_1) = a_0 + (x_1 - x_0)a_1$
- וכן הלאה - ואפשר לבטא את זה באמצעות מטריצה משולשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_{n-1} - x_0) & \cdots & (x_{n-1} - x_0) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2}) & 0 \\ 1 & (x_n - x_0) & \cdots & (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-2}) & (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n(x_0) \\ P_n(x_1) \\ \vdots \\ P_n(x_n) \end{pmatrix}$$

אבל אפילו את זה אפשר לחסוך. באמצעות מניפולציה אלגברית אפשר לקבל:

$$a_0 = f[x_0]$$

$$a_1 = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

$$a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

$$\vdots$$

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

ההוכחה - ע"י אינדוקציה.

## מסקנה

ניתן לייצג את פולינום האינטרפולציה באמצעות

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f[x_0] + (x-x_0)f[x_0, x_1] \\
 &+ (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
 &+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 &\vdots \\
 &+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]
 \end{aligned}$$

## שגיאת האינטרפולציה כתלות בחלוקת הפרשים

יהי  $t$  מספר שונה מ- $x_0, x_1, \dots, x_n$ . אינטרפולציה המובססת על  $x_0, x_1, \dots, x_n, t$  ניתנת לביטוי ע"י

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f[x_0] + (x-x_0)f[x_0, x_1] \\
 &+ (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
 &+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 &\vdots \\
 &+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\
 &+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \\
 &= P_n(x) + (x-x_0)\cdots(x-x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_n, t]
 \end{aligned}$$

ולכן, עבור  $t = x_{n+1}$  ו- $n = m+1$  נקבל

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

עבור  $\xi$  מסויים באינטרבול המכיל את  $x_0, x_1, \dots, x_m$ .



## אפרוקסימציה (קירוב) של פונקציות

להבדיל מאינטרפולציה, שבה מקבלים סט של נקודות ומוצאים פונקציה, כאן נתונה פונקציה וצריך לקרב אותה. אפרוקסימציה לא בהכרח עוברת דרך סט של נקודות.

## פיתוח באמצעות טור טיילור

### משפט

תהי  $f(X)$  פונקציה בעלת  $n+1$  נגזרות רציפות באינטרבל נתון עבור  $n \geq 0$  מסויים. אזי עבור  $x, x_0 \in [a, b]$  מתקיים

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

כאשר

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

עבור  $\xi$  מסויים בין  $x_0$  ל- $x$  (תלוי ב- $x$ )

## קירוב לפי קריטריון minimax

### שגיאת minimax

נתונה הפונקציה  $f$ , ורוצים לקרב אותה באמצעות פולינום  $q$  כך  $\deg q \leq n$ . נגדיר:

$$\rho_n(f) \triangleq \inf_{\deg q \leq n} \|f - q\|_\infty$$

כאשר

$$\|f\|_\infty \triangleq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

כלומר מכל הפולינומים ממעלה עד  $n$ , בוחרים את זה ההפרש המקסימלי שלו מ  $f$  הוא מינימלי.

נסמן ב  $q_n^*(x)$  את הפולנום האופטימלי, והוא מקיים

$$\rho_n(f) = \|f - q_n^*\|_\infty$$

## אבחנות במקרה של $f = e^x$ , $n = 1$ ו $a = -1, b = 1$

1.  $q_1^*(x)$  ו  $f(x)$  חייבות להחתך בשתי נקודות באינטרבול:  $-1 < x_1 < x_2 < 1$ . אחרת אפשר לשפר את האפרוקסימציה באמצעות הזזה.

2. השגיאה המקסימלית מתקבלת ב 3 נקודות בדיוק (בקצוות ובאמצע), שכן במקרה הזה חייב להיות איזון בשגיאה בין הקצוות.

## הערה

קירוב minimax נותר תוצאה הרבה יותר טובה מאשר קירוב לפי טור טיילור.

## אלגוריתם כללי Remes

אפשר למצוא באטקינסון, סעיפים 4.7, 4.9

## אפרוקסימציה ע"פ קריטריון least squares

קשה לחשב את  $q_n^*$ . יותר נוח לבצע מינימיזציה על סכום ריבועי הסטיות: אם  $r_i$  הם השגיאות בכל נקודה, רוצים

$$\sum r_i^2 \rightarrow \min$$

נגדיר

$$\|g\|_2 = \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad g \in C[a, b]$$

עבור פונקציה  $f(x)$  רציפה באנטרבול  $[a, b]$ ,  $n \geq 0$ , נגדיר

$$M_n = \inf_{\deg(r) \leq n} \|f - r\|_2$$

ועבור  $r_1^*$  שלגביו מתקבלת השגיאה הריבועית המינימלית

$$M_n = \|f - r_1^*\|_2$$

## הערה

מכיוון שהשורש מחוץ לאינטגרל, ומחפשים את המינימום, אפשר לוותר על השורש בחישוב, ולמצוא מינימום ל $\|f - r_1\|_2^2$ .

## פתרון לפונקציה כללית לפי עקרון Least Squares

נרצה למצוא פולינום אפרוקסימזציה

$$r_n^*(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

לפונקציה  $f(x)$ . כך שעבור אינטרבל נתון  $[a, b]$  יתקיים

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n) \equiv \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j x^j \right]^2 dx$$

יהיה מינימלי.

נדרוש אפוא ש

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$$

ביצוע הגזירה (בתוך האינטגרל) לפי כל אחד מהמשתנים  $a_0, \dots, a_n$ :

$$i = 0, 1, \dots, n \quad \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j x^j \right]^2 dx =$$

$$2 \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j x^j \right] (x^i) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) x^2 dx = \int_a^b \left( \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) x^2 dx$$

בשילוב התנאים הנ"ל זה נותן

$$\sum_{j=0}^n a_j \int_a^b x^{i+j} dx = \int_a^b f(x) x^i dx \quad i = 0, 1, \dots, n$$

זו מערכת משוואות לינאריות ב $(n+1)$  נעלמים

# אפרוקסימציה - המשך

## שיטת Least Squares - תזכורת+המשך

נתונה פונקציה  $f$ , וצריך לקרב אותה לפולינום מדרגה על  $n$ :

$$f(x) \approx p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

כך שעבור אינטרוול נתון  $[a, b]$ ,

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n) \equiv \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j x^j \right]^2 dx$$

יהיה מינימלי. בשביל זה צריך שלכל  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0$ . במקום לבצע אינטגרל ואז נגזרת, מחליפים את הסדר:

$$0 = \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_j} \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j x^j \right]^2 dx \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$0 = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) x^i dx$$

ובסוף מקבלים

$$\sum_{j=0}^n a_j \int_a^b x^{i+j} dx = \int_a^b f(x) x^i dx \quad i = 0, 1, \dots, n$$

זו מערכת משוואות לינארית ב  $(n+1)$  נעלמים - והבעיה היא שהמערכת לא יציבה (ill conditioned)!

למשל עבור אינטרוול  $[0, 1]$  מקבלים

$$\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{i+j+1} = \int_0^1 f(x) x^i dx \quad i = 0, 1, \dots, n$$

אגף ימין קבוע, המשתנים (=המקדמים  $a_i$ ) נמצאים באגף שמאל, ומטריצת המערכת היא

$$\begin{bmatrix} i=0 \\ i=1 \\ \vdots \\ i=n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

הידועה לשמצה בשל ה conditional number שלה - 27 עבור  $2 \times 2$ , 748 עבור  $3 \times 3$ .

## גישה אלטרנטיבית - אפרוקסימציה המתבססת על פולינומים אורטוגונליים

**הרעיון:** במקום לעבוד עם בסיס של חדי-איבר  $x^n$  ( $n \geq 0$ ) (שקרובים לתלות לינארית), נעבוד עם בסיס של פולינומים אורטוגונליים.

**הגדרות:** • מכפלה פנימית של שתי פונקציות רציפות ב  $[a, b]$  נתונה ע"י

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_a^b f(x) g(x) dx$$

• הנורמה לפי המכפלה הפנימית הזו היא

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

•  $f$  ו  $g$  יחשבו אורטוגונליים אם  $\langle f, g \rangle = 0$

### פולינומי צ'ביצ'ב

הפולינומים מתקבלים ע"י נוסחת הנסיגה

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_0(x) \equiv 1 \quad T_1(x) = x$$

כלומר:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= x \\ T_2 &= 2x^2 - 1 \\ T_3 &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

וכו'

### תכונות של פולינומי צ'ביצ'ב

• ניתן להראות ש  $T_n(x) = \cos n\theta$  כאשר  $\theta = \cos^{-1} x$

$$[\cos \theta = \cos(\arccos x) = x]$$

באופן כללי:

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

---


$$\cos^{-1} \frac{1}{\cos} \text{ זה בעצם } \arccos \left( \frac{1}{\cos} \right) \text{ ולא } \frac{1}{\cos}$$

נובע אכן

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

• לפולינומי צ'ביצ'ב מקדם  $2^{n-1}$  (עבור חד האיבר  $x^n$ )

• פולינומי צ'ביצ'ב אורתוגונליים! ספציפית,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

## סוף החומר של הקורס

## על הבחינה

- מועד א' מתקיים ב-11-07-2012
- הבחינה 3 שעות
- 5 שאלות
- להביא מחשבון - שלא יודע לעשות plot, להפוך מטריצות, לפתור משוואות וכו'.
- מותר להכניס דף(=שני עמודים) אחד של נוסחאות.
- חומר:
- סוגי שגיאות
- ייצוג מספרים
- שיטות למציאת שורשים
- התכנסות - סדר התכנסות, שיעור התכנסות וכו'
- אלימינציה לפי גאוס
- סיכוביות של השיטות השונות
- Pivoting
- אינטרפולציה
- \* הוספה, גריעה של נקודות
- אפרוקסימציה
- \* שיטת טור טיילור
- \* מציאת חסם עליון
- \* שיטת Least Squares
- \* שיטת minimax (רק ברמה שלמדנו)
- \* שיטת פולינומי צ'ביצ'ב
- אינטגרציה נומרית
- **שאלה על Spline - מובטחת!**
- לא נידרש לכתוב קוד Matlab - אבל אולי נידרש לכתוב פאסודו-קוד, לתאר אלגוריתם.
- לעגל חישובי ביניים לפי הדיוק הנדרש(מספר הספרות המשמעותיות)
- יהיו גם שאלות תיאורטיות וגם שאלות חישוב
- ניצול של משפטים תיאורטיים - צריך לדעת את המשפטים