

שיטות נומריות

קורס אינטראקטיבי

מבוסס על הקורס 88-376 המועבר ע"י ד"ר קריסטוב

חלק ב' של שיטות
נומריות מתחיל
בעמוד 100

2	מבוא
3	פרק 1. תורת השגיאות
9	הפצת שגיאות (Error propagation)
17	פרק 2. חישוב ערכי פונקציות
26	אלגוריתם של Euclid לחילוק שני פולינומים
28	סדרת Sturm
32	פתרון משוואות
33	שיטת החצייה
34	שיטת ביוטון-רפסון, שיטת המשיק
39	פרק 3. חישובים בעזרת המחשב - ניתוח אלגוריתמים
40	התכנסות אלגוריתמים
44	מיון של נקודות שבת
47	מהירות של התכנסות האלגוריתם
52	איך נדע מאיזה סוג האלגוריתם המתון?
61	פרק 4. תורת הקירובים
66	קירובים פולינומיאליים
71	פולינום אינטרפולטיבי
74	הפולינום של ביוטון
77	פולינום אינטרפולציה של Hermite
83	פרק 5. שיטות נומריות האלגברה ליניארית
87	הנרמה של המטריצה
92	מספר התנאי

מבוא

יש להבין את ההבדל העקרוני בין המתמטיקה הבדידה לבין ייצוג המספרים בעזרת המחשב. המושג החשוב בשיטות הנומריות הוא מושג הדיוק, לעומת המתמטיקה הבדידה בה כל האלגוריתמים מדויקים.

✓ מתמטיקה נומרית - המדד הוא זמן הריצה במובן של מספר פעולות חשבון.

✓ מתמטיקה בדידה - המדד הוא זמן הריצה במובן של מספר ההשוואות.

	הפעולה	זיכרון	זמן	דיוק
מתמטיקה בדידה	Search	n	$O(\log n)$	אלגוריתמים מדויקים
	Sort	n	$O(n \log n)$	
	Shortest Path	n	$O(n^3)$	
	Salesman Problem	n	$O(n!)$	
מתמטיקה נומרית	Gauss elimination	$n^2 + n$	$n^3/3$	חשוב לבדוק דיוק!
	Matrix multiplication	$2n^2$	$< n^2$	
	$\int f(x) dx$	n	$O(n)$	

פרק 1 - תורת השגיאות

✓ איך מודדים שגיאות?

x מספר אמיתי
 $\tilde{x}$ - מספר שגיאות.

הגדרה:

שגיאה מוחלטת

(absolute error)

$$\Delta x = |x - \tilde{x}|$$

שגיאה יחסית

(relative error)

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$$

לדוגמא:

$$\tilde{\pi} = 3.14$$

השגיאה המוחלטת: $|\pi - 3.14| \approx 0.0002$

שגיאה יחסית: $\left| \frac{\pi - 3.14}{\pi} \right|$

אם ידועות k ספרות נכונות, אזי דיוק של מספר x יהיה:

$$\delta_x \leq \frac{1}{2 \cdot A} \cdot B^{1-k}$$

A - הספרה הראשונה הנכונה.

B - בסיס.

לדוגמא: ב π הספרה הראשונה היא 3, לכן השגיאה היחסית היא:

$$\delta_\pi \leq \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 10^{-4}$$

נניח שקיימים שני מספרים אמיתיים ושני מספרים עם שגיאות.



אם נכפיל X ב- Y נקבל מספר עם שגיאה:

$$x \cdot y \in x \quad y$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = xy \in \tilde{x} \quad \tilde{y}$$

שגיאה יותר קטנה תהיה כאשר נחבר שני מספרים מאשר אם נכפיל את שני המספרים

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{9}{10}\right)^n \rightarrow a_{n+1} = 0.9 \cdot a_n, s_{n+1} = s_n + a_n, s_1 = 0, a_1 = 1 \quad \text{לדוגמא:}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots \rightarrow \ln(2) \quad \checkmark \quad \text{טור מתכנס:}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \rightarrow \infty \quad \checkmark \quad \text{טור מתבדר:}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{מבחינת שיטות נומריות} \quad \text{התוצאה לא תהיה אינסופית אלא:}$$

$$\text{נקבל תוצאה סופית כיוון ש- } \frac{1}{n} \text{ יהיה זניח.} \\ \text{במקרה בו נגדיר} \quad Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{N-n} \Leftarrow Y_1 = \frac{1}{N}, \quad n = N$$

כאן החיבור עם המספרים הקטנים הוא משמעותי.

מבחינה מתמטית - הפעולות הן חילופיות, ואילו **במתמטיקה נומרית** הפעולות אינן חילופיות.

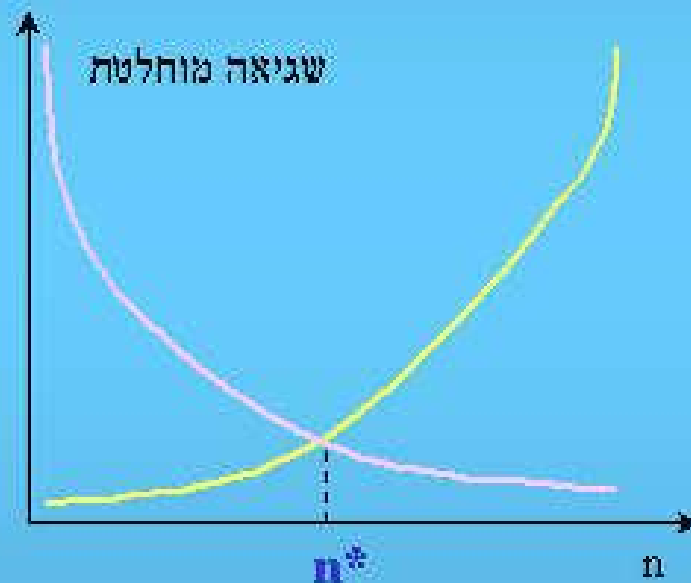
איך מודדים שגיאות בפעולות כפל וחיבור?

מספרים אמיתיים : x y

מספרים עם שגיאה : $\tilde{x}$ $\tilde{y}$

$$|x + y - (\tilde{x} + \tilde{y})| \leq |x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| \quad \text{1. בחיבור:}$$

$$\Delta_{x+y} \leq \Delta_x + \Delta_y \quad \text{- שגיאה מוחלטת בחיבור.}$$



השגיאה המוחלטת עולה בצורה ליניארית.

$$\Delta_{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \leq n \cdot \Delta_x$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \quad \text{כאשר} \quad \Delta_{x_i} = \Delta_x$$

ככל שניקח יותר מספרים, נגיע לשגיאה קטנה יותר.

השגיאה יורדת בחישובים מתמטים רגילים. לעומת זאת,

בחישובים במחשב השגיאה עולה ואף פעם לא יורדת.

$$\Delta_{x+y} \leq \Delta_x + \Delta_y \quad \text{משפט 1:}$$

$$\delta_{x \cdot y} \leq \delta_x + \delta_y \quad \text{שגיאה יחסית בפעולת כפל:} \quad \text{משפט 2:}$$

$$\delta_{x \cdot y} = \frac{x \cdot y - \tilde{x} \cdot \tilde{y}}{x \cdot y} \leq \frac{|x - \tilde{x}|}{x} + \frac{|y - \tilde{y}|}{y} \leq \delta_x + \delta_y$$

$$\left(\left| \frac{x \cdot y - \tilde{x} \cdot y}{x \cdot y} + \frac{\tilde{x} \cdot y - \tilde{x} \cdot \tilde{y}}{x \cdot y} \right| \leq \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| + \left| \frac{\tilde{x}}{x} \right| \cdot \left| \frac{y - \tilde{y}}{y} \right| \right)$$

$$\delta_{x^n} \leq n \cdot \varepsilon$$

$$\delta_x = \varepsilon$$

דוגמא: מהי השגיאה היחסית בנפח הכדור? $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

π מבחינה מתמטית הוא קבוע, אבל מבחינת חישובים הוא לא קבוע.

התשובה: $\delta_v \leq \delta_\pi + 3 \cdot \delta_r = \frac{1}{6} \cdot 10^{-4} + 3 \cdot \varepsilon$

כל הפעולות הן פעולות עם הרבה משתנים.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{נתון אלגוריתם:}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_3$$

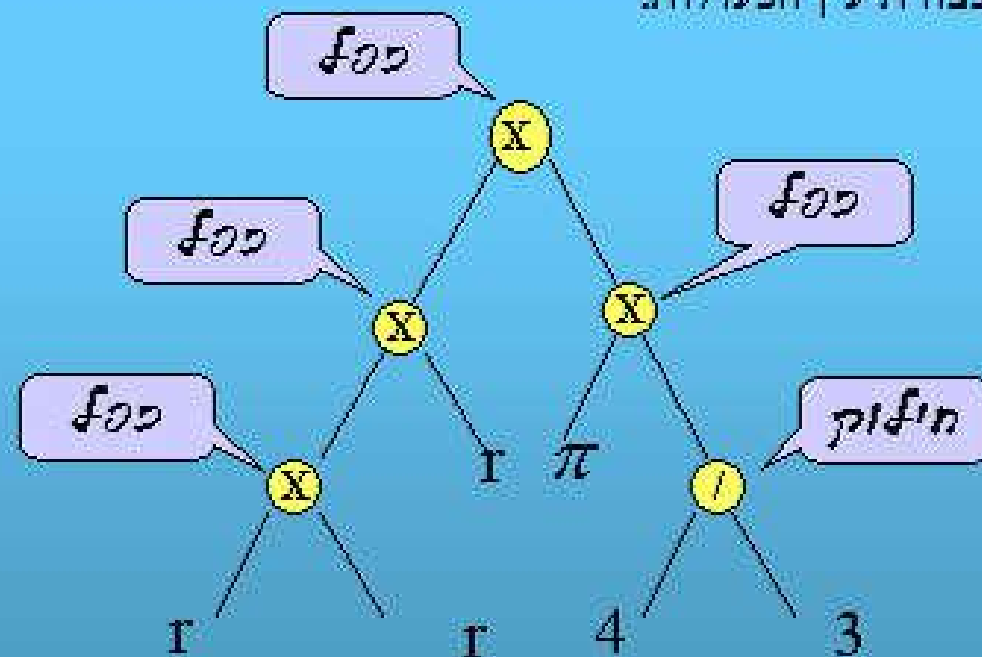
$$? \quad \Delta_{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad , \quad \delta_{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad \text{מה תהיה השגיאה}$$

הפונקציה היא פונקציה רב-משתנים.

ניתן לכתוב פונקציה בצורה כללית, לדוגמא:

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & , \text{if } x_1 > x_2 \\ x_2 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

או בצורת עץ הפעולות.



$$\frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow$$

הפצת שגיאות - Error Propagation

✓ במתמטיקה נומרית יש טעות ולעיתים היא מצטברת.

נראה דוגמאות לבעיות בהן יש שגיאות:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ מכיוון שאין יודעים את $\frac{\pi}{5} = \frac{3.14}{5}$, נחשב $\sin(0.628)$

ונקבל 0.587528 במקום $\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{5} - \sqrt{5} \approx 0.587785$

שגיאה אחת היא ב $\frac{\pi}{5}$, והיא מצטברת כשמחשבים את ה $\sin$ על סמך השגיאה.

ללא כלל השגיאה בחישוב פונקציה $\sin(\dots)$

2. נעגל ל- $z = x^y$

$x = 1.2 \Leftarrow \tilde{x} = 1.2001$ $y = 500 \Leftarrow \tilde{y} = 499$

$$\delta_z = \left| \frac{z - \tilde{z}}{z} \right| \approx 0.13, \quad \delta_y = \left| \frac{y - \tilde{y}}{y} \right| \approx 0.002, \quad \delta_x = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| \approx 0.00008$$

3. נניח שני מספרים a, b בסוג float ואלגוריתם הבא:

```
My(a, b){
```

```
float a, b;
```

```
1 *if(a = b){...c1 = f(...)}
```

```
else{c1 = g(...)}
```

```
2 *if(a < 0){...c2 = f(...)}
```

```
else{c2 = g(...)}
```

```
3 *if (|a - b| < eps){...}
```

```
}
```

כמעט ואין סיכוי שיתקיים $a=b$, כי שני עיגול של כל

הספרות אחרי הנקודה, ולכן לא נגיע באלגוריתם ל- $c_1=f$.

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & , a > 0 \\ -1 & , a < 0 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{\text{sign}(a)+1}{2} \cdot f(...) + \frac{1-\text{sign}(a)}{2} \cdot g(...)$$

הבעיה היא שהפונקציה SIGN אינה רציפה. תמיד כשנשתמש באלגוריתם שהרעיון שלו ממומש על

ידי פונקציה לא רציפה, תהיה שגיאה.

מקומות בהם יש אי-רציפות באלגוריתמים הן נקודות תורפה, ושם מצפים לשגיאות. אלהם מקומות בהם

יש הסתעפות באלגוריתם.

הגדרה: $f(x) \in C^n[a,b]$, כלומר: $f(x)$ שייכת למחלקת רציפות בקטע הסגור: $[a,b]$, אם היא רצופה ב- $[a,b]$ וכל N נגזרותיה רציפות בקטע הזה.

לדוגמא: $f(x) \in C^1[a,b]$ אם $f(x)$ רצופה ונגזרת ראשונה שלה רציפה. אם הפונקציה רציפה ונגזרת לא, מסמנים: $f(x) \in C[a,b]$

משפט ערך ממוצע (Mean Value Theorem)

תהי $f(x)$ פונקציה כך ש-
 $f(x) \in C^1[a,b]$
 תהיינה נחונות 2 נקודות:
 $x, \tilde{x} \in [a,b]$

אזי קיים $x^* \in [a,b]$ כך ש- $f(x) - f(\tilde{x}) = f'(x^*) \cdot (x - \tilde{x})$

נשתמש במשפט הזה כדי לחשב את השגיאות ב**לדוגמאות** הקודמות:

1. $\sin$: $\sin(\pi/5)$ - היא פונקציה רציפה וכל הנגזרות שלה רציפות.

$$\Delta_{\sin(\pi/5)} = \left| \sin(\pi/5) - \sin(0.628) \right| = \left| \cos(\pi/5) \right| \cdot \left| \left(\pi/5 - 0.628 \right) \right| \leq 1 \cdot \left| \pi/5 - 0.628 \right| \leq 10^{-4}$$

בדקנו מה השגיאה לפי משפט הערך הממוצע, כי גם פונקציה רציפה וגם הנגזרות.

$$\text{אם ניקח: } \begin{cases} x = 10^{-20} \\ \tilde{x} = -10^{-20} \end{cases} \Leftrightarrow \text{אזי } |x - \tilde{x}| = 2 \cdot 10^{-20} \text{ וזה מאוד קטן.}$$

אך אם נציב זאת ב $\text{sign}(x)$ נקבל: $|\text{sign}(x) - \text{sign}(\tilde{x})| = 2$ וזה מספר מאוד קטן.
זאת מפני ש- sign לא רציפה!

משפט ערך ממוצע m ממדי:

נראה זאת כפונקציה דו-ממדית: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n(U)$

תהינה נתונות ה"נקודות": $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(U)$

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$$

"נקודות" אלו שייכות לקטע U , אזי לפני משפט ערך ממוצע:

$$\exists x^* \in U: f(x_1, \dots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot (x_1 - \tilde{x}_1) + \dots +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^*, \dots, x_n^*)(x_n - \tilde{x}_n)$$

2. נשתמש במשפט המוכלל הזה עבור שני משתנים:

$$f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - \tilde{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - \tilde{y})$$

נחשב את השגיאה בפונקציה x^y :

נעביר את x^y לצורה הבאה : $f(x,y) = x^y = e^{y \ln(x)}$

נחשב את הנגזרת : $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln(x)} \cdot \frac{y}{x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = y \cdot x^{y-1}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln(x)$$

$$\Delta_{x^y} = x^y - \tilde{x}^y = y \cdot (x^y)^{y-1} \cdot (x - \tilde{x}) + (x^y)^y (\ln(x)) \cdot (y - \tilde{y})$$

מכיוון שבדוגמא היה נתון ש- $x = 1.2 \sim 1$ אז $\ln(x) \approx 0$

לכן מקבלים : $\Delta_{x^y} = |x^y - \tilde{x}^y| \leq y \cdot (x^y)^{y-1} (x - \tilde{x})$

$$\Delta_{x^y} \leq 500 \cdot (1.2)^{499} \cdot 10^{-4} \approx 10^{10}$$

קבלנו מספר גדול מאוד, כשבפועל ההפרש קטן מאוד.

הסיבה לכך היא שהמספר שהתקבל הוא הנגזרת החלקית. צריכים לעבוד עם פונקציות שנגזרותיהן לא גבוהות. ✓

אם לדוגמה ניקח את הפונקציה $\frac{1}{x}$, הנגזרת הראשונה שלה היא $-\frac{1}{x^2}$ ✓

בסביבת הנקודה 0 הנגזרת גבוהה, ושם נקבל שגיאות מאוד גדולות.

לכן לא רצוי לכתוב תוכנה שמשתמשת בנגזרת זו באזור הזה .

אם רוצים לכתוב תוכנה שתחשב את הפונקציה:

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2} - 1}$$

תחילה יש לבדוק ש- $|x| < 10^{-32}$

את זה המחשב מחשב כבר כ-0, ואז נקבל חילוק ב-0 ! $e^{x^2} \approx 1 + x^2 + o(x^2)$



Heron's Algorithm

נחון אלגוריתם הבא למציאת $\sqrt{a}$ ✓

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad a > 0$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \frac{1+a}{2} \dots\dots\dots$$

נחשב את השגיאה באלגוריתם הזה :

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2 \cdot x_n} (x_n^2 - 2\sqrt{a} \cdot x_n + a) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot x_n} (x_n - \sqrt{a})^2$$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2 \cdot x_n} \cdot \varepsilon_n^2 \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \varepsilon_n^2$$

$$A + B \geq 2 \cdot \sqrt{A \cdot B}$$

$$x_n + \frac{a}{x_n} \geq 2 \cdot \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = 2 \cdot \sqrt{a}$$

$$\Delta f \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{עבור}$$

$$\Delta f \leq 1 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y \quad \text{לדוגמה:}$$

$$\delta_f = \frac{\Delta f}{|f|} \leq \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|}{|f|} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|}{|f|} \cdot \Delta x_n = \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x_n} \right| \cdot \Delta x_n$$

$$\frac{\partial \ln(f)}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial \ln(f)}{\partial y} = \frac{1}{y} \quad \Leftarrow \quad f(x, y) = x \cdot y \quad \text{לדוגמה:}$$

השגיאה היחסית אחרי פעולת כפל/חילוק: $\ln(f) = \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$$\delta_f \leq \frac{1}{|x|} \cdot \Delta x + \frac{1}{|y|} \Delta y = \delta_x + \delta_y \quad \text{ולכן:}$$

אם נרצה לחשב זאת עבור $f(x, y) = \frac{x}{y}$, כל ההבדל הוא שבגזירת נקבל

מינוס, ומכיוון שבנוסחה יש ערך מוחלט - נקבל אותה התוצאה.

```
float a,b
```

```
.
```

```
if (a < b) s = f(a,b,...)
```

```
else s = g(a,b,...)
```

תוכנית זו אינה טובה מפני שב- IF יש אי-רציפות. יש אי-רציפות בנקודת שבהן

$a = b$ כי אז $sign$ אינה רציפה. אם $|a - b|$ זה מספר גדול - אין בעיה. הבעיה היא כשהמספר מאד קטן ומתקרב ל-0.

```
float a,b
```

```
.
```

```
if(|a - b| < ε message (GEVALT!)
```

```
if(a < b) s = f(a,b,...)
```

```
else s = g(a,b,...)
```

הבעיה הנ"ל מתעוררת רק כשמדברים על $float$ אם מדברים על int , אין צורך להוסיף את השורה ה-2. הבעיה ב- $float$ היא שיש הרבה ספרות אחרי הנקודה ויש לשים לב לדיק.

פרק 2. חישוב ערכי פונקציות

אלגוריתם לחישוב $\sqrt{2}$ ✓

Heron's Algorithm:
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \end{cases}$$

1.

$$(a_{n+1} - \sqrt{2}) \leq \frac{1}{2a_n} (a_n - \sqrt{2})^2$$

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \varepsilon_n^2$$

$$\varepsilon_n \rightarrow 0 \quad a_n \rightarrow \sqrt{2}$$

2. נמצא קירובים רציונליים ל- $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{a_1} \quad / -1$$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{a_2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{a_2}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב $\sqrt{2} + 1$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{a}$$

מה שקיבלנו נקרא שבר בשורשית (chain fraction):

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \approx 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

אם נמשיך עוד - נתקרב יותר
לתשובה הנכונה.

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

דוגמא: נחשב את $\sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\sqrt{10} &= 3 + \frac{1}{a_1} \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{10} - 3} = \frac{1}{\sqrt{10} - 3} \cdot \frac{\sqrt{10} + 3}{\sqrt{10} + 3} = \frac{\sqrt{10} + 3}{10 - 9} = \sqrt{10} + 3 = 6 + \frac{1}{a_2} \\ \sqrt{10} &= 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 \dots}}}\end{aligned}$$

אלגוריתם לחישוב e^x ✓

1. אלגוריתם EULER

$$a_n = 4 \cdot n + 2 + \frac{x^2}{a_{n+1}}$$

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot x}{x + 2 + \frac{x^2}{6 + \frac{x^2}{10 + \dots}}}}$$

↓

$$\frac{x^2}{4 \cdot n + 2 + \frac{x^2}{a_{\dots}}}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

2. טור טיילור

נלמד כיצד לנתח אלגוריתמים כדי לדעת באיזה אלגוריתם לבחור כך שנבצע עבודה מהירה עם כמה שפחות פעולות.

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n \quad \text{נחון פולינום} :$$

יש כאן $2n$ פעולות כפלו n פעולות חיבור.

מתחילים עם x ושומרים אותו. לאחר מכן מבצעים $S = Sx$. עבור חישוב x_n יש n פעולות כפל ועבור הכפל של $a_i \cdot x^{n-i}$ יש עד n פעולות כפל.

אפשר להציג את הפולינום בצורה קצרה יותר שתדרוש פחות פעולות כפל :

$$P_n(x) = (\dots(((a_0 \cdot x + a_1) \cdot x + a_2) \cdot x + \dots) \cdot x + a_n) \quad \text{Horner Scheme}$$

$$b_0 = a_0$$

$$b_0 = a_0$$

$$b_1 = b_0 \cdot x + a_1 \quad b_n = P_n(\zeta)$$

$$b_1 = b_0 \zeta + a_1$$

$$b_i = b_{i-1} \cdot x + a_i$$

$$b_i = b_{i-1} \zeta + a_i$$

כאן מקבלים בסה"כ n פעולות כפל.

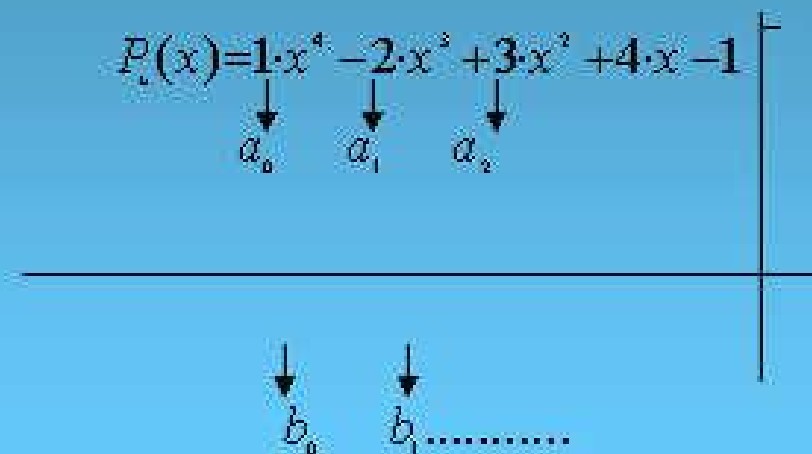
אלגוריתם זה עדיף, כי יש פחות כפל.

כמו כן מקבלים ישר מקדמים של רב-איבר והם $Q_{n-1}(x)$

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - \zeta) + b_n$$

$$Q_{n-1}(x) = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

דוגמא: נניח שיש רב-איבר $P_n(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$ בנקודה 2:

$$P_n(x) = \underset{\downarrow a_0}{1} \cdot x^4 - \underset{\downarrow a_1}{2} \cdot x^3 + \underset{\downarrow a_2}{3} \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1$$


2	20	6	0	2
19	10	3	0	1

$\downarrow \quad \downarrow$
 $b_0 \quad b_1 \dots\dots\dots$

דרך החישוב:

$$a_0 = b_0 = 1$$

$$b_1 = b_0 \cdot 2 + a_1 = 1 \cdot 2 + (-2) = 0$$

$$b_2 = b_1 \cdot 2 + a_2 = 0 + 3 = 3$$

נציב ונקבל:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = (x^3 + 3x + 10) \cdot (x - 2) + 19 = 19$$

נציב $x = 2$

$$P_n(2) = 19$$

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - \zeta) + b_n \quad Q_{n-1}(x) = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-1} > 0$$

אם ניקח $b_i \geq 0$, השורשים של $P_n(x) = 0$ אינם נמצאים מעל ζ :



דוגמה 17: נניח שמכפלים שני פולינומים: $(b_0 \cdot x^{n-1} + b_{i-1} \cdot x^i + b_i \cdot x^{i+1} + \dots) \cdot (x - \zeta)$
רוצים לדעת מה המקדם של x^{n-1} .

$$(b_i - b_{i-1} \cdot \zeta) \cdot x^{n-i}$$

$$a_i = b_i - b_{i-1} \cdot \zeta$$

$$\Rightarrow b_i = b_{i-1} \cdot \zeta + a_i$$

כדי לקבל את x^{n-i} :

נכפיל את $b_{i-1} \cdot x^{n-i}$ ב- ζ או שנכפיל את $b_i \cdot x^{n-i-1}$ ב- x .

דוגמה 17: נרצה לחלק שני פולינומים: $P_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ / $(x - 1)$

נבדוק עבור $\zeta = 1$

מצאנו ש- $P_2(1) = 0$ זה 1 הוא שורש

הפולינום מתחלק ב- $(x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & \\ \hline & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ b_3 = 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P_2(1) = 0 \quad P_2(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 1)$$

דוגמה 17: נתונה פונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$

ולכן נשתמש באלגוריתם הורנר

נרצה למצוא את ערכה בנקודה $x = 3$

פעמיים: עבור המונה ועבור המכנה.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 - 5x + 6 & x^2 - x - 2 \\
 \hline
 3 & 3 \quad 6 \quad 3 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \quad 6 \quad 3 \\
 \hline
 4 \quad 2 \quad 1 \quad 2: \quad 0 \quad 2 \quad 1
 \end{array}$$

$\Rightarrow f(3) = \frac{0}{4} = 0$
אפשר לחלק ב-2

שיטת הורנר דורשת את המספר הפעולות הקטן ביותר.

הגדרה: פונקציה היא אנליטית $\Leftrightarrow$ קיימת כל הנגזרת שלה בסביבת נקודה x_0 כלשהי והן חסומות

$$f(x) \in A(x_0) \Leftrightarrow f^{(n)}(x) \quad , \quad x \in U_{x_0}$$

משפט טיילור: תהי $f(x)$ אנליטית, ניתן למצוא את הערך בנקודה x בצורה הבאה:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$e^x \rightarrow 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

$$e^x \rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ e+e\cdot(x-1)+\frac{e\cdot(x-1)^2}{2!}+\dots+\frac{e\cdot(x-1)^n}{n!}+\dots \end{cases}$$

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(f, x, x_0)$$

משפט לגרנג'י:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(f, x, x_0)$$

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

דוגמה: ניקח 3 איברים ראשונים של טור מקלורן: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}$ $0 < x < 0.1$

מה תהיה השגיאה אם במקום בפונקציה נשתמש ברב-איבר?

$$\Delta_x = \left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq \frac{e^0}{3!} \cdot x^3 \leq \frac{e^{0.1}}{6} (0.1^3)$$

פתרון:

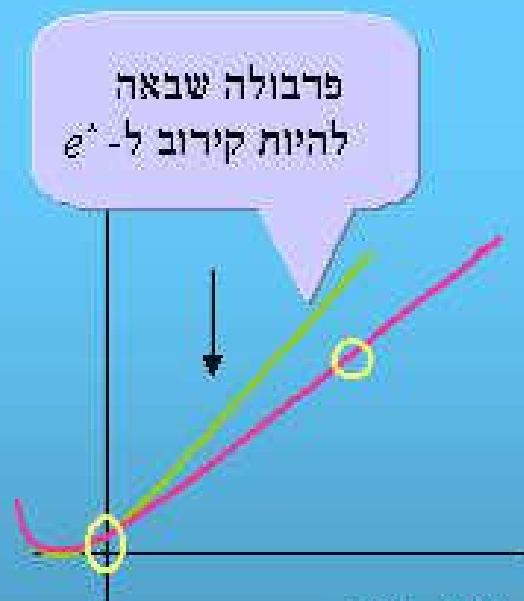
$$\Delta_{e^x} = \frac{f^{(3)}(\Theta)}{3!} \cdot x^3 \leq \frac{e^{0.1}}{6} \cdot (0.1)^3$$

אם הדיוק לא מספיק, ניקח עוד איבר בטור.

דוגמא: לאלו ערכי הפרמטר n השארית מקיימת: $|R_n(f, x, x_0)| < \varepsilon$, נניח $\varepsilon = 10^{-5}$.

פתרון: נשתמש במשפט לגרנו' ונבדוק איזה n מתאים.

אם ניקח $n=5$ זה יהיה נכון. אם נניח $0.9 < x < 1.1$, יהיה יותר מדויק להשתמש בטור מקלורן (בסביבת 0 נוח יותר להשתמש בטור מקלורן).



*התחומים: $0 < x < 0.1$ ו- $0.9 < x < 1.1$.

מהי הנוסחה הטובה ביותר לחישוב e^x בשני התחומים?

פתרון:

$$e^x \begin{cases} 1. & 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \dots \\ 2. & e + e \cdot (x-1) + \frac{e \cdot (x-1)^2}{2} \end{cases}$$

עבור התחום $0.9 < x < 1.1$ נשתמש בנוסחה 2, כיוון השארית היא $\frac{(x-1)^2}{3!}$ והיא מאד קטנה.

אלגוריתם Euclid לחילוק שני פולינומים

נניח שיש שני רב-איברים:

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$h_m(x) = q_m(x) = b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \dots + b_m, \quad m \leq n$$

כיצד נחלק שני פולינומים זה בזה?

נחלק את P_n ב- h_0 . נקבל פולינום $S(x)$ ושארית $h_1(x)$.

ברור שבכל שלב הרמת של h_1 תהיה ב-1 פחות לפחות מאשר ברמה הקודמת.

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$h_0(x) = b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \dots + b_m$$

$$h_1(x) \Rightarrow p_n(x) = s_1(x) \cdot h_0(x) - h_1(x)$$

$$h_2(x) \Rightarrow h_0(x) = s_2(x) \cdot h_1(x) - h_2(x)$$

$\vdots$

$$h_i(x) = s_{i+2}(x) \cdot h_{i+1}(x) - h_{i+2}(x)$$

$$h_{k+1}(x) = ?$$

$$h_k(x) = 0$$

קיבלנו גורם משותף.

$$\frac{P_n(x)}{h_{i+1}(x)} = \frac{q_n(x)}{h_{i+1}(x)}$$

אפשר לחלק את P_n ב- q_n באיבר משותף בלי שארית:

$$P_4(x) = x^4 - 1$$

$$q_1(x) = x^2 - 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 1 & x^2 - 1 \\ x^4 - x^2 & x^2 + 1 \\ \hline & x^2 - 1 \end{array}$$

$$h_0 = x^2 - 1$$

$$h_1 = 0$$

גורם משותף

17:28:28

$$P_4(x) = x^4 - 1$$

$$q_1(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 1 & x^2 - 4x + 3 \\ x^4 - 4x^3 + 3x^2 & x^2 + 4x + 13 \\ \hline 4x^3 - 3x^2 - 1 & \\ -4x^3 + 16x^2 + 12x & \\ \hline 13x^2 - 12x - 1 & \\ -13x^2 + 52x + 39 & \\ \hline 40x - 40 & \end{array}$$

$$h_0 = x^2 - 4x + 3$$

$$h_1 = -40x + 40$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 3 & -x + 1 \\ x^2 - x & -x + 3 \\ \hline -3x + 3 & \end{array}$$

ולכן השארית היא 0.

$$-x + 1$$

: יש איבר משותף

$$h_2 = 0$$

אם בין $h_{i-2}(x)$ ו- $h_{i-1}(x)$ יש גורם משותף, אותו גורם משותף יש גם באיבר הקודם ב- $h_i(x)$,
 ואם עולים שורה רואים שאם קיים פולינום שמחלק את $h_i(x)$, אזי הוא מחלק גם את $h_{i+1}(x)$ וכך
 הלאה, עד למעלה. לכן השארית היא 0 כאשר יש גורם משותף.

שורשים של משוואה אלגברית: $P_n(x)=0$

הגדרה:

* נניח את סידרה המספרית: $C_0, C_1, \dots, C_n$

נאמר שבין C_i ו- C_{i+1} יש שינוי סימן אם הכפל ביניהם נותן מספר שלילי.

אין שינוי סימן אם הכפל ביניהם נותן מספר חיובי.

* סכום סך הכל שינויי הסימן בסדרה נתונה מסומן ב- N .

דוגמה:

$$1, -3, 2, -5, 6, 0, 1 \Rightarrow N=4$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \uparrow & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & \end{array}$$

לא מתחשבים

סדרת Sturm

הגדרה: סדרת Sturm - עונה על השאלה: כמה סה"כ שורשים של המשוואה האלגברית יש בקטע

$$[a, b] \quad \begin{array}{c} | \quad \text{---} \quad | \\ a \quad \quad \quad b \end{array}$$

$N(a, b)$: כמות השורשים הממשיים של המשוואה $P_n(x)=0$ כאשר $x \in [a, b]$

דרך הביצוע: נפעל את האלגוריתם של Euclid כאשר :

$$h_0(x) = P_n(x), h_1(x) = P'_n(x), \dots, h_{k-1}(x) = \text{const}$$

אם מקבלים קבוע, זהו תנאי שאין שורשים

כפולים בקטע $[a, b]$, כלומר אין שורשים שהם משותפים לשני הפולינומים.

במקרה שיש שורשים כפולים, אפשר לחלק את $P_n(x)$ בכל האיברים שנקבל ואז נקבל רב-איבר ללא שורשים כפולים. אם בסוף מקבלים רב-איבר ולא קבוע, וזה אומר שיש מכנה וגורם משותף לכל האיברים הקודמים, ואז $(x - x_0)$ הוא שורש וגם $(x - x_0)^2$ ומעלה הם שורשים.

$$P_n = a_0 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots$$

אם $x_0 = x_1$ נקבל ריבוי 2 של השורש $(x - x_0)$.

משפט Sturm

בהינתן $P_n(x) = 0$, אם אין שורשים עם ריבוי 2 או יותר, אזי כמות השורשים הממשיים שנמצאים בקטע $[a, b]$ הוא: $M[a, b] = M[a] - N[b]$

דוגמה:

$$C_0 = x^4 - 4x + 1 = 0 \quad \text{נחון הפולינום:}$$

כמה והיכן נמצאים השורשים של הפולינום?

$$C_1 = P'_n(x) = 4x^3 - 4 \quad \text{פתרון: נבנה סדרת שטורם:}$$

תמיד אפשר לחלק את איברי הסדרה במספר חיובי ממשי. נחלק ב- $x^3 - 1$

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 4x + 1 : x^3 - 1 \\
 \underline{x^4 - x} \\
 -3x + 1
 \end{array}$$

$$C_1 = x^4 - 4 \cdot x + 1$$

$$C_2 = 3 \cdot x - 1$$

$$C_3 = 1$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 1 : 3x - 1 \\
 \underline{x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^2} \\
 \frac{1}{3} \cdot x^2 - 1 \\
 \phantom{\frac{1}{3} \cdot} \underline{\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{9} \cdot x} \\
 \phantom{\frac{1}{3} \cdot} \phantom{\frac{1}{3} \cdot} \frac{1}{9} \cdot x - 1 \\
 \phantom{\frac{1}{3} \cdot} \phantom{\frac{1}{3} \cdot} \underline{\frac{1}{9} \cdot x - \frac{1}{27}} \\
 \phantom{\frac{1}{3} \cdot} \phantom{\frac{1}{3} \cdot} \phantom{\frac{1}{9} \cdot} -\frac{26}{27} \Rightarrow C_4 = 1
 \end{array}$$

	$-\infty$	0	1	2	∞
$C_0 = x^4 - 4 \cdot x + 1$	+	+	-	+	+
$C_1 =$	-	-	0	+	+
$C_2 =$	-	-	+	+	+
$C_3 =$	+	+	+	+	+
$N =$	2	2	1	0	

ההפרש הוא 0 - אין שורשים שלילים.

בין 0 ל-1 יש שורש אחד

ההפרש הוא 1
בין 1 ו-2 יש
שורש אחד

קיבלנו 2 שורשים ממשיים חיוביים, למרות שבמשוואה בחזקה 4 יש 4 שורשים. לכן המסקנה היא שישנם 2 שורשים מרוכבים.

$$C_{i-1} = S \cdot C_i - C_{i+1}$$

	$a - \varepsilon$	a	$a + \varepsilon$
C_{i-1}	+	+	-
C_i	$\pm$	0	$\pm$
C_{i+1}	-	-	-

$$h_{i-1}(x) = S_i(x)h_i(x) - h_{i+1}(x)$$

אם באיזושהי נקודה a מתקיים $C_i = 0$

אזי הסימנים של C_{i-1} ו- C_{i+1} חייבים להיות

שונים. האיבר האחרון חמיד קבוע ששונה מ-0 כי אין שורשים כפולים, ולכן לא ייתכן שהסימן יהיה זהה.

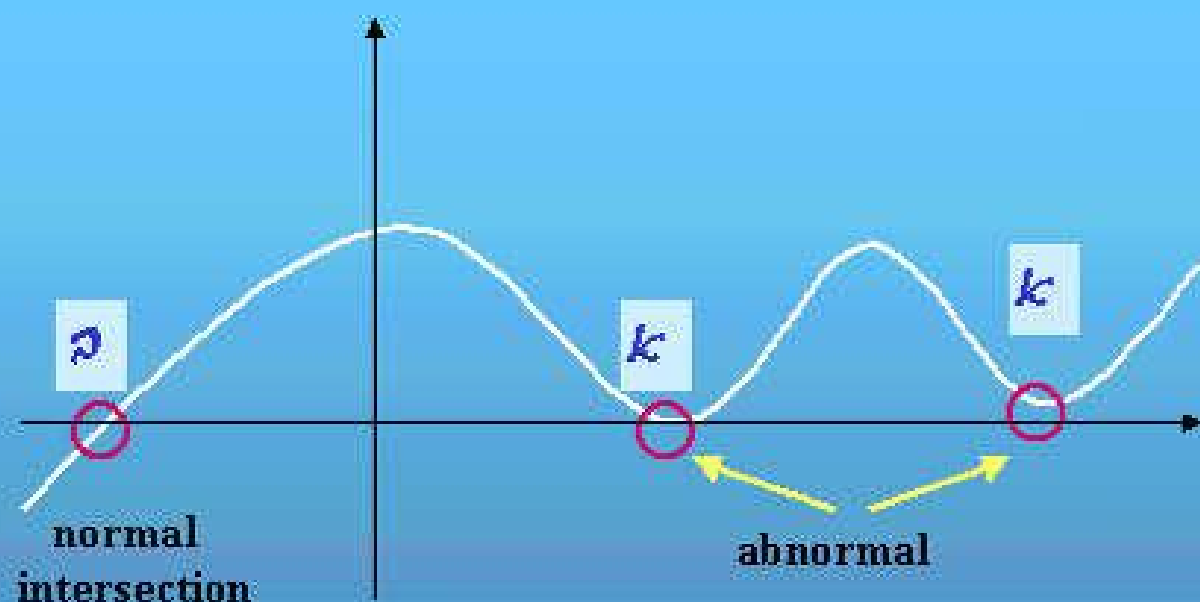
זאת מכיוון שלוקחים ε קטן : אם a - הפונקציה חיובית, היא תהיה חיובית גם בסביבה $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. אם $C_i = 0$ או $C_{i+1} = 0$ וברור שהסימנים מנוגדים.

אם הפונקציה יורדת, אזי הנגזרת היא שלילית:

	$a - \varepsilon$	a	$a + \varepsilon$
C_i	+	0	-
C_{i+1}	-	-	-



פתרון המשוואות $f(x) = 0$



$$f(x) \sim 0 \quad a$$

$$f(x) = 0 \quad b$$

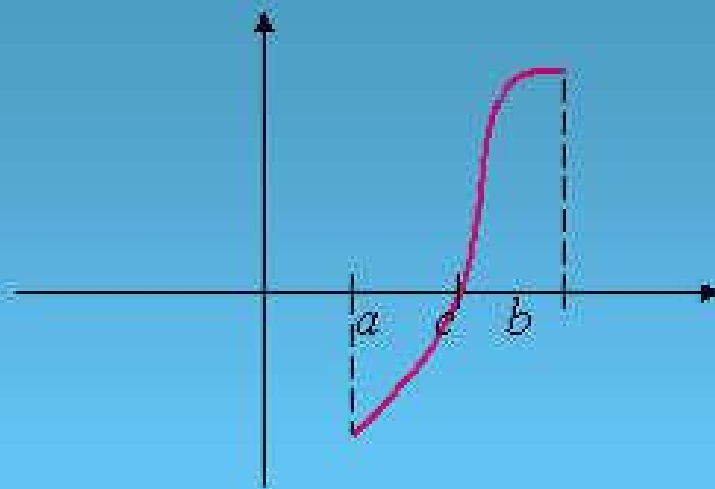
אלגוריתם 1 : שיטת החצייה

א. $f(a) \cdot f(b) < 0$ כלומר הסימנים שונים.

ב.
$$c = \frac{a+b}{2}$$

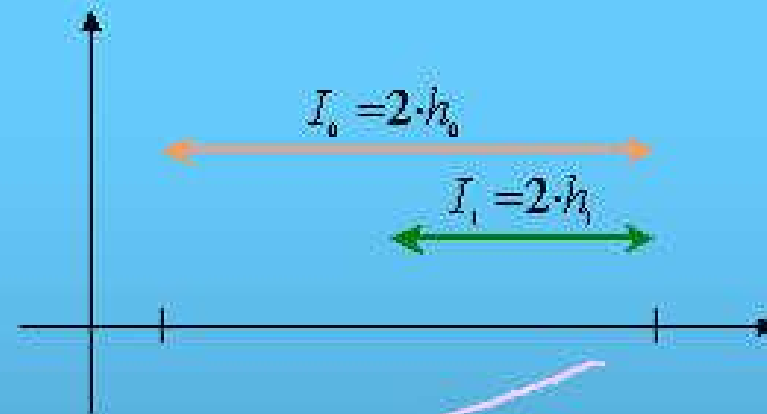
if $(f(c) \cdot f(a) < 0) \Rightarrow b := c$

else $a := c$



בכל פעם נחלק את הקטע ל-2 ואם הסימן מתחלף - אזי הפונקציה מתאפסת בקטע. כך נחלק ונמשיך.
אם הפונקציה רציפה בסוף התהליך, נקבל ש- c יהיה שווה לאחד השורשים.

מתי נעצור את האלגוריתם? ✓



$$h_i = \frac{1}{2} \cdot h_0 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \cdot h_{i-1}$$

$$h_i = \frac{1}{2^i} \cdot h_0$$

אם אנו נמצאים במצב כזה:

לא נחלק קטע ל-2, כי אז נרחק מהשורש, ולכן יש לבדוק $|f(c)| < \epsilon$

השגיאה באלגוריתם הזה הולכת וקטנה. בכל פעם השגיאה בחישובים קטנה פי 2.

אלגוריתם 2 : ניוטון-רפסון , שיטת המשיק

הנחות: א. הפונקציה רציפה וכן הנגזרת הראשונה שלה רציפה ב- $f \in C^1[a,b]:[a,b]$.

ב. x_0 נתון . קירוב לשורש המשוואה.

ג. $f'(x_0) \neq 0$

מ- x_0 מעביר משיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x_0, f'(x_0))$.

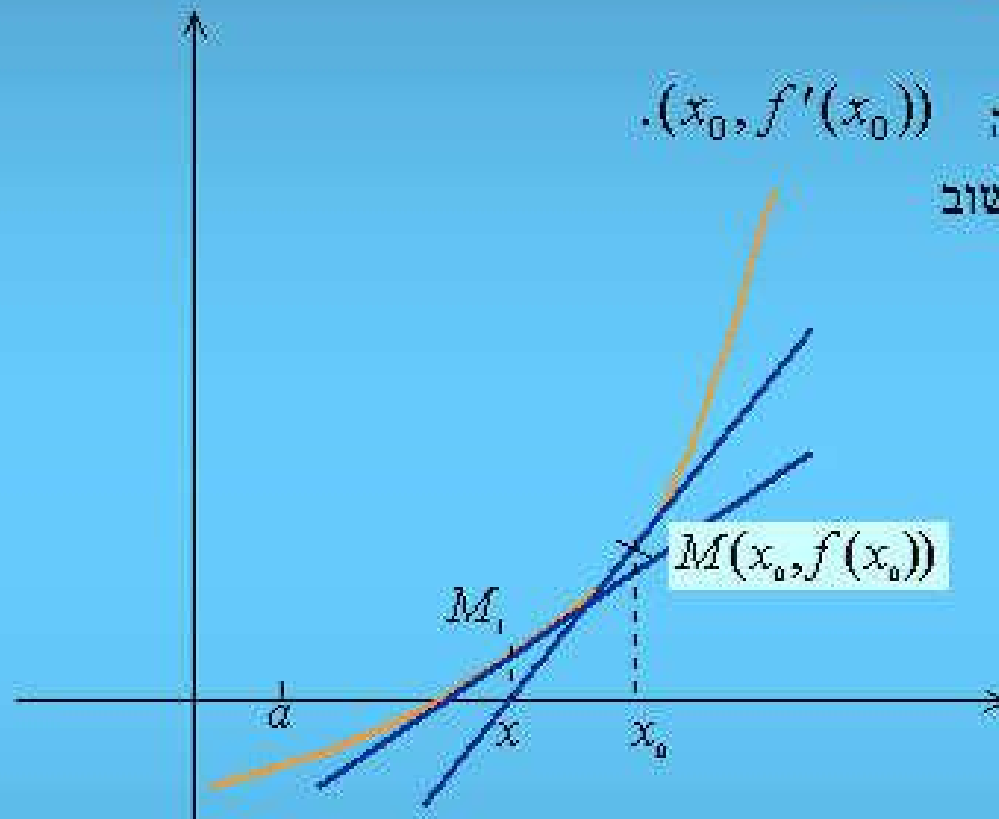
בנקודה שבה המשיק נוגע בציר x ונחזור שוב על התהליך.

משוואת המשיק העובר דרך M ו- x_1

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow -y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



$$x_0 \text{ נתון, } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

דוגמה: נתונה משוואה: $x^3 - 2x - 5 = 0$

נבנה לה את האלגוריתם $N - R$:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 2}$$

ברוב המקרים אפשר לבחור x_0 לפי Sturm.

אם נציב $f(2) = -1$ 

$f(3) > 0$, ולכן יש שורש בין 2 ו-3, ונבחר $x_0 = 2$ או $x_0 = 3$

האלגוריתם מתנהג בצורת ספירלית.

משפט על השיטה Newton-Raphson יהיה נתון: x_0 $f'(x_0) \neq 0$

$$J_1 = [x_1 - |h_0|, x_1 + |h_0|] \Leftarrow x_1 = x_0 + h_0 \quad h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{נבדיר :}$$

$$|f''(x)| \leq M$$

$$\text{אם מתקיים} \quad \left| \frac{M \cdot f(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad , \quad \text{אזי } x_n \rightarrow x' \text{ ומתקיים } f(x')=0$$

דוגמה 17: נבדוק האם הסדרה שמצאנו בדוגמה הקודמת מתכנסת:

$$x_0 = 2 \quad f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(2) = 10 \neq 0$$

$$x_1 = 2.1 \Leftarrow h_0 = -\frac{f(2)}{f'(2)} = -\frac{1}{10} = 0.1$$

$$[2, 2.2]: J_1 \quad \text{בנה את הקטע}$$

$$(x \in [2, 2.2]) \quad f'(x) = |6x| \leq 12$$

$$\frac{12 \cdot (-1)}{100} = 0.12 < 0.5 \Rightarrow$$

הסדרה מתכנסת

הוכחה: נוכיח את המשפט באינדוקציה.

$$|f'(x_1)| = |f'(x_0) + f'(x_1) - f'(x_0)| \geq |f'(x_0)| - |f'(x_1) - f'(x_0)| \geq |f'(x_0)| - M \underbrace{|x_1 - x_0|}_{h_0} =$$
$$|a+b| \geq |a| - |b| \quad f''(\xi) \cdot (x_1 - x_0)$$

$$= |f'(x_0)| - \left| \frac{M \cdot f(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| \cdot |f'(x_0)| \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) |f'(x_0)|$$

לפי ההנחה של
המשפט זה קטן או
שווה ל-0.5

$$\text{לכן סה"כ קיבלנו: } |f'(x_1)| \geq \frac{1}{2} \cdot |f'(x_0)|$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) f''(x) dx = f(x_1)$$

$$|f(x_1)| \leq \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) \cdot |f''(x)| dx \leq M \cdot \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) dx = M \cdot \left. \frac{(x_1 - x)^2}{2} \right|_{x_0}^{x_1}$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow |f(x_1)| \leq \frac{M \cdot h_0^2}{2}$$

$$|k_1| = \left| -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \leq \frac{M \cdot h_0^2}{2} \cdot \frac{2}{f'(x_0)} = \frac{M \cdot f(x_0)}{(f'(x_0))^2} \cdot |k_0| \leq \frac{1}{2} \cdot |k_0|$$

$$h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_1 = x_0 + h_0$$

$$\Rightarrow |f''(x)| \leq M$$

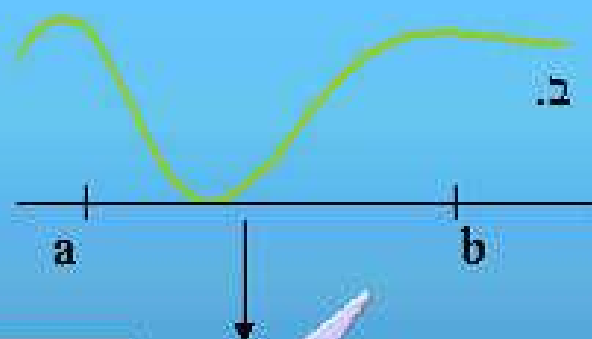
כיוון שהחסם
הולך וקטן

$$\frac{M \cdot f(x_1)}{(f'(x_1))^2} \leq \frac{M \cdot f(x_0)}{(f'(x_0))^2} \quad \text{ולכן מקבלים:}$$

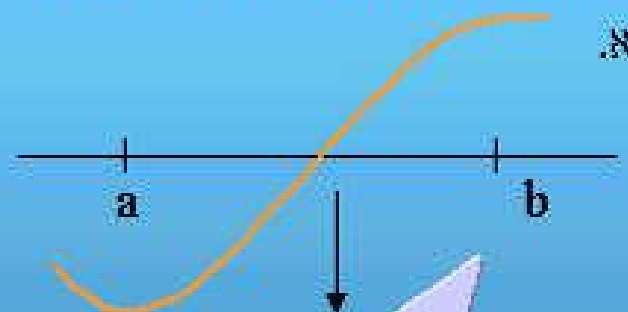
רואים שהסדרה מתכנסת, ולכן המשפט נכון.



נניח שתי צורות כלליות של פונקציה:



אי-אפשר להשתמש בשיטת החצייה
וגם לא בשיטה השני כיוון
שהחיתוך כאן הוא אבנורמלי.
דרך הפונקציה כאן הוא תמיד חיובי.



אפשר להשתמש בשלושת
השיטות

פרק 3. חישובים בעזרת המחשב - ניתוח אלגוריתמים

ניתן לחלק את החישובים במחשב ל- 2 קבוצות:

1. שיטות ישירות - נוסחאות

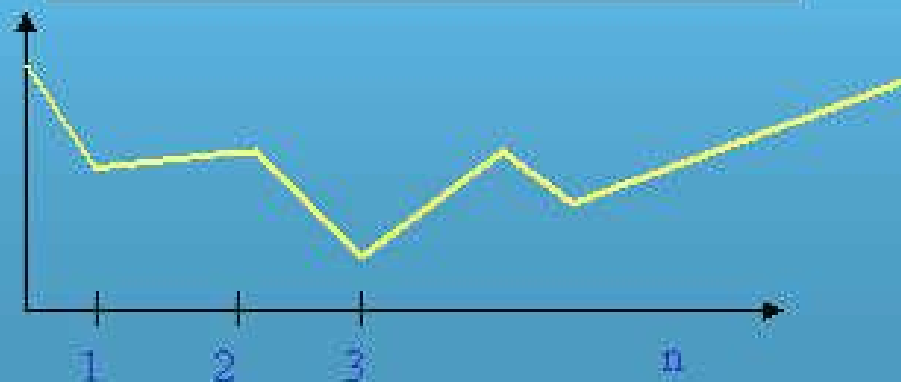
מה שחשוב כאן זה כמות הפעולות. יש לנסות להקטין את הכמות הפעולות.
יש להיזהר מנקודות אי רציפות וקטעים בהם הנגזרת גבוהה.

2. אלגוריתמים איטרטיביים - נוסחאות רקורסיביות

____ מתחילים מ x_0 נתון ועל פיו ממשיכים לשלבים הבאים. בכל שלב מסתמכים על האיברים הקודמים הידועים.

א. איטרציות פשוטות - נתון x_0 .

אפשר לתאר איטרציות פשוטות בגרף.
תמונה דינמית של האיטרציה:



$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

התכנסות אלגוריתמים

ישנו מספר אפשרויות להתנהגות אלגוריתם:

- ❖ ייתכן שאחרי כמה איטרציות התוצאה תשאף לאינסוף, ומכוון שהמחשב מגביל - לא נוכל להמשיך.
- ❖ ייתכן מצב בו ההתנהגות תהיה מחזורית.
- ❖ ייתכן שהגרף יתכנס לאיזושהו ערך.
- ❖ ייתכן שההתנהגות היא כאוטית - chaos, ואין שום חוקיות.



במקרה המצוייר כאן אחרי 2 איטרציות חוזרים לאותו ערך. זהו אלגוריתם מחזורי מסדר 2.



הגדרה : לאלגוריתם $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ יש מחזור מסדר k אם $x_{n+k} = x_n$ לכל $n=N, N+1, \dots$.

$$k=1 \Rightarrow x_{n+1} = 1 - x_n$$

הגדרה : נקודת שבת אם $x_{n+1} = x_n$ לכל $n=N, N+1, \dots$

הגדרה : קומפוזיציה של פונקציה: $x' = \varphi(x)$

$$\varphi^{om} = \varphi(\varphi(\varphi \dots \varphi(x)) \dots)$$

$$x = \underbrace{\varphi(\varphi(\varphi \dots \varphi(x)) \dots)}_R \Rightarrow x = \varphi^{ok}(x)$$

אם יש מחזור מסדר 2 כל פתרונות של המשוואה הם מהצורה $\varphi(\varphi(x))$.

✓ אם יש לפונקציה התכנסות, ההתכנסות רק לאחת מנקודות השבת של הפונקציה, לא לנקודות אחרות.
לא יכולה להיות התכנסות לנקודה שאינה נקודת שבת.

✓ בחקירת אלגוריתם יש קודם כל למצוא נקודת שבת.

✓ לא יודעים מראש אם האלגוריתם מתכנס, אך אם יתכנס - הוא יתכנס לנקודת שבת.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \text{נתון האלגוריתם:}$$

הנוסחה שמחזירה את כל הנקודות השבת של האלגוריתם:

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

↓

$$x = a \quad x = -a$$

האלגוריתם הנ"ל יכול להתכנס לערכים הבאים בלבד:

17.2.7: נקודות השבת של אלגוריתם N+R:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

מקבלים אלגוריתם מתכנס לנקודות בהן הפונקציה מתאפסת והנגזרת הראשונה אינה מתאפסת.
 אם יש שורש פשוט - ברור ש- $f'(x) \neq 0$ שונה מ-0.
 אם יש שורש בריבוי יותר מ-1, אזי אפשר לצמצם.

תרגיל: יש להוכיח שלאלגוריתם Heron אין מחזורים מסדר 2.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left[x + \frac{a}{x} \right]$$

$$\varphi^{\circ 2}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[x + \frac{a}{x} \right] + \frac{a}{\frac{1}{2} \left[x + \frac{a}{x} \right]} \right] = g(x)$$

נראה שלמשוואה $x = g(x)$ אין פתרון, למעט נקודות השבת.
אכן הפתרונות של המשוואה $x = g(x)$ הם רק נקודות השבת $x = \pm \sqrt{a}$.

דוגמה:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

נקודות שבת של אלגוריתם זה: $x^2 + a = 0$

קיבלנו כי אין נקודות שבת ממשיות. המסקנה היא שהאלגוריתם לא מתכנס.

לדוגמה: לאלגוריתם יכולות להיות נקודות שבת ולא להתכנס, למשל: $x_{n+1} = x_n^2$
 נקודות השבת הן: $x=0$, $x=1$

אם $|x_0| < 1$ האלגוריתם מתכנס ל-0.

אם $|x_0| > 1$ האלגוריתם מתבדר.

אם $|x_0| = 1$ אחרי האיטרציה הראשונה הוא יהיה שווה ל-1. מתכנס ל-1.

מיון של נקודות שבת

✓ יש נקודות שבת יציבות ויש נקודות שבת לא יציבות.

לדוגמה:

בדוגמה הקודמת עבור נקודת שבת $x_0 = 0$, אם היינו לוקחים $x_0 = 1 + \varepsilon$ עדיין היינו מתכנסים, אך אם ניקח את $x_0 = 1$, זו נקודת שבת יציבה, ואילו עבור $x_0 = \varepsilon$ כבר אין התכנסות אלא התבדרות.

הגדרה: נקודת שבת היא יציבה אם קיים $\varepsilon > 0$ רק בשלכל x_0 יש התכנסות:

$$x_n \rightarrow x^* \quad |x_0 - x^*| < \varepsilon$$

אם זה לא מתקיים אזי הנקודה היא נקודת שבת בלתי יציבה.

אפשר לדעת על נקודות שבת אם הן יציבות או לא:

מיון נקודות שבת: נתון האלגוריתם נידוע שיש לו נקודת שבת.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \begin{array}{l} \text{נניח:} \\ \text{נבדיר:} \end{array} \quad \begin{array}{l} x^* = \varphi(x^*) \\ m = \varphi'(x^*) \end{array}$$

אם	$ m < 1$	אזי - x^*	- attractive	יציבה
אם	$m = 0$	אזי - x^*	- super attractive	יציבה בקצב מהיר
אם	$ m = 1$	אזי - x^*	- indifferent	לא ידוע
אם	$ m > 1$	אזי - x^*	- repellent	לא יציבה

דוגמה: נתון האלגוריתם $x_{n+1} = x_n^2$

נחונות נקודות השבת: $x^* = 1$, $x^* = 0$
 נבדוק אותן:

$$x^* = 0 \Rightarrow 2x|_{x=0} = 0 \Rightarrow \text{superattractive}$$

$$x^* = 1 \Rightarrow 2x|_{x=1} = 2 \Rightarrow \text{repellent}$$

תרגיל: באלגוריתם $x_{n+1} = x_n^2$ נציב $x_0 = 1/2$

קואים שההתכנסות היא מאד מהירה: $x_n = 2^{-2^n}$

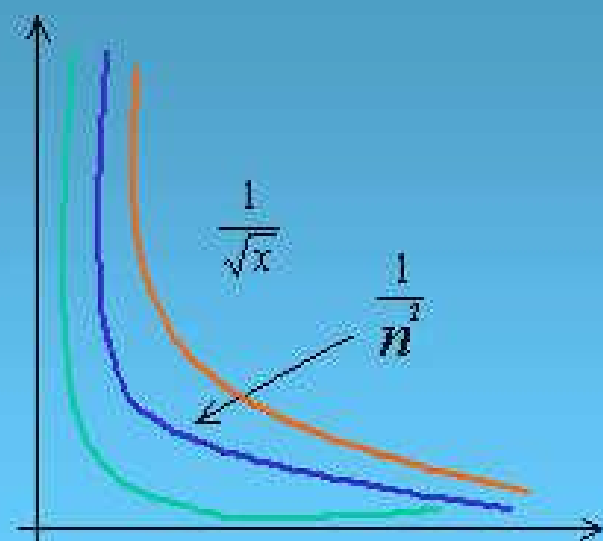
נראה זאת באינדוקציה:

$$x_n = 2^{-2^n}$$

$$x_{n+1} = 2^{-2^{n+1}} = 2^{-2^{n+1}}$$

דוגמה: נבדוק את הנקודות השבת של אלגוריתם Heron :

$$x^2 = a \longleftarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(x + \frac{a}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right) \bigg|_{x=\sqrt{a}} = 0 \Rightarrow \text{superattractive}$$



ההתכנסות ל-0
הולכת ונעשית יותר
ויותר מהירה

הערה: נתייחס לנקודת שבת: $x^* = 0$

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$x_n = \frac{1}{2^n}$$

$$x_n = \frac{1}{n!}$$

$$x_n = \frac{1}{2^{2^n}}$$

נבדוק איך אפשר למדוד האם ההתכנסות היא מהירה יותר או איטית יותר.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

מהירות של התכנסות האלגוריתם

$$x^* = \varphi(x^*)$$

נק' שבת: x^*

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \quad \text{מתקיים:}$$

לפי משפט ערך ממוצע

$$\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)| \leq |\varphi'(\theta_n)| |x_n - x^*| = M \times \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_{n+1} \leq M_n \times \varepsilon_n < M_n \times M_{n+1} \times \varepsilon_{n+1} < \dots < M_n \times M_{n-1} \times M_{n-2} \dots M_1 \times \varepsilon_0 \leq q_n \times \varepsilon_0$$

אם $M_n < 1$, לכל ערכי n
ערכי הנגזרת קטנים מ-1

נגזרת ראשונה חסומה

$$M_n = |f'(\Theta_n)| \leq q < 1$$

$$\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - x^*|$$

$$\varepsilon_n = |x_n - x^*|$$

אלגוריתם מסוג (r, M) הוא אלגוריתם עבורו אפשר להוכיח ש

$$\exists N, \forall n \geq N : \varepsilon_{n+1} \leq M \varepsilon_n^r$$

ואומרים ש**סדר ההתכנסות** שלו הוא r ו**קצב ההתכנסות** הוא M .

להתכנסות אלגוריתם צריך להתקיים: $r > 1$ ואם $r = 1$ אזי $M < 1$.

$$(1,1) \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq M \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$(1,1) \quad x_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\left(1, \frac{1}{2}\right) \quad x_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$$

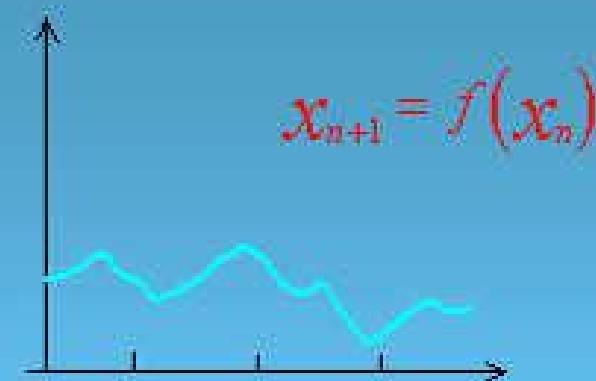
התכנסות ליניארית
 $r = 1$

$$(2,1) \quad x_n = \frac{1}{2^{2n}} \Rightarrow \frac{1}{2^{2n+1}} \leq 1 \times \left[\frac{1}{2^{2n}} \right]^2$$

$$x_n = \frac{1}{n!}$$

התכנסות לא ליניארית
בה $r > 1$, התכנסות
יותר מהירה

נקודה שבת יציבה	-א
נקודות לא יציבות	-ב
נק' שבת עם מחזור מסדר $k > 1$	-א
Chaos (מסדר k אינסופי)	-ב
נקי התבדרות	-ג

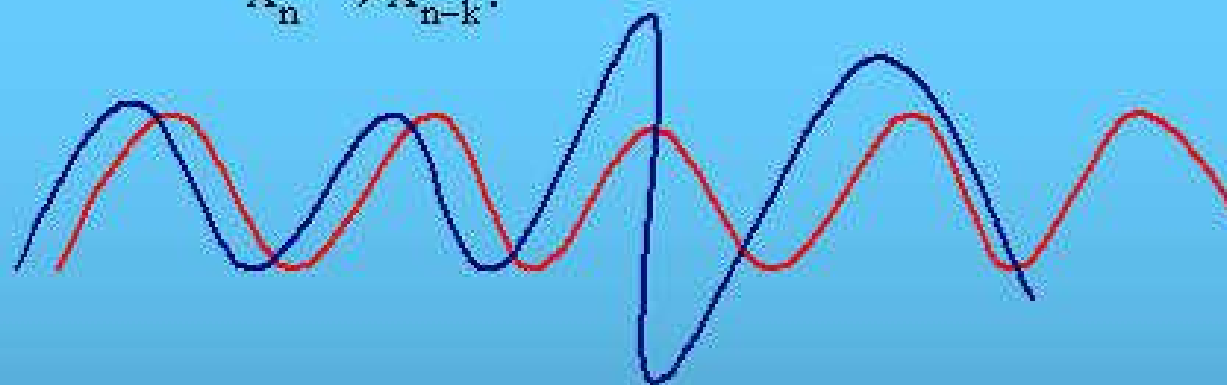


$$k\text{-cycle} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \Leftrightarrow x_{n+k} = x_n$$

$$x_{n+k} \rightarrow x_n,$$

$$x_{n+k-1} \rightarrow x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$x_n \rightarrow x_{n-k}.$$



לדוגמה: נתון מחזור מסדר 2:

- המחזור המסומן ב- מתכנס למחזור מסדר 2, ולכן זה מחזור יציב.
המחזור המסומן ב- רק בהתחלה מתנהג כמחזור מסדר 2, ואחר כך משתנה, ולכן זהו מחזור לא יציב.

$$x_{n+k} = f^{\circ k}(x_{n+k-1}) = f[f(\dots f(x_n) \dots)] \quad \text{דוגמה של מחזור:}$$

כדי לדעת אם יש מחזור, מבצעים k איטרציות ובודקים האם נקי' השבת היא יציבה. אם יש שני אלגוריתמים שמתכנסים לאותו הערך, נרצה לבחור את האלגוריתם שמתכנס בקצב יותר מהיר.

$$y_{n+1} = f^{\circ k}(y_n) \quad \text{נקודות שבת של} \quad y^* = \{x^{1*}, \dots, x^{k*}\} \quad \text{הגדרה:}$$

$$\varepsilon_{n+1}^m \leq M_m (\varepsilon_n^m)^{P_m}, m = 1, \dots, k \quad \varepsilon_n^k = |x_{n+k} - x^{k*}|, \dots, \varepsilon_n^2 = |x_{n+2} - x^{2*}| \quad \varepsilon_n^1 = |x_{n+1} - x^{1*}|$$

אם $M_m \geq M, P_m \geq P, m = 1, 2, \dots, k$ אזי P = סדר התכנסות **order of convergence**
 אם M = קצב התכנסות **rate of convergence**

ונאמר שהאלגוריתם הוא מחזורי יציב מסוג (P, M)

$$x_n = \begin{cases} 1 + 2^{-n}, & \text{if } n \text{ is even,} \\ 3^{-n^2}, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \quad \text{דוגמה:}$$

הוא אלגוריתם שמתקנם למחזור $\{0, 1\}$ כליניארי מסוג $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

איך נדע מאיזה סוג האלגוריתם הפתרון?

נניח שהפונקציה רציפה וכמה מנגזרותיה רציפות.

$$x^* = f(x^*)$$

לפי משפט ערך
ממוצע

$$\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| =$$

$$= \varepsilon_{n+1} = \left| \cancel{f(x^*)} (x_n - x^*) + \frac{f^{(2)}(x^*)}{2} (x_n - x^*)^2 + \frac{f^{(3)}(x^*)}{6} (x_n - x^*)^3 + 0 \times (x_n - x^*)^4 \right|$$

$$\varepsilon_{n+1} \leq \left| \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!} \times \varepsilon_n^k + 0(\varepsilon_n^2) \right| \leq \left| \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!} \right| \times \varepsilon_n^k$$

כאשר $\varepsilon_{n+1} \leq M \times \varepsilon_n^p$ אפשר לקבל את אי-השוויון $f'(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, f^{(k)}(x^*) \neq 0$.

נמצא סדר וקצב התכנסות:

$$|x_{n+1} - 0| \leq M \times |x_n - 0|^p$$

$$|x_{n+1}| \leq M \times |x_n|^p$$

$$|x_n|^p \leq M \times |x_n|^p$$

$$M = 1, P = 2 \Rightarrow (2,1)$$

דוגמה: נתון האלגוריתם: $x_{n+1} \Rightarrow x_n^2$

ישנה נק' שבת: $x_n \Rightarrow x^*$

$$x_{n+1} \Rightarrow x^*$$

נמצא נקודות שבת:

$$\begin{array}{c} x = x^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x^* = 0 \quad x^* = 1 \end{array}$$

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2$$

$$x^* = 0: |x_{n+1} - 0| \leq \frac{2}{2!} \times |x_n - 0|^2 \Rightarrow (2,1) \Rightarrow M = 1, P = 2$$

$$x^* = 1: f'(x) = 2 > 1 \Rightarrow \text{אין התכנסות} \Rightarrow M=2, P=1$$

דוגמה: נתון האלגוריתם:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 + 1}{8x_n^2} + \frac{x_n}{2x_n^2 + 1}$$

$$x = \frac{2x^2 + 1}{8x} + \frac{x}{2x^2 + 1}, x \neq 0$$

$$8x^2 = 2x^2 + 1 + \frac{8x^2 + 4 - 4}{2x^2 + 1}$$

$$4y - 4 = y + \frac{4y - 4}{y}$$

ונקבל:

$$y = 2x^2 + 1 \quad \text{נציב}$$

$$3y^2 - 4y = 4y - 4 \quad 4 \times (2x^2 + 1) - 4 = 8x^2$$

$$3y^2 - 8y + 4 = 0$$

נמצא את השורשים:

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} \begin{matrix} \rightarrow \frac{2}{3} \\ \rightarrow 2 \end{matrix}$$

$$y = \frac{2}{3} : \quad \frac{2}{3} = 2x^2 + 1 \Rightarrow 2x^2 = -\frac{1}{3}$$

$$y = 2 : \quad 2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^* = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= \left| x_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \left| \left(\frac{2x_n^2 + 1}{8x_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x_n}{2x_n^2 + 1} \right) - \left(\frac{2}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \right| = \\ &= \left(\sqrt{\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2 = \left(\frac{2}{8} - 2\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right) = \left(\sqrt{\frac{2x_n^2 + 1}{8x_n}} - \sqrt{\frac{x_n}{2x_n^2 + 1}} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{2x_n^2 + 1 - \sqrt{8}x_n}{8x_n(2x_n^2 + 1)} \right)^2 = \frac{(\sqrt{2}x_n - 1)^4}{8x_n(2x_n^2 + 1)} = \frac{4\left(x_n - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}{8x_n(2x_n^2 + 1)} = \frac{\varepsilon_n^4}{2x_n(2x_n^2 + 1)} \end{aligned}$$



$$P = 4$$

$$2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \times \frac{1}{2} + 1 \right) \Rightarrow \frac{1}{2 \times \sqrt{2}} \Rightarrow \left(4, \frac{1}{2 \times \sqrt{2}} \right) \quad \text{אם } x_n \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{אזי נמצא את } M :$$

סדר ההתכנסות גבוה מאוד ולכן
מספיק לכתוב ש- $M < 1$

דרך נוספת: ניתן לגזור 3 פעמים בנקודה $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ושלוש הנגזרות האלה צריכות להיות שוות ל-0.
הנגזרת הראשונה ששונה מ-0 היא 4.

$$f(x) = \frac{2x^2}{8x} + \frac{x}{2x^2 + 1}$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$f^{(3)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

דוגמה 17: נתון הפולינום: $x^3 + ax + b = 0$

נמצא את שורשי המשוואה באמצעות N-R, $x_0 = 0$

לאילו ערכי a ו- b יש לאלגוריתם N-R מחזור מסדר 2.

נניח שכבר בנינו את אלגוריתם N-R לפתרון המשוואה הנ"ל:
 $x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$$\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + \frac{1}{\sqrt{2}}}{3x_n^2 - 1} \quad \longrightarrow \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{3x_n^2 - 1}$$

לכן התנהגות האלגוריתם תהיה מחזור מסדר 2.

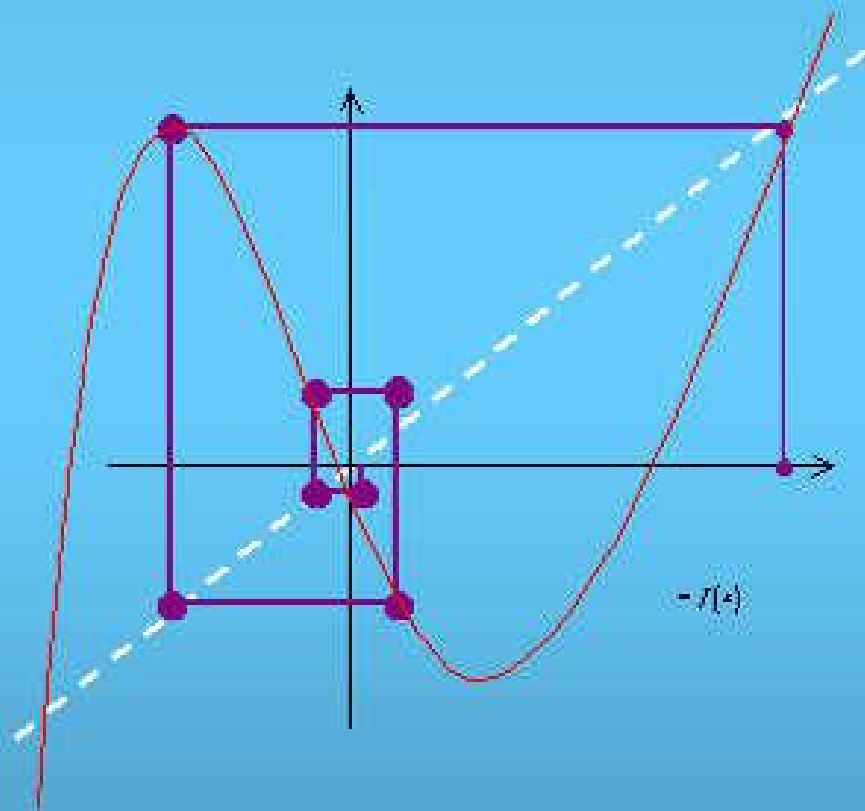
$$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad x_2 = 0$$

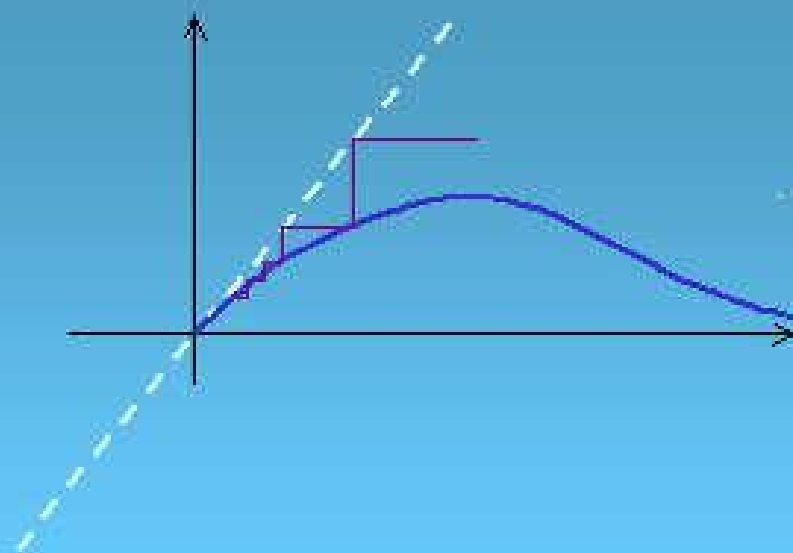
$$\downarrow \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

אלגוריתם Analyzer

בעזרת אלגוריתם Analyzer ניתן לחקור האלגוריתמים. מעבירים קו מקביל לציר ה- x שחותך את הקו היכן ש- $x=y$. מעבירים קו מקביל לציר ה- y שחותך את הקו היכן ש- $x=-y$.

אם מתחילים איטרציות בנקודה מסוימת ואחרי מספר איטרציות מתקרבים לנקודת השבת, אזי האלגוריתם מתכנס, ונקודות השבת הן יציבות.





התהליך האיטרטיבי מתכנס:

$$x_n \rightarrow x^* = 0, \quad x_{n+1} = \sin(x)$$

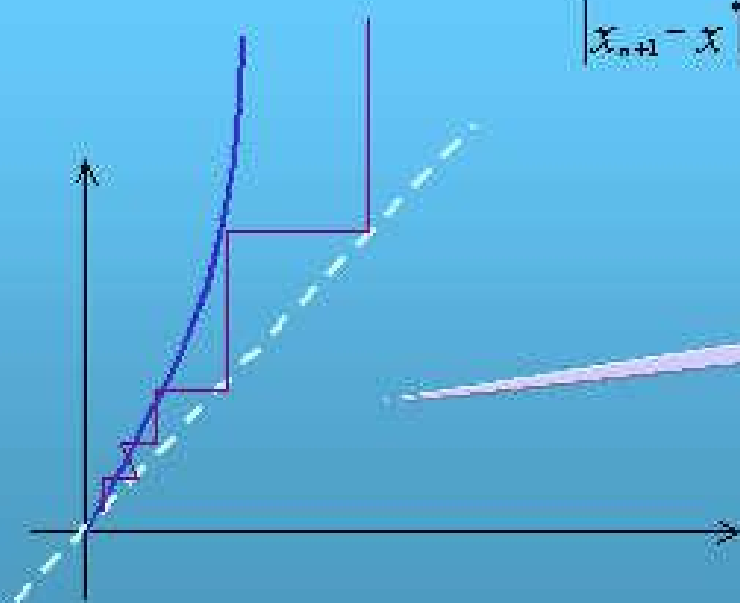
17.2.7:

$$f'(x) = \cos(x) \Big|_{x=0}, \quad f'(0) = 1$$

הנגזרת הראשונה שנה מאפס לכן זה אלגוריתם לינארי וההתכנסות שלו אם כן לא תהיה מהירה.

$$\text{אם } |f'(x)| < 1 \text{ אזי הפונקציות הללו מתכנסות } |x_{n+1} - x| \leq f'(\theta)(x_n - x)$$

$\sin(x)$ זה אלגוריתם שתמיד מתכנס.



האלגוריתם הנ"ל מתבדר:

חוקרת אלגוריתמים ופתרונות המשוואות קשורים זה בזה. ❤️

אלגוריתם N-R:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

נקודות שבת:

$$f(x^*) = 0 \quad x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

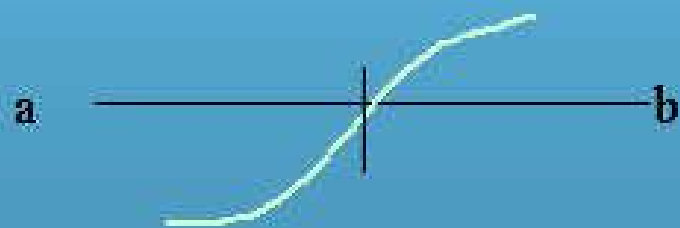
$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad F'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

אם הנגזרת הראשונה היא פחות מ $\frac{1}{2}$, אזי יש התכנסות תמיד $\left| \frac{M \times f(x)}{f'(x)^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

$$M = \sup f''(x) \quad F'(x) = \frac{f(x^*)f'(x^*)}{(f'(x^*))^2}$$

לכן סדר ההתכנסות של R-N היא לפחות 2, כי כל פתרונות הפונקציה F הן נקודות השבת.

אלגוריתם החצייה:

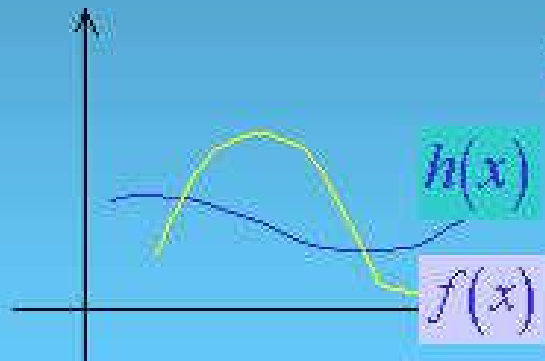


$$M = \frac{1}{2}, \quad P = 1, \quad \mathcal{E}_{n+1} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_n^P$$

פרק 4. תורת הקירובים

1

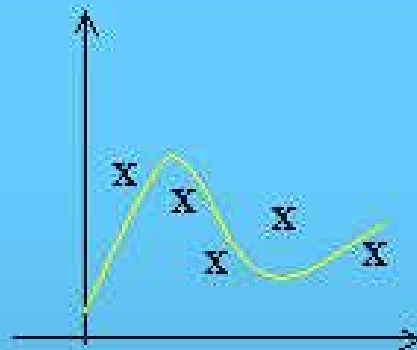
איך אפשר לדעת אם שתי הפונקציות נקראות קרובות זו לזו?



2

יש כאן 2 אובייקטים.

האם הם נקראים קרובים אחד לשני?



3

נחון: $Df = f'(x)$

$$Df = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

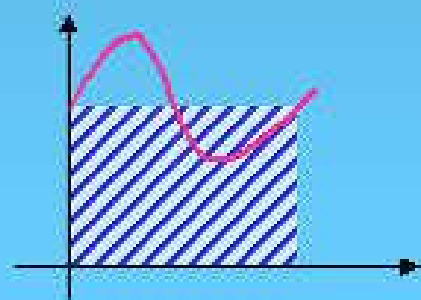
האם שני ביטויים אלו נקראים קרובים זה לזה?

$$\int_0^h f(x) dx \quad \text{נחון}$$

האם אפשר לומר שהאינטגרל קרוב לאחד מהקירובים הבאים:

$$1. \text{ טרפז} - \frac{f(h) + f(0)}{2} h$$

$$2. \text{ Simpson} - \frac{f(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h)}{6} h$$



$$\Delta^0 = f(x)$$

הגדרה: הפרשים סופיים של $f(x)$

$$\Delta_h = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta_h^m = \Delta_h(\Delta_h^{n+1})$$

$$\Delta_h^2 = [f(x+h+h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

הגדרה: הפרשים מחולקים של הפונקציה $f(x)$: **divided differences**

$$\delta_h f(x) = \frac{\Delta_h f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\delta_k^m = \delta(\delta_k^{m-1})$$

הגדרה: נחונות הנוסחאות:

$$D f = f'(x)$$

$$D_h f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$D_f, D_k f$ הם אופרטורים הפועלים על פונקציה נתונה.

לאופרטורים $L \sim L_h$ יש דרגת דיוק אלגברית k אם לכל פולינום $P_k(x) = a_0 x^k + \dots + a_1 x + a_0$ מתקיים:

$$L P_k(x) = L_h P_k(x)$$

	$D'f$	$\delta_h f$
1	0	0
x	1	$\frac{x+h-x}{h} = 1$
x^2	$2x$	$\neq 2x+h$

$$D_f = f'(x)$$

לדוגמה: נבחר

$$\delta_h f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ולכן יש דרגת דיוק 1 ולא דרגת דיוק 2, כי אז זה כבר לא שווה.

$$\delta_h^* f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{נגדיר:}$$

עתה נקבל:

	$D'f$	$\delta_h f$	$\delta_h^* f$
1	0	0	0
x	1	1	1
x^2	$2x$	$2x+h$	$\frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{2h} = 2x$



$$\frac{f(0)+4f\left(\frac{h}{2}\right)+f(h)}{6}h \quad \text{סימפסון}$$

$$\frac{f(0)+f(h)}{2}h \quad \text{טרפז : טרפז}$$

$$\int_0^h f(x)dx \quad \text{אינטגרל:}$$

	$\int f$	טרפז	Simpson
1	h	h	h
x	$\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^2}{2}$

מהי הנוסחה שעבורה דרגת הדיוק של הטרפז ושל Simpson היא מקסימלית?

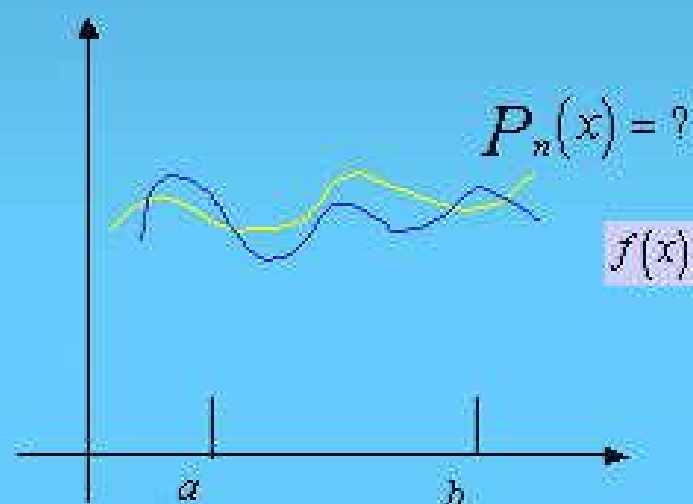
❖ מטריצה היא גם אופרטור ליניארי. אנו מודדים הפרשים בין שני אופרטורים לא בגלל הערכים שלהם, אלא יש שיטות וכלים אחרים.

קירובים פולינומיאליים

נתונה פונקציה בתוך הקטע (a,b) .

❖ מהו רב האיבר שחזקתו לא יותר מ- n נתון כך שרב איבר זה יהיה קרוב לפונקציה הנתונה?

❖ כיצד נבחר רב איבר זה?



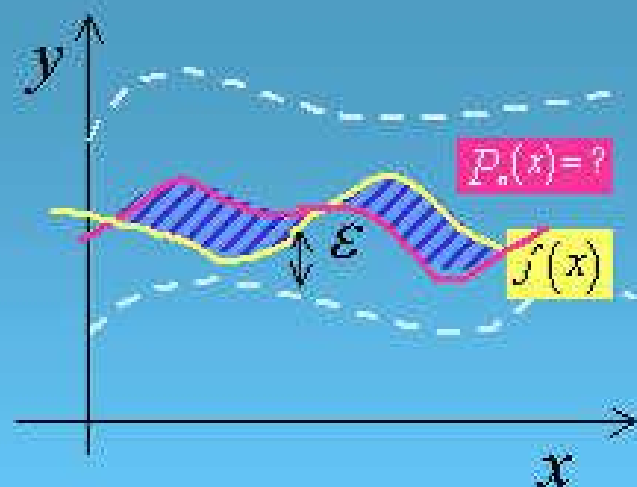
$$\rho(f, P_n) = \|f(x) - P_n(x)\| < \varepsilon$$

מרחק בין שני אובייקטים, קירוב C :

$$\|f - P_n\|_C \stackrel{\text{def}}{=} \max |f(x) - P_n(x)|, \quad a \leq x \leq b$$

אפשר, מצד שני, להתייחס לשטחים קירוב L_1 :

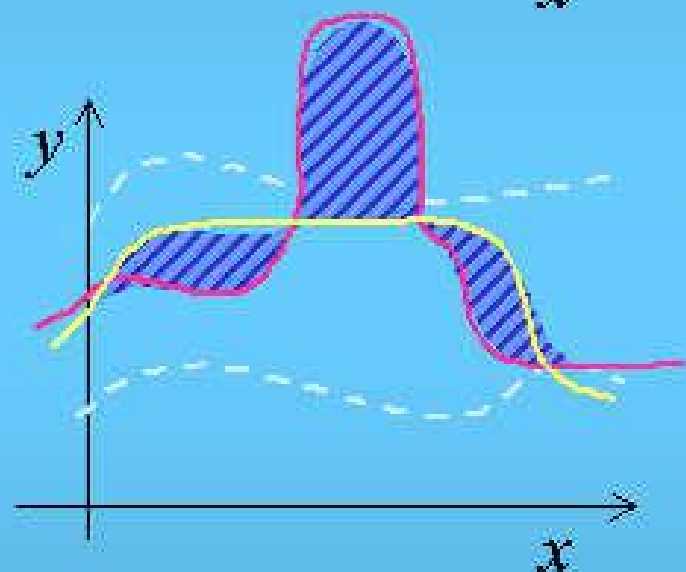
$$\|f - P_n\|_{L_1(a,b)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$



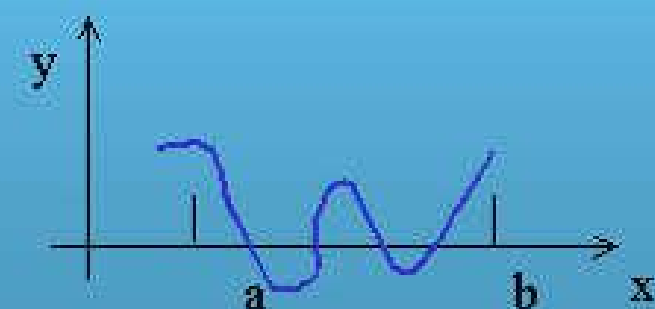
נגדיר את השטח הבא:

$$S = \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$

אם בכל הקטע (a, b) הפולינום נכנס בתוך רצועה שרוחבה ϵ , אזי זהו קירוב לפונקציה f בערחוב נורמלי.



כאן יכול להיות קירוב ϵ לפי הנוסחה השניה, כי שטחו של ההפרש בין שתי הפונקציות קטן מ- ϵ . מבחינת הנוסחה הראשונה, אין כאן קירוב.



דוגמה: רב איבר שקרוב מאוד לציר ה-x ל-0:

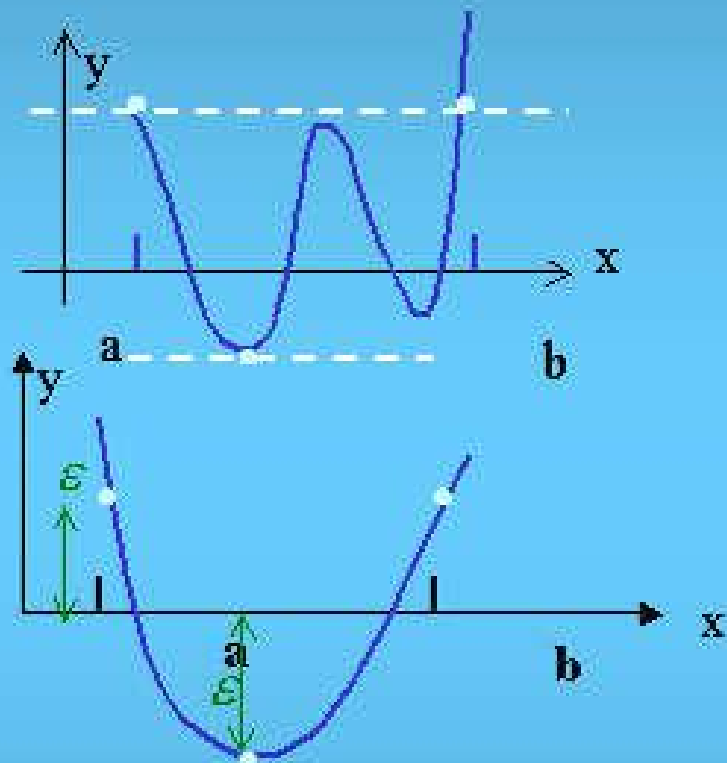
בנייה של Chebyshev alternance :

$$P_n(x_i) = P_n(x_{i+1}) = \epsilon \quad \epsilon = \max |P_n(x)|$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1 \quad a \leq x \leq b$$

מחפשים את נק' המינימום והמקסימום של הפולינום
בקטע $[a, b]$.

אנו רוצים שהפרשים הללו מציר ה- x יהיו $|\varepsilon|$.



לדוגמה: ניקח פרבולה:

יש כאן רק 3 נקודות בקטע $[a, b]$
שיכולות להיות מקסימום בקטע זה:

$$x^2 + Ax + B$$

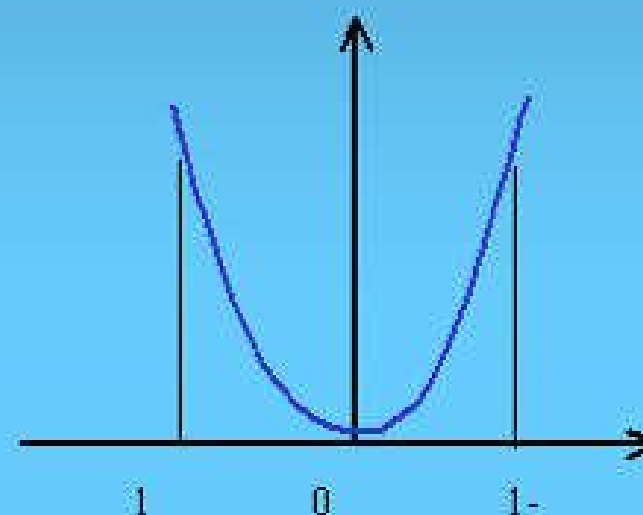
$$f' = 2x + A = 0 \Rightarrow x = -\frac{A}{2}$$

$$\begin{cases} a^2 + Aa + B = \varepsilon \\ \left(-\frac{A}{2}\right)^2 + A\left(-\frac{A}{2}\right) + B = -\varepsilon \\ b^2 + Ab + B = \varepsilon \end{cases}$$

פותרים את המשוואות
ומקבלים ε, A, B

נמצא את המקדמים B ו- A כדי להוכיח שזו הפרבולה המינימלית הקרובה ל- $s=0$, ואין קרובה ממנה.

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^2 + Ax + B| \rightarrow \min$$

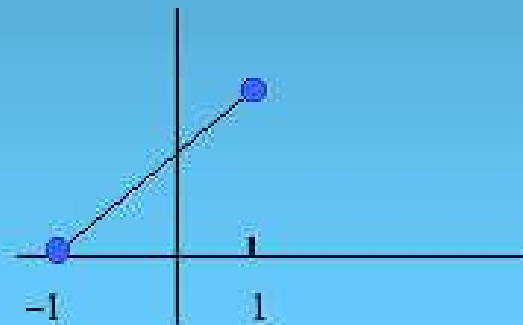


במקרה של פרבולה יש רק אפשרות אחת, כי יש רק 3 נקודות של מקסימום/מינימום בקטע. מקבלים 3 נעלמים כנ"ל, פותרים ומקבלים את $P_2(x)$.

לפולינום $P_n(x)$ כללי יש $n-1$ נקודות קיצון ו-2 נקודות בקצוות, סה"כ $n+1$ נקודות מינימום/מקסימום בקטע סגור.

דוגמה 17: נתונה פונקציה $x + a$ בתוך קטע $[-1, 1]$.

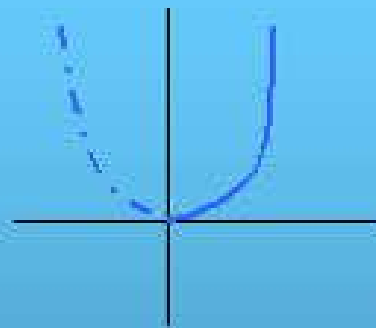
מרחק מינימום בין פונקציה זו לבין ציר ה- x הוא 1 (אם נביל את a להיות שלם).



$$\begin{cases} -1 + a = \varepsilon \\ 1 + a = \varepsilon \\ 2a = 0 \end{cases}$$

דוגמה 17: מהי הפרבולה הכי קרובה לציר ה- x ?

$$x^2 + ax + b$$

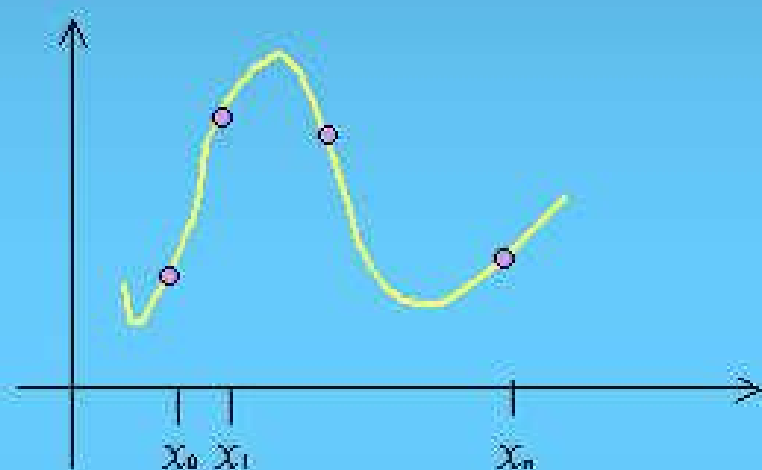


$$\begin{cases} (1) & 1 - a + b = -\varepsilon \\ (2) & \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} + b = -\varepsilon \\ (3) & 1 + a + b = \varepsilon \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b = \varepsilon \\ 1 + b = \varepsilon \\ 1 + 2b = 0 \end{cases}$$

המרחק המינימלי בין הפרבולה לציר ה- x הוא $-\frac{1}{2}$.

פולינום אינטרפולטיבי

רוב איבר שעובר דרך נקודות נתונות $P_n(x) = ?$



$$M_0(x_0, y_0) \dots M_n(x_n, y_n)$$

$$P_n(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

נניח שיש שני פולינומים אלה:

$$Q_n(x_i) = y_i$$

$$P_n(x_i) = y_i$$

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

המעלה של ההפרש ביניהם היא n או פחות.

בנקודת x_i הפולינום שווה ל-0, לכן יש לו $n+1$ שורשים, ולכן $R_n(x)$ שהוא פולינום ממעלה n עם $n+1$ שורשים, תמיד 0. מכאן שיש רק רוב איבר אחד כזה.

$$R_n = P_n - Q_n(x)$$

$$R_n = 0$$

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \dots + y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} + \dots$$

$$+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

הפולינום של Lagrange נותן פתרון לבעיה, והוכחנו קודם שהפתרון הוא יחיד.

x	0	1	2	3
y	0	0	2	12

דוגמה: נתונות הנקודות הבאות:

מהו רב האיבר ממעלה 3 העובר דרך נקודות אלה?

נסתמך על הפרשים סופיים.

הגדרה: $P_n(x)$ הוא פולינום אינטרפולציה בנקודות $x_0, x_1, \dots, x_n$ אם $P_n(x_i) = y_i$ לכל $i = 0, 1, \dots, n$ נתונות, לא נתונה הפונקציה ולכן אי-אפשר לשנות את נק' האינטרפולציה, כשלפי ההגדרה ה-2 אפשר.

הגדרה 2: $P_n(x)$ הוא פולינום אינטרפולציה בנקודות $x_0, x_1, \dots, x_n$ לפונקציה $f(x)$ אם $P_n(x_i) = f(x_i)$ לכל $i = 0, 1, \dots, n$

משפט Lagrange: הפולינום הנ"ל הוא יחיד

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} f(x_i)$$

דוגמה: נמצא $L_1(x) \sim e^x$ בנקודות $x_0=0$ $x_1=1$ $y_0=1$ $y_1=e$

$$L_1(x) = 1 \frac{(x-1)}{(0-1)} + e \frac{(x-0)}{(1-0)} = -x + 1 + ex = 1 + (e-1)x$$

כמובן שככל שיהיו יותר נקודות אינטרפולציה, הקירוב נהנה יותר טוב.

האלגוריתם של Lagrange דורש $O(2n^2)$ פעולות, וזה חיסרון.

נניח שאנו מקבלים את נקודות האינטרפולציה על ציר זמן.

עד שאנו לא יודעים מה קורה ב- t_i אי אפשר לדעת

מהו פולינום האינטרפולציה. בנוסף אם רוצים אח"כ

להוסיף נקודה נוספת, יש להתחיל את התהליך מההתחלה!



התקדמות קדימה



$$L_n(x) = N_n^+(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot (x - x_{n-1})$$

$$N_n^-(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot (x - x_1)$$



התקדמות אחורה

$$y_0 = N_n^+(x_0) = a_0$$

$$y_1 = N_n^+(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

אלו הפרשים מחולקים

$$y^0 = N_n^+(x_0) = a_0$$

$$y^0 = N_n^+(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

אלו הפרשים מחולקים

דוגמה:

נתון		הפרשים מחולקים		
x_i	y_i	δ_i	δ_i^2	δ_i^3
-1	0	$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = 0$	$\frac{\delta_0 - \delta_1}{x_0 - x_1} = \frac{0 - 2}{-1 - 1} = 1$	$\frac{1 - 4}{-1 - 2} = 1$
0	0	$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2$	$\frac{\delta_1 - \delta_2}{x_1 - x_2} = \frac{2 - 10}{0 - 2} = 4$	
1	2	$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = 10$		
2	12			

מכאן אי-אפשר להמשיך -
הגענו ל- $n=3$

לכן מקבלים:

$$\left. \begin{aligned} N_3^+(x) &= 0 + 0(x+1) + 1(x+1)x + 1(x+1)x(x-1) = \\ N_3^-(x) &= 12 + 10(x-2) + 4(x-2)(x-1) + 1(x-2)(x-1)x = \end{aligned} \right\} = x(x+1)[1+x-1] = x^2(x+1)$$

עתה יש לבדוק שפולינום האינטרפולציה שקיבלנו מתאים לנקודות הנחונות $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,2)$, וכו'.
הפעולות הדרושות לבניית פולינום ניוטון:

$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$$

אם רוצים להוסיף עוד נקודת אינטרפולציה, מוסיפים עוד n פעולות בלבד.
 המקדם האחרון ב- N^+ וב- N^- זהה.

$$\dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$



$$\dots + b_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)$$

רק לאיבר האחרון יש חזקה x^n .

בגלל זה בסוף מגיעם לאותו מקדם.

נניח שאנו יודעים את כל המקדמים עד האיבר ה- a_n מהנוסחה:

$$N_{n+1}^*(x) + a_n^*(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) = N_{n+1}^*(x) + a_n^*(x-x_n)\dots(x-x_0)$$

איברים משותפים

$$N_{n+1}^*(x) - N_{n+1}^*(x) = a_n^*(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \times [x-x_n - x+x_0]$$

$$a_{n+1}x^{n+1} - b_{n+1}x^{n+1} + \dots = a_n x^{n+1}(x_0 - x_n) + x^{n+2} + \dots$$



מקבלים הפרשים מחולקים

$$a_n = b_n = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{x_0 - x_n}$$

מה דיוק החישובים בקירובים בין פולינום אינטרפולציה ופונקציה? ♥

$$e^x = 1 + (e-1)x \quad x \in (0,1)$$

לדוגמה: קודם מצאנו את הקירוב:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

דיוק החישובים:

השאלה היא מהו R_n ?

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - R_n(S)(x - x_0) \cdots (x - x_n) : S \text{ נבחר קבוע}$$

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - R_n(S)(n+1)! = 0 \quad \text{נזור } (n+1) \text{ פעמיים:}$$

במקרה זה יש לנו רק איבר ממעלה $n+1$ עם

$$F(x) \quad n+1 \quad x=S \quad F(x) \quad n+2 \quad \text{שורשים ולכן הוא שווה ל-0}$$

$$R_n(S) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \right| \quad \text{כך שמחקיים:} \quad \theta(x) \quad \text{לכן נק' x קיימת}$$

$$e^x - 1 - (e-1)x = \frac{e^0}{1!} (x(x-1)) \leq e|x(x-1)|$$

$$\exists \theta \in [0,1]$$

פולינום אינטרפולציה של Hermite

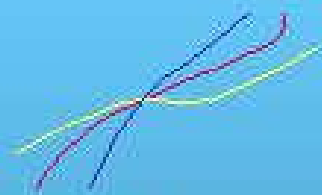
הגדרה: רב איבר שהמעלה שלו היא $2n+1$, מסמנים $H_{2n+1}(x)$, קוראים פולינום אינטרפולציה של Hermite בנקודות אינטרפולציה $x_1, x_0, \dots, x_n$ לפונקציה $f(x)$.

$$H_{2n+1}(x_i) = y_i \quad \text{אם} \quad H'_{2n+1}(x_i) = z_i$$

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \quad \text{אם} \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$$

כלומר: המשיק של הפונקציה שווה למשיק של הרב איבר בנקודות האינטרפולציה (בנוסף לכך שיש שוויון).

$f(x)$



$H_{2n+1}(x)$

ניתן לבנות את רב האיבר של Hermite באמצעות האלגוריתם של ניוטון:

x_i	y_i	y'_i	
1-	0	1	
1-	0	0	1-
0	0	0	0
0	0	2	2
1	2	5	3
1	2	5	3

$$y_i = x^2(x+1)$$

$$y'_i = 3x^2 + 2x$$

מכאן ממשיכים לפי אלגוריתם ניוטון

x_i	y_i	y'_i
1-	0	1
0	0	0
1	2	5

מספר הפעולות: בערך $2n^2$

$$H_{2k+1}^+(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1) + \dots + a_{2k}(x-x_0)^2 \dots (x-x_{k-1})^2 + a_{2k+1}(x-x_0)^2 \dots (x-x_{k-1})(x-x_k) + \dots$$

דוגמה: נתון: $\begin{cases} f(x) - P_n(x) = 0, & x = -20, -19, \dots, -1 \end{cases}$ כלומר: עבור 20 נק' אלו הרב איבר קרוב לפונקציה.

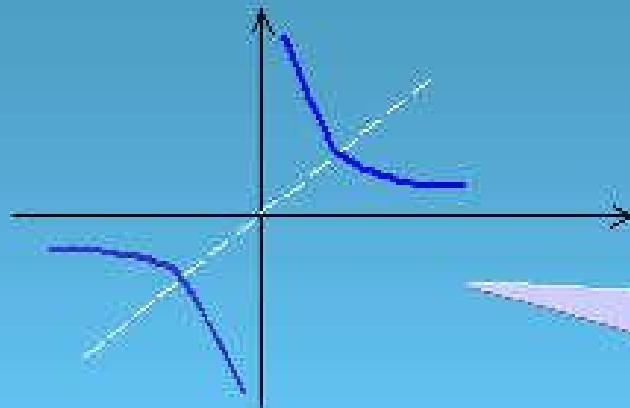
רואים שבנק' 0 הקירוב הוא מאוד רע $|f(0) - P_n(0)| = 20!$, וזאת למרות שהנקודה 0 נמצאת בין 2 נק' אינטרפולציה: $x = 1, x = -1$.

❖ אם חסר לנו ידע, משתמשים בבעיות של אינטרפולציה ולא באלגוריתמים כמו של צ'בישב.

דוגמה: נתונה הפונקציה $\frac{1}{x}$ והנקודות:

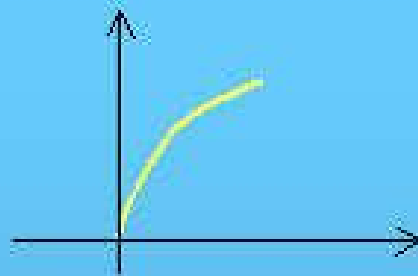
x_i	y_i
1-	1-
1	1

נתון פולינום ועבדוק האם
הפולינום עובר דרך $(-1, -1)$ ו $(1, 1)$.



ברור שאין קירבה, כי חוץ
מ-2 הנקודות הנ"ל אין
שום מפגש בין הפולינום
והפונקציה!

דוגמה: הפונקציה $\sqrt{x}$ אינה גזירה בסביבה $x = 0$.
רואים שנקבל כאן מקדם מאוד גדול ונקבל תוצאה
די חזקה.



$$w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$|f(x) - P_n| \leq \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} w(x)$$

יש להיזהר מנקודות אי רציפות או אלגוריתמים בהם יש נק' של הסתעפות! ❤️

פרק 5. שיטות נומריות האלגברה ליניארית

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Ax=b$$

$$x = ? \Leftarrow \begin{cases} b - \text{וקטור נתון} \\ A - \text{מטריצה נתונה} \end{cases}$$

$$C_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j \quad C=Ab \text{ כאשר}$$

$$\det A \neq 0$$

$$rank(A) = rank(B) \quad \text{זהו תנאי לכך שניתן יהיה לפתור את מערכת המשוואות.}$$

מוסיפים ל- A עוד עמודה, כלומר: ל- A יהיו $n+1$ עמודות $n-1$ שורות.

$\text{rank}(A)$ = כמות מקסימלית של הווקטורים שאינם תלויים לינארית.

דוגמה:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases} \quad x = y = 1$$

המטריצה: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$ רואים שיש תלות לינארית: $2x_1 = x_2$

לכן $\text{rank}(A) = 1$

הגדרה: וקטור ξ הוא וקטור עצמי למטריצה A אם קיים λ - ערך עצמי - כך ש- $A\xi = \lambda\xi$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

המשוואה האופיינית למציאת הערכים העצמיים היא: $\det(A - \lambda I) = 0$
כאשר I היא מטריצת היחידה

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

דוגמה: נמצא את הערכים והוקטורים העצמיים של המטריצה

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1/3 & 2/3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2/3-\lambda) - 2/3 = 0$$

קיבלנו שיש 2 ערכים עצמיים:

$$\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{5}{3}$$

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \dots$$

$$\det(A) = 0 \times \frac{5}{3} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמה: נתונה המטריצה

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = i \quad \lambda = -i \quad \text{הערכים העצמיים:}$$

קיבלנו שיש 2 ערכים עצמיים והם מרוכבים.

$$\text{דוגמה: מהו הוקטור } \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \text{ המקיים: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 0 \quad \text{עבור}$$

$$\lambda = 5/3 \quad \text{עבור}$$

$$A \times \xi = \lambda \times \xi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \xi_1 + 2\xi_2 = \frac{5}{3} \times \xi_1$$

$$\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 = \frac{5}{3}\xi_2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\xi_1 + 2\xi_2$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

למטריצה $n \times n$ יש חמיד n ערכים עצמיים שונים, אבל לא חמיד יש n וקטורים עצמיים שונים.

הנורמה של המטריצה

אפשר להגדיר מכפלה בין מטריצה לוקטורים: $y=Ax$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{נורמה:}$$

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

חמיד:

$$\|A\|_2 = 5/3$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|y\|_2 = \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \times \|x\|_2$$

אם אפשר לפתור את $y = Ax$ אזי $x = A^{-1}y$
 A^{-1} היא מטריצה הפוכה ל- A

אם A^{-1} קיימת, אזי: $A^{-1} \times A = I$

$$A \times A^{-1} = I$$

אם למטריצה A היו ערכים עצמיים

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

אזי למטריצה A^{-1} היו ערכים עצמיים $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$

לכן:

$$\|A^{-1}\|_2 = \max \left\{ \left| \frac{1}{\lambda_1} \right|, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right\}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min |\lambda_i|}$$

$$S(A) = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|}$$

אם הדטרמיננטה של המטריצה היא אפסי, אזי לפחות ערך עצמי אחד הוא אפס, ולכן:

$$S(n) = \frac{\max |\lambda_i|}{0} = \infty$$

הגדרה: אם $S(A) \sim 10^4$ (מספר די גדול) אזי אומרים שלמטריצה A יש תנאי חולה.
אם $\det A = 0$ אזי ברור שלמטריצה יש תנאי חולה.

דוגמה: בדוגמה הקודמת: $S(A) \sim \infty$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 10 \\ 10 & 101-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 102\lambda + 101 - 100 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 51 \pm 51 \sqrt{1 - \frac{1}{51^2}} \sim 51 \pm 51 \left(1 - \frac{1}{2(51)^2} \right)$$

$$\lambda_1 \sim 102 \qquad \lambda_2 \sim \frac{1}{102}$$

$$\Rightarrow S(A) = \frac{102}{\frac{1}{102}} > 10000 \Rightarrow \text{למטריצה יש תנאי חולה}$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

מציאת ערכים עצמיים:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

דוגמה:

נתונה מטריצה:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\Rightarrow S(A) = 3 \quad \text{למטריצה זו אין תנאי חולה.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases}$$

דוגמה:

$$\frac{1}{3} = 0.333..3 \quad \frac{2}{3} = 0.666..7$$

אם המספרים היו לא מחזיקים, יש סיכוי מאוד קטן שהדטרמיננטה של המטריצה שווה לאפס. התנאים שמשתמשים במחמטקה כללית לא מתאימים לפתרון בעיות בעזרת מחשב.

$$x = y = 1 \quad \begin{cases} x + 10y = 11 \\ 10x + 101y = 111 \end{cases}$$

דוגמה:

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 10x + 101y = 111.1 \end{cases}$$

נניח שעשינו שגיאה:

אנחנו מצפים שהתשובה תהיה זהה או קרובה למה שקיבלנו קודם. אך קיבלנו תוצאה רחוקה מאוד, אף על פי שהשגיאה מאוד קטנה.

$$x=0 \quad y=11$$

מספר התנאי

Ill condition - תנאי חולה.

• האם ניתן לדעת מראש שלמטריצה יש תנאי חולה?

$$Ax = b \quad (1)$$

$$\tilde{A}x = b \quad (2)$$

$$Ax' = b' \quad (3)$$

השגיאות נמצאות בתוך המטריצות.

השגיאות נמצאות רק באיבר החופשי, ובמטריצה אין שגיאות:

$$A(x - x') = b - b'$$

$$x - x' = A^{-1}(b - b')$$

מההפרש בין משוואות 1 ו-3 נקבל:

$$\|x - x'\|_2 = \|A^{-1}\|_2 \times \|b - b'\|_2$$

$$\delta_x = \frac{\|x - x'\|}{\|x\|}$$

השגיאה היחסית בחישובים של וקטור:

$$\delta_b = \frac{\|b - b'\|}{\|b\|}$$

אי אפשר לחלק וקטור בוקטור, לכן משתמשים בנורמה.

$$\delta_x = \frac{\|x - x'\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|b - b'\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|_2 \|A\| \frac{\|b - b'\|}{\|b\|}$$



$$b = Ax \Rightarrow \|b\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \Rightarrow \frac{1}{\|x\|_2} \leq \frac{\|A\|_2}{\|b\|_2}$$

$$\delta_x \leq \|A^{-1}\| \times \|A\| \delta_b$$

$$\delta_x \leq S(A) \times \delta_b$$

(Conditional number of matrix A) מספר התנאי - S (A)

אלגוריתמים לפתירת משוואות $Ax=b$ כאשר למטריצה אין תנאי חזקה:

אלגוריתם חילוף של גאוס:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & \dots \\ 1 & 2 & \dots \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

מקבלים אפסים מתחת לאלכסון.

במחשב אי אפשר לחלק ב-0 - נקבל overflow - לכן האלגוריתם של גאוס לא טוב למחשב.

שלב א'

מעבירים את המטריצה למטריצה משולשת עליונה:

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & a_{ii} & a_{i+1,i} & \dots & \dots & a_{m,i} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & & a_{ji} & a_{j+1,i} & \dots & \dots & a_{mi} \end{pmatrix}$$

מקדמים $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \quad (a_{ii} \neq 0)$

$$d'_{jk} = a_{jk} - m_{ji} \times a_{ik} \quad \forall_k = i+1, i+2, \dots, n \quad (\text{פנימי})$$

$$\forall_j = i+1, i+2, \dots, n \quad (\text{חיצוני})$$

שאלות:

❖ מה יקרה אם $a_{ii} = 0$ באיזשהו שלב?

❖ כמה פעולות דרוש לאלגוריתם הנ"ל?

$$j = j+1, \dots, n \quad m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$$

$$k = j+1, \dots, n \quad a'_{jk} = a_{jk} - m_{ji} a_{ik}$$

$$b'_j = b_j - m_{ji} b_i$$

סה"כ פעולות שדורש האלגוריתם הנ"ל:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = O(n^3)$$

פעולות כפל.

שלב ב'

פותרים את מערכת המשוואות בכוון הפוך, וזה דורש n^2 פעולות כפל .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ & a'_{22} & \dots & \dots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

רק השורה הראשונה ב-A נשארת אותו הדבר. יתר השורות משתנות.

מתחילים מהמשוואה האחרונה כי יש רק משתנה אחד x_n ועולים למעלה $a'_{nn} x_n = b'_n$.

אם מקבלים $a'_{ii} \sim 0$ אזי לא משתמשים בחילוק גאוס הרגיל, אלא משתמשים ב-Pivoting ומחליפים שורות. במחשב אפשר לפתור רק בעזרת Pivoting .

Pivoting שלם

לפני שמבצעים את הפעולות, בוחרים מהו המקדם הגדול ביותר (בערך מוחלט) . אם לא נוכל למצוא איבר מקסימלי, אזי למטריצה יש תנאי חולה. אם יש שורה שלמה או עמודה שלמה שכולה אפסים, אזי יש תנאי חולה.

Pivoting חלקי

כאשר מקבלים $a_{ij} = 0$, מחפשים בשורה זו איבר ששונה מאפס ומחליפים רק העמודות. אלגוריתם גאוס מעביר מטריצה לצורה משולשת עליונה.

פתרון מערכת משוואות אלגבריות

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$$

כאשר:

נתונים

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

קל לפתור לאחר שמביאים לצורת מטריצה משולשת (עליונה ותחתונה):

$$x_i = \frac{\sum_{k=i+1}^n U_{ik} x_k}{U_{ii}}, \quad i=n, n-1, \dots, 1$$

$$Ux=b \Rightarrow U_{11}x_1 + U_{12}x_2 + \dots + U_{1n}x_n = b_1$$

$$U_i x_i + \dots + U_{in} x_n = b_i$$

$$U_{in} x_n = b_n$$

מציבים אחורה

אלגוריתם גאוס מעביר מטריצה כללית למטריצה משולשת עליונה. הוא דורש בערך $\frac{n^3}{3}$ פעולות כפל.

$$x_n = \frac{b_n}{U_{nn}}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$$

בכל שלב של חישוב במטריצה המשולשת הנ"ל יש $n-1$ פעולות, לכן סה"כ מקבלים

אלגוריתם מכפלה של מטריצה : $C = A \times B$

$$C_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_k$$

יש n פעולות עבור כל המקדמים $(n^2 =)$ לכן מקבלים n^3 .
על הדיוק משפיעות רק n פעולות כפל כי כדי לקבל את האיבר הבא במטריצה יש n פעולות.
יש לשים לב שלשגיאה לא תמיד יש יחס פרופורציונלי למספר הפעולות.
השגיאה:

$$|C_y - C_y^*| < n\delta$$

n פעמים
שגיאה התחלתית

שיטות נומריות 2

קורס אינטראקטיבי

מבוסס על הקורס 88-376 המועבר ע"י ד"ר קרסנוב

פרק 6.	פירוק (LU and Cholesky).....	2
פרק 7.	חישוב ערכים עצמים.....	9
דוגמה ב MATLAB		10
פרק 8.	אלגוריתם של cubic spline	11
פרק 9.	Least square approximations	14
רגדסיה ליניארית		15
פרק 10.	ריבויים מזעורים רציפים.....	16
פרק 11.	פולינומים אורתוגונליים	18
פרק 12.	אינטגרציה נומרית.....	20

פרק 6 - פירוק מטריצות

	שיטה	פקודת MATLAB	כמות הפעולות	תנאים לשימושיה	הוראות
Square matrix	LU Decomposition	$[L,U,P]=lu(A)$	$n^3/3$	A - מטריצה $n \times n$	$P^*A=L^*U$
	Cholesky	$U=chol(A)$	$n^3/6$	A - מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית	$A = U^T * U$
General cases	Reduced row echelon form	$U=rref(A)$	$n^3/3$		
	QR Decomposition	$[Q,R]=qr(A)$	$n^3/3$		$A=Q^*R$, Q-orthogonal
	Singular Value Decomposition	$[S,D,V]=svd(A)$	$n^3/3$		$A=S^*D^*V$, S,V- unitary D - diagonal
Special cases	Triangular, Tridiagonal		$n^2/2$ $2n$		

פירוק LU

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \leq j, \quad j=1, \dots, N$$
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{ii}} \quad j \leq i, \quad i=2, \dots, n$$

דוגמה:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 9 \\ 6 & -30 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

שיטת Cholesky

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{ki}} \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{ii}} \quad j < i, \quad i = 2, \dots, N$$

דוגמה : (עבור מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.414 & 0 & 0 \\ -0.707 & 1.225 & 0 \\ 0 & -0.817 & 1.155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.414 & -0.707 & 0 \\ 0 & 1.225 & -0.817 \\ 0 & 0 & 1.155 \end{bmatrix}$$

פרוק LU תלת-אלכסונית

$$u_{ii} = a_{ii} - l_{ij}u_{ji}, \quad j = i - 1$$

$$u_{ij} = a_{ij}, \quad j = i + 1$$

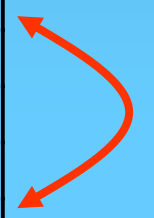
$$l_{ij} = a_{ij}/u_{jj}, \quad j = i - 1$$

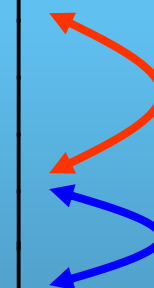
לדוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2667 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2679 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.7333 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3.7321 \end{bmatrix}$$

מטריצה פרמוטציה P

- החלפת שורות: $[1]$ ו $[3]$ ו $[3]$ ל $[4]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$


$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$


פירוק LU עם Pivoting

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1667 & -0.1429 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4286 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 6 & 2.0000 & 2.0000 & 4.0000 \\ 0 & 2.3333 & 2.3333 & 3.6667 \\ 0 & 0 & 2 & 2.8571 \\ 0 & 0 & 0 & 2.4286 \end{bmatrix}$$

MATLAB ב $[L,U,P]=lu(A)$ או $[P][A]=[L][U]$

פירוק QR

$$Q^{-1} = Q^T$$

Q - מטריצה אורתוגונלית

R - משולשת עליונה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad x = A(:,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$g = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3; \quad \alpha = \text{sign}(x_1)g = 3$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{2g(g + |x_1|)} = \sqrt{2(3)(3+1)} = \sqrt{24} \\ w = w^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{24}} [1+3 \quad 2 \quad 2]' = \frac{1}{\sqrt{24}} [4 \quad 2 \quad 2]' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H^{(1)} = I - 2ww' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

פרק 7. חישוב ערכים עצמים

$$Av = \lambda v$$

• עם

אז v הוא הווקטור עצמי שמטים לערך עצמי λ

• המשוואה אופיינית $\det(A - \lambda I) = 0$

ליצור סידרת $A^{(n)}$ לפי אלגוריתם פירוק QR:

```
for I = 1:N,  
    [Q,R] = qr(A); A=R*Q;  
end
```

ואז האיטרציות A שאיפות למטריצה משולשת עליונה עם ערכים עצמים
באלכסון:

MATLAB ב' חוגמה

```
» A=[1 2 -1; 2 2 -1; 2 -1 2]
```

A =

1	2	-1
2	2	-1
2	-1	2

```
» [Q,R]=qr(A)
```

QR פירוק

Q =

-0.3333	-0.5788	-0.7442
-0.6667	-0.4134	0.6202
-0.6667	0.7029	-0.2481

R =

-3.0000	-1.3333	-0.3333
0.0000	-2.6874	2.3980
0.0000	0.0000	-0.3721

```
» N=7;
```

```
for I = 1:N,
```

```
    [Q,R]=qr(A); A=R*Q;
```

```
end
```

A

A =

2.4142	1.8597	-1.3934
-0.0000	3.0000	1.8974
0.0000	-0.0000	-0.4142

```
» [V,D]=eig(A)
```

V =

0.4472	0.4472	-0.5571
0.6325	-0.6325	-0.7428
0.6325	-0.6325	-0.3714

D =

2.4142	0	0
0	-0.4142	0
0	0	3.0000

Cubic Spline Interpolation פרק 8.

יחזקאל:

בכל נקודות $S(x_i)$, $S'(x_i)$, $S''(x_i)$ הן רציפות

[illegible]

$$S_i(x) = a_i + b_i x + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 - \frac{z_i}{6h_i}(x - x_{i+1})^3, \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$

$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ NATURAL SPLINES עבור

Natural Cubic Spline

המערכת משוואות היא תלת אלכסוניות ומקיימת תנאי אלכסון השולט:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} = 6 \begin{Bmatrix} \delta y_1 - \delta y_0 \\ \delta y_2 - \delta y_1 \\ \vdots \\ \delta y_n - \delta y_{n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

עם הפרשים סופיים:

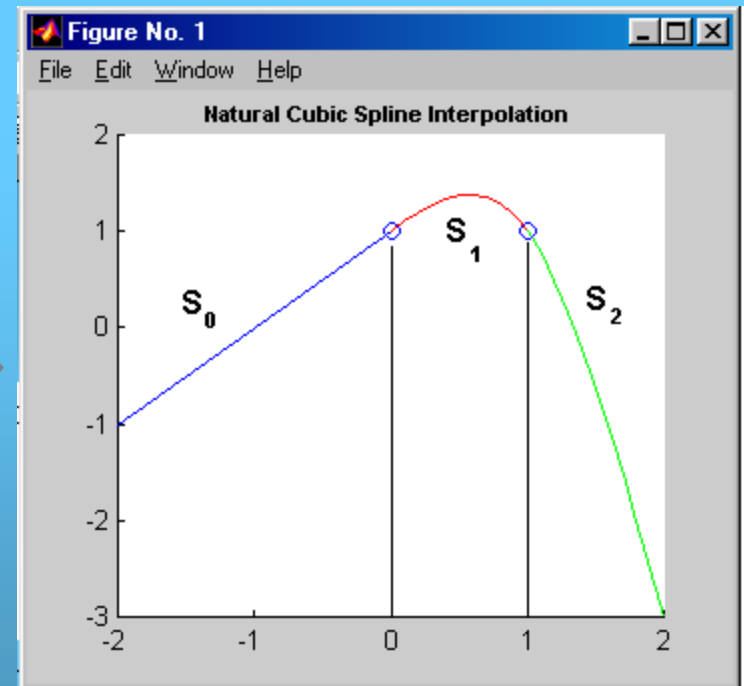
Natural Cubic Spline

x	y	z
-	-	
		z
		z
	-	

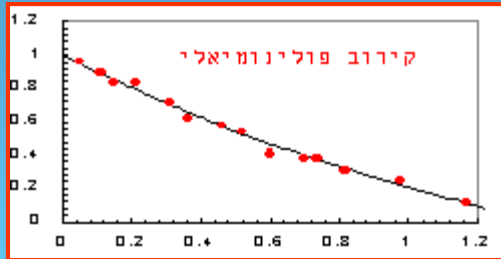
לדוגמה:

פתרון:

$$S(x) = \begin{cases} s_0 \equiv 1+x, & -2 < x < 0 \\ s_1 \equiv 1+x-x^3, & 0 < x < 1 \\ s_2 \equiv -1+7x-6x^2+x^3, & 1 < x < 2 \end{cases}$$



פרק 9. Least square approximations



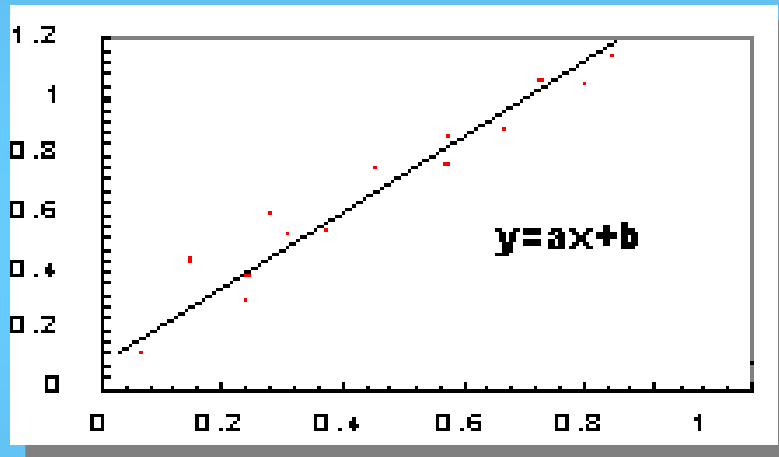
- להתאים לנתונים פולינום:

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i & \dots & \sum_{i=1}^N x_i^n \\ \sum_{i=1}^N x_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^n & \dots & \dots & \sum_{i=1}^N x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^n y_i \end{Bmatrix}$$

רגרסיה ליניארית

$$y = ax + b$$



$$a = \frac{N\sigma_{xy} - \sigma_x \sigma_y}{N\sigma_{xx} - \sigma_x^2}$$

$$b = \frac{\sigma_{xx}\sigma_y - \sigma_{xy}\sigma_x}{N\sigma_{xx} - \sigma_x^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{N - n - 1}\right) \sum_{k=1}^N (Y_k - y_k)^2} \quad \text{סטטייה:}$$

פרק 10. ריבויים מזעורים רציפים

להתאים לפונקציה $f(x)$ פולינום $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ כך שערך של אינטגרל הריבויים מזעורים תהיה מינימלי:

$$E = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx \rightarrow \min$$

נקבל מערכת משוואות אלגבריות ליניאריות עבור מקדמים $a_0, a_1, \dots, a_n$:

$$\frac{dE}{da_i} = 2 \int_a^b [f(x) - p_n(x)] x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=0}^n \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} a_j = \int_a^b f(x) x^i dx, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

לדוגמה: נתונה פונקציה $f(x) = xe^{2x}$ בקטע $[0,1]$

יש למצוא פולינום ריבויי $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ שנותן

ערך מינימלי לאינטגרל $E = \int_0^1 [xe^x - a_0 + a_1x + a_2x^2]^2 dx \rightarrow \min$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^1 1(xe^{2x})dx \\ \int_0^1 x(xe^{2x})dx \\ \int_0^1 x^2(xe^{2x})dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(e^2 + 1) \\ \frac{1}{4}(e^2 - 1) \\ \frac{1}{8}(e^2 + 3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0973 \\ 1.5973 \\ 1.2986 \end{Bmatrix}$$

ותשובה היא:

$$p_2(x) = 0.3328 - 2.5806x + 9.1642x^2$$

פרק 11. פולינומים אורתוגונליים

בעזרת הפולינומים של Legendre אפשר להציג כל הפונקציה:

$$f(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x)$$

הפולינומים של Legendre הם אורתוגונליים:

$$\int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} \# & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$P_1(x) = x$$

$$\vdots = \vdots$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \right]$$

Legendre Polynomial

How would you work with a least square fit of a function.

$$E = \int_{-1}^1 \left(a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) - s(x) \right)^2 dx$$

Legendre Polynomial

How would you work with a least square fit of a function.

$$\frac{dE}{da_0} = \int_{-1}^1 (2)(a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) - s(x))(P_0(x)) dx = 0$$

$$a_0 \int_{-1}^1 P_0(x) P_0(x) dx + a_1 \int_{-1}^1 P_1(x) P_0(x) dx +$$

$$a_2 \int_{-1}^1 P_2(x) P_0(x) dx = \int_{-1}^1 s(x) P_0(x) dx$$

Legendre Polynomial

The coefficient a_0 is determined by the orthogonality of the Legendre polynomials:

$$a_0 \int_{-1}^1 P_0(x)P_0(x)dx = \int_{-1}^1 s(x)P_0(x)dx$$
$$a_0 = \frac{\int_{-1}^1 s(x)P_0(x)dx}{\int_{-1}^1 P_0(x)P_0(x)dx}$$

Legendre Polynomial Example

Given a simple polynomial:

$$s(x) = 2x^2$$

We want to throw a loop, let's model it from 0 to 4 with $f(x)$:

$$f(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

Legendre Polynomial Example

The first step will be to scale the function:

$$x = mu + b$$

We know that at the ends are 0 and 4 for x and -1 to 1 for u so

$$x = 2u + 2 \Rightarrow s(u) = 2 * (2u + 2)^2$$

$$s(u) = 8u^2 + 16u + 8$$

Legendre Polynomial Example

The coefficients are

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\int_{-1}^1 s(u)P_0(u)du}{\int_{-1}^1 P_0(u)P_0(u)du} = \frac{\int_{-1}^1 (8u^2 + 16u + 8)du}{\int_{-1}^1 du} \\ &= \frac{21.3333}{2} = 10.6667 \end{aligned}$$

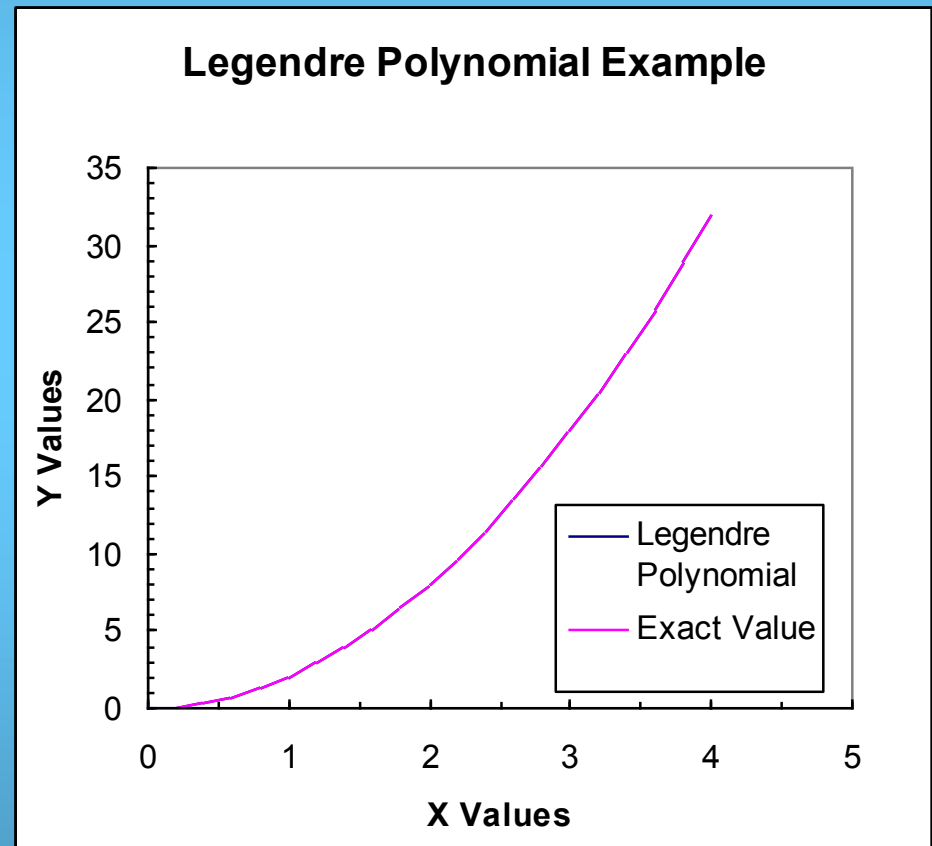
$$a_1 = 16 \text{ and } a_2 = 8$$

Legendre Polynomial Example

The Legendre functions must be adjusted to handle the scaling:

$$u = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\begin{aligned} f(x) = & 10.667 P_0(0.5x - 1) \\ & + 16 P_1(0.5x - 1) \\ & + 8 P_2(0.5x - 1) \end{aligned}$$



Tchebyshev Polynomial

The Tchebyshev polynomials are another set of orthogonal functions, which can be used to represent a function as components of a function.

$$f(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x)$$

Tchebyshev Polynomial

These function are orthogonal over a range [-1, 1].
This range can be scaled to fit the function. The
orthogonal functions are defined as:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ \pi & \text{if } i = j = 0 \\ \pi/2 & \text{if } i = j \neq 0 \end{cases}$$

Tchebyshev Polynomial

The Tchebyshev functions are:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$\vdots = \vdots$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Tchebyshev Polynomial

How would you work with a least square fit of a function.

$$E = \int_{-1}^1 \left(a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) - s(x) \right)^2 dx$$

Tchebyshev Polynomial

How would you work with a least square fit of a function.

$$\frac{dE}{da_0} = \int_{-1}^1 (2)(a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) - s(x))(T_0(x)) dx = 0$$

Rearrange

$$\Rightarrow \begin{aligned} & a_0 \int_{-1}^1 T_0(x) T_0(x) dx + a_1 \int_{-1}^1 T_1(x) T_0(x) dx + \\ & a_2 \int_{-1}^1 T_2(x) T_0(x) dx = \int_{-1}^1 s(x) T_0(x) dx \end{aligned}$$

פרק 12. אינטגרציה נומרית

בעזרת צמתים x_i ומשקלים ω_i אפשר להציג את האינטגרל מהפונקציה:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \dots + \omega_n f(x_n)$$

• נוסחת טרפז:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

נוסחת סימפסון:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

דוגמות: דר' שיף [HOMEPAGE](#)