

יולי 2016

פיזיקה למתמטיקאים – 88-320 - מועד א

מרצים: ד"ר ברוך ברזל, מר ניר שרייבר

משך המבחן: 3 שעות

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט (עד 5 דפים).

ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות (רק שלוש). כל שאלה – 33 נקודות.
ניתן לענות, בנוסף על השלוש הנ"ל, גם על שאלה 5 (שאלת בונוס - לא חובה). בונוס – 10 נקודות.
אנא סמנו בברור על איזה שאלות בחרתם להשיב והקיפו את תשובותיכם הסופיות.

1. גוף נע על פני המישור הדו-ממדי (r, θ) תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי $U(r) = Ce^{-ar}$.
 - א. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת.
 - ב. קבלו את משוואות התנועה.
 - ג. מהו התנע הזוויתי? הראו כי הוא נשמר.
 - ד. עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי L_0 , מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?
 - ה. ב- $t = 0$ מצב הגוף נתון על ידי

$$\begin{aligned} r(t=0) &= r_0 \\ \dot{r}(t=0) &= 0 \\ \dot{\theta}(t=0) &= \omega \end{aligned}$$

מה יהיה מצב הגוף $(r, \dot{r}, \dot{\theta})$ ב- $t \rightarrow \infty$?

2. הלגראנז'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

- א. מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה. האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת?
- ב. רשמו את משוואות התנועה של המילטון.
- ג. רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת טרנספורמצית סיבוב

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \epsilon y \\ y &\rightarrow y - \epsilon x \end{aligned}$$
- ד. מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו?

3. חלקיק קוואנטי נתון בבור פוטנציאל אינסופי בתחום $0 \leq x \leq a$.

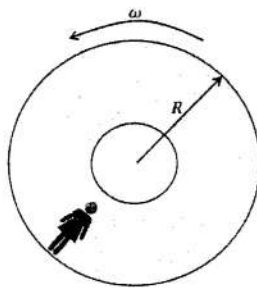
- א. רשמו את משוואת שרדינגר עבור החלקיק וקבלו את רמות האנרגיה השונות E_n , ואת המצבים העצמיים $|\psi_n\rangle$ של ההמילטוניאן. לא לשכוח נירמול, העזרו בזהות:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2}$$

- ב. כעת נתון כי בזמן $t = 0$ פונקציית הגל של החלקיק (בתוך הבור) היא $\psi(x, t=0) = C$ עבור $0 \leq x \leq a$. מצאו את הקבוע C .
- ג. בטאו את $\psi(x, t=0)$ כסופרפוזיציה של מצבים עצמיים של ההמילטוניאן.
- ד. מה ההסתברות למצוא את החלקיק ברמת האנרגיה ה- n ית בזמן $t = 0$.

4. לסטודנט שני מצבים אורתונורמליים אפשריים: חורש $|\chi\rangle$ או מבלה $|\mu\rangle$. האופרטור בירה (B) גורם לסטודנט לבלות ולפיכך $B|\chi\rangle = B|\mu\rangle = |\mu\rangle$.
- א. הראו כי המצב $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi\rangle - |\mu\rangle)$ הוא גם מצב עצמי של B . מהו הערך העצמי המתאים?
- ב. המחלקה למתמטיקה ייצרה את אופרטור האנטי-בירה $A|\chi\rangle = A|\mu\rangle = |\chi\rangle$. הראו כי אופרטור החילוף $C = A + B - I$, כאשר I מייצג את אופרטור היחידה, מחליף בין מצבי הסטודנט.
- ג. מצאו את המצבים העצמיים של C , והשתמשו במשפט הספקטרלי על מנת לקבל את הייצוג המטריציוני של האופרטור (הניחו ש- $|\mu\rangle = (1,0)^T$ ו- $|\chi\rangle = (0,1)^T$).
- ד. בוקר אחד הסטודנט התעורר במצב $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi\rangle + i|\mu\rangle)$ והפעיל על עצמו את האופרטור C . מהם תוצאות המדידה האפשריות ומהי ההסתברות לכל תוצאה?

שאלת בונוס



5. חללית משייטת בחלל במהירות קבועה. על מנת לדמות כבידה החללית מסתובבת סביב צירה כבשרטוט. רדיוס החללית R .
- א. מהי תדירות הסיבוב ω על מנת לדמות כבידה עם תאוצה דומה לזו שבכדור הארץ g ?
- ב. אסטרונאוטית מטפסת במהירות קבועה v כלפי מעלה (דהיינו כלפי מרכז המעגל) - מצאו את התאוצה הקוריולית של האסטרונאוטית (גודל וכיוון).
- ג. כאשר תגיע למרכז החללית (מרחק R) בכמה תסטה מיעדה המקורי בעקבות התאוצה הקוריולית (הניחו כי השפעת כוח קוריוליס על המהירות v זניחה).