

Tema : Diagonalización del endomorfismo

Definiciones:

- Sea $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo

llamaremos autovalor asociado a f a todo λ tal que exista un $\vec{v} \neq 0$ que verifique que $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. El vector $\vec{v}$ de la definición recibe el nombre de autovector o vector propio asociado a λ .

Cálculo de autovectores y autovalores

Sea A la matriz asociada al endomorfismo f , los autovalores λ siempre son las soluciones de $|A - \lambda I| = 0$. Asociada a cada autovalor λ hay un subespacio de autovectores que vamos a denotar por V_λ y definido por estas ecuaciones:

$$V_\lambda = \{ (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \}$$

ej: el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ viene definido en la base canónica por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Autovalores y autovectores

b) Determinar la matriz asociada a f en una base de autovectores

c) ¿qué relación guarda la matriz de b) con la matriz A ?

$$|A - \lambda I| = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 8] = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases} \quad \text{Autovalor} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 & m = 2 \\ \lambda_2 = 4 & m = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Autovectores asociados } \lambda_1 = 2 \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(\Leftrightarrow) x - z = 0 \quad (\Leftrightarrow) V_2 = \{ (x, y, x) \}$$

$$B_{V_2} = \{ (0, 1, 0), (1, 0, 1) \}$$

$$f(1, 2, 1) \text{ es un autovector asociado a } \lambda_2 \quad f(1, 2, 1) = \lambda_2(1, 2, 1) = 2(1, 2, 1)$$

Autovectores asociados a $\lambda_2 = 4$

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ (-z, 0, z) \}$$

$$B_{V_4} = \{ (-1, 0, 1) \}$$

$$b) \text{ Base de autovectores} = \{ (0, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 1) \} = B^*$$

$$M(f; B^*) \quad 1c: \text{ coordenadas } f(1, 0, 1) = (2, 0, 2) \text{ en } B^* = (2, 0, 0)$$

$$2c: \text{ coordenadas de } f(0, 1, 0) = (0, 2, 0) \text{ en } B^* : (0, 2, 0)$$

$$3c: \text{ coordenadas de } f(-1, 0, 1) = (-4, 0, 4) \text{ en } B^* = (0, 0, 4)$$

$$M(F; B^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

La matriz de un endomorfismo de una base formada por autovectores es diagonal y lleva los valores de los autofactores de orden menor a mayor.

c) $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$
 $P = M(B^*, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se pide

a) autovalores y autovectores

b) matriz diagonal en la base que la diagonaliza

c) Relación entre A y D indicando la matriz P de paso

a) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$F_2 = F_2 - F_1 \quad C_1 = C_1 + C_2$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) (\lambda^2 - 5\lambda + 4)$

Ex 2:

a) Determinar autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|A - I\lambda| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) (\lambda^2 - 3\lambda) = 0$

$\lambda = 0 \quad m = 1$
 $\lambda = 3 \quad m = 2$

$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x, x, x\} \quad B_{V_0} = \{(1, 1, 1)\}$

$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{-y-z, y, z\} \quad B_{V_3} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $B = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^8 = P \cdot D^8 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^8 & 0 \\ 0 & 0 & 3^8 \end{pmatrix}$

- ① Se considera el subespacio generado por los vectores $(1, 0, 4, 2)$, $(-1, 6, -1, 2)$ y $(4, 3, 1, 0)$. Calcula una base del subespacio, las ecuaciones paramétricas y cartesianas

$$V = \text{Lin} \{ (1, 0, 4, 2), (-1, 6, -1, 2), (4, 3, 1, 0) \}$$

$$\lambda_1 (1, 0, 4, 2) + \lambda_2 (-1, 6, -1, 2) + \lambda_3 (4, 3, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 24\lambda_2 + 12\lambda_3 &= 0 \\ -24\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$B_V = \{ (1, 0, 4, 2), (-1, 6, -1, 2), (4, 3, 1, 0) \} \quad \dim V = 3$$

$$V = \{ a(1, 0, 4, 2) + b(-1, 6, -1, 2) + c(4, 3, 1, 0) \} \rightarrow \text{paramétricas}$$

$$= \{ (a-b+c, 6b+3c, a-b+c, 2a+2b) \}$$

$$\text{no ecu: } 4 - 2 = 1$$

$$V = \{ (x, y, z, t) \mid \begin{matrix} x = a - b + c \\ y = 6b + 3c \\ z = a - b + c \\ t = 2a + 2b \end{matrix} \} = \{ (x, y, z, t) \mid x - z = 0 \}$$

- ② Demuestra que si los vectores u, v y w son li entonces los vectores $u, u+v$ y $u+v-w$

$$\lambda_1 u + \lambda_2 (u+v) + \lambda_3 (u+v-w) = \vec{0} \quad (\text{combinación lineal de } u, u+v, u+v-w)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)u + (\lambda_2 + \lambda_3)v - \lambda_3 w = \vec{0}$$

$$\text{Como } u, v \text{ y } w \text{ son li entonces } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \{ u, u+v, u+v-w \} \text{ son li.}$$

- ③ Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$ $B_1 = \{ (2, -1), (-2, 0) \}$ y $B_2 = \{ (0, 1), (-1, 1) \}$
 - matriz de cambio de base de B_1 a B_2 y ecuación matricial de dicho cambio
 - expresar las coordenadas respecto de B_2 el vector cuyas coordenadas respecto de B_1 son $(1, 4)$ ¿Cuál es dicho vector de $\mathbb{R}^2$?

$$1c: \text{coord. de } (2, -1) \text{ en } B_2 : (1, -2)$$

$$(2, -1) = \underset{1}{\lambda_1} (0, 1) + \underset{-2}{\lambda_2} (-1, 1)$$

$$2c: \text{coord. de } (-2, 0) \text{ en } B_2 : (-2, -2)$$

$$(-2, 0) = \underset{-2}{\lambda_1} (0, 1) + \underset{-2}{\lambda_2} (-1, 1)$$

$$M(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ coord. de $\bar{v}$ en B_2 $M(B_1, B_2)$ $\downarrow$ coord. de $\bar{v}$ en B_1

ecuación de cambio

$$y_1 = x_1 - 2x_2$$

$$y_2 = -2x_1 + 2x_2$$

Ecuación matricial

Coordenadas de $\bar{v}$ en B_1 son $(1, 4)$. En B_2 ?

$$y_1 = 1 - 2 \cdot 4 = 1 - 8 = -7$$

$$y_2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = -2 + 8 = 6$$

$$\bar{v}(-7, 6)$$

Como $(1, 4)$ son las coordenadas en B_1 : $\bar{v} = 1(2, -1) + 4(-2, 0)$

- ④ Una aplicación lineal f transforma el vector $(1, 1, 1)$ en $(1, 0, 1)$ y el vector $(1, 0, 0)$ en $(0, 3, 1)$ y el vector $(0, 0, -1)$ en $(0, 2, 2)$.

- Razona si se puede calcular la imagen de cualquier otro vector en $\mathbb{R}^3$

- Halla la imagen de un vector genérico (x, y, z) y expresela matricialmente.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(1, 1, 1) = (1, 0, 1)$$

$$f(1, 0, 0) = (0, 3, 1)$$

$$f(0, 0, -1) = (0, 2, 2)$$

tienen que ser base de $\mathbb{R}^3$

La aplicación f estará bien definida si $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, -1)$ [los de dentro de las f no los resultados] tienen que ser base del espacio de salida, en este caso $\mathbb{R}^3$

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 \end{cases} \rightarrow \text{son li}$$

Como el conjunto es li y está formado por 3 vectores que es la dimensión de $\mathbb{R}^3$ entonces genera $\mathbb{R}^3$ y es base. Se puede calcular f de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ porque f está bien definida.

$$f(x, y, z) \quad (x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 0, -1)$$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_1 - \lambda_3 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} x_2 = x - y \\ \lambda_1 = y \\ \lambda_3 = y - z \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = f(y(1, 1, 1) + (x-y)(1, 0, 0) + (y-z)(0, 0, -1))$$

La aplicación es lineal

$$= y f(1, 1, 1) + (x-y) f(1, 0, 0) + (y-z) f(0, 0, -1)$$

$$= y(1, 0, 1) + (x-y)(0, 3, 1) + (y-z)(0, 2, 2)$$

$$= (y, 0, -y) + (0, 3x-3y, x-y) + (0, 2y-2z, 2y-2z)$$

$$= (y, 3x-y-2z, x-2z)$$

$$\text{Solución: } f(x, y, z) = (y, 3x-y-2z, x-2z)$$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

⑤ Se considera una transformación lineal $T(u) = Au$ siendo A una matriz de orden n .

Definir el concepto de autovalor y autovector de la matriz: λ es autovalor de T si y sólo si existe $u \neq 0$ tal que $T(u) = \lambda u$.

Si $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ una base formada por autovectores lineales de forma racionalizable la matriz D de la transformación T en la base B .

$$1^{\circ} : T(\bar{u}_1) = \lambda_1 \bar{u}_1 \xrightarrow[\text{coord. en } B]{} (\lambda_1, 0, \dots, 0)$$

$$2^{\circ} : T(\bar{u}_2) = \lambda_2 \bar{u}_2 \xrightarrow{} (0, \lambda_2, \dots, 0)$$

$$n^{\circ} : T(\bar{u}_n) = \lambda_n \bar{u}_n \xrightarrow{} (0, \dots, \lambda_n)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Haz un esquema que muestre la relación entre A y D .

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad P = M(B, B_c)$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Aplica lo anterior calculando A^3 sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 12 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 22 = 0 \quad \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+88}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{97}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-3 + \sqrt{97}}{2} \quad \frac{\sqrt{-3+\sqrt{97}}}{2} = \left\{ \left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{97}}{2} \quad 12 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{97}}{2} \right) x + 12y = 0 \Rightarrow y = \frac{\frac{\sqrt{97}-7}{2} x}{12} = \frac{\sqrt{97}-7}{24} x$$

$$\Rightarrow B_{\frac{\sqrt{-3+\sqrt{97}}}{2}} = \left\{ (24, \sqrt{97}-7) \right\}$$

$$\lambda = \frac{-3 - \sqrt{97}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{-3-\sqrt{97}}}{2} = \left\{ \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{97}}{2} \quad 12 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow B_{\frac{\sqrt{-3-\sqrt{97}}}{2}} = \left\{ (24, -\sqrt{97}-7) \right\}$$

$$A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ \sqrt{97}-7 & -\sqrt{97}-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{-3+\sqrt{97}}{2} \right)^3 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-3-\sqrt{97}}{2} \right)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

⑥ En un tejido infectado cada día que pasa el sistema inmonitario logra que 60% de las ℓ dejen de estarlo mientras que se infectan el 30% de las que no lo estaban. Inicialmente estaban infectadas $3/4$ partes del tejido que con conste con $4 \cdot 10^6 \ell$. Calcular la cantidad de ℓ infectados al cabo de 5 días.

$I_n = \#$ infectadas el n -ésimo día
 $S_n = \#$ sanas

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + S_{n-1} & \text{a)} \quad I_n &= 0.4 I_{n-1} + 0.3 S_{n-1} \\ S_n &= I_{n-1} + S_{n-1} & S_n &= 0.6 I_{n-1} + 0.7 S_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} I_5 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 10^8 \\ \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 10^8 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.4 - \lambda & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.1\lambda - 0.1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda = 0.1$$

$$B_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 \\ 0.6 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \right\}$$

$$-2x + y = 0$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} I_5 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & (0.1)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^8 \\ 10^8 \end{pmatrix}$$

$$I_5 = 133335000$$

⑧ Se considera un sistema donde el vector evoluciona según
 $x(k+1) = 2x(k) - 2y(k)$

$$y(k+1) = 2x(k) - 2y(k)$$

Calcular el vector de estado para $k=4$. Hacer una diagrama de fases justificando la evolución asintótica.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

$$|h| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{a}{b}\right) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

Cada vez que utilizamos esta matriz efectuamos una transformación compuesta por una homotecia de razón $2\sqrt{2}$ y un giro de amplitud $\pi/4$.

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow (2\sqrt{2})^4 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 64 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ girado } \pi$$

El vector de estado para $k=4$ del sistema coincidirá con el vector inicial multiplicado por 64 (homotecia $\times 4$) y su razón queda elevada a la 4 y girado π radianes (giro de amplitud $\pi/4$ cuatro veces).

Giras en sentido
antihorario y estira. Da una
espiral abriéndose y pontuada.

Si la razón < 1 entonces se cierra

- ① Encontrar las ecuaciones paramétricas, la dimensión, una base del subespacio vectorial $\mathbb{R}^5$ formado por las soluciones

$$\begin{aligned} y + z - 2u - v &= 0 \\ x + 2y + z - 4u - v &= 0 \\ x + 2y - 3u + v &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z - 4u - v &= 0 \quad (\Rightarrow) \quad x + 2u - 2v + u + 2v - 4u - v = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = u + v \\ y + z - 2u - v &= 0 \quad (\Rightarrow) \quad y + u + 2v - 2u - v = 0 \quad (\Rightarrow) \quad y = u - v \\ -z + u + 2v &= 0 \quad (\Rightarrow) \quad z = u + 2v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \{ (u+v, u-v, u+2v, u, v) \} \rightarrow \text{ecuación en paramétricas} \\ &= \text{lin} \{ (1, 1, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0, 1) \} \end{aligned}$$

No son proporcionales = li

$$B_W = \{ (1, 1, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0, 1) \} \quad \dim_W = 2$$

- ② Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, razona si es diagonalizable y en ese caso diagonalízala. Calcula A^3 usando la diagonal. A la vista de los resultados analizar $A^{35} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (1-\lambda)$$

$$\lambda = 1 \quad m = 2 \quad V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ (x, y, -x) \}$$

$$x + z = 0 \quad (\Rightarrow) \quad z = -x$$

$$B_{V_1} = \{ (1, 0, -1), (0, 1, 0) \} \quad \dim_{V_1} = 2$$

$$\lambda = 2 \quad m = 1 \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ (y, y, 0) \}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$B_{V_2} = \{ (1, 1, 0) \} \quad \dim_{V_2} = 1$$

Una matriz A es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad de cada autovector λ coincide con la dimensión de su subespacio propio M_λ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{es un autovector asociado a } \lambda = 2$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^{516} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{516} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2^{35} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{36} \\ 2^{36} \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ Una aplicación lineal transforma $(0, 1, -1)$ en $(0, -1, -1)$, $(1, 0, 1)$ en sí mismo.

- razona si con estos datos se puede calcular la imagen de $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 1, 2)$

- haya las imágenes de los puntos que no se pudieron calcular sabiendo además que la imagen de $(1, 1, 1)$ es $(2, 2, 2)$

- haya el transformado de un vector genérico (x, y, z) y la matriz de la transformación en la base canónica.

- sin hacer ningún cálculo escribe 2 autovalores de dicha aplicación.

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(0, 1, -1) \rightarrow (0, -1, -1)$$

$$T(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1)$$

$$(0, 0, 0) = 0(0, 1, -1)$$

$$T(0, 0, 0) = T[(0, 1, -1) \cdot 0] = 0 \cdot T(0, 1, -1) = 0 \cdot (0, -1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0) = \lambda_1 (0, 1, -1) + \lambda_2 (1, 0, 1) \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} T(1, 1, 0) &= T[(0, 1, -1) + (1, 0, 1)] \\ &= T(0, 1, -1) + T(1, 0, 1) \\ &= (0, -1, -1) + (1, 0, 1) \\ &= (1, -1, 0) \end{aligned}$$

$$(1, 1, 2) = \lambda_1 (0, 1, -1) + \lambda_2 (1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 \\ 2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \rightarrow \text{no hay solución} \rightarrow \text{no se puede calcular}$$

$$(1, 1, 2) = \lambda_1 (0, 1, -1) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (1, 1, 1)$$

$$1 = \lambda_2 + \lambda_3 \quad (\Rightarrow) \lambda_2 = -1$$

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3 \quad (\Rightarrow) \lambda_3 = 2$$

$$2 = -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (\Rightarrow) 2 = -\lambda_1 + 1 \quad (\Rightarrow) \lambda_1 = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F_1 = F_1 + F_3 \\ F_2 = F_2 - \frac{1}{2} F_1 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array} \right)$$

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$\lambda = 2 \quad m = 2$
 $\lambda = 0 \quad m = 1$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(-z, 0, z)\} \quad B_{V_0} = \{(-1, 0, 1)\}$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(z, y, z)\} \quad B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \{(-1, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$\lambda = -1 \quad \lambda = -1$
 $\lambda = 2$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y, -x-y)\} \quad B_{V_1} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x, x, x\} \quad B_{V_2} = \{(1, 1, 1)\}$$

2. En un tejido infectado cada día que pasa se logra que el 60% de los ϕ infectados dejen de estarlo, mientras que se infectan a 20% de los ϕ que el día anterior no estaban. Si el tejido consta aproximadamente $4 \cdot 10^6$ de ϕ de las cuales inicialmente están infectados 2/4 partes, cuando el n° aproximado de ϕ infectados a los 5 años de evolución.

$$I_{n+1} = 0.4 I_n + 0.2 S_n$$

A infectados
en día $\rightarrow$ 0.6 A sanos
0.4 A infect.

$$S_{n+1} = 0.6 I_n + 0.7 S_n$$

B sanos
en día $\rightarrow$ 0.3 B infect
0.7 B sanos

Cuando la suma de columnas vale 1 el autorvalor es 1.

$$\begin{pmatrix} I_{n+1} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ S_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_5 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_4 \\ S_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0,4-\lambda & 0,3 \\ 0,6 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0,8\lambda + 0,12 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = 0,4$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -0,6 & 0,3 \\ 0,6 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x, 2x\} \quad B_{V_1} = \{(1, 2)\}$$

$$V_{0,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x, -x\} \quad B_{V_{0,1}} = \{(1, -1)\}$$

$$\begin{pmatrix} I_3 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^8 \\ 10^8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad P^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj. } P^t = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_3 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^8 \\ 10^8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 10^{-5} \\ 2 & -10^{-5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^8 \\ 10^8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+2 \cdot 10^{-5}}{3} & \frac{1-10^{-5}}{3} \\ \frac{2-2 \cdot 10^{-5}}{3} & \frac{2+10^{-5}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^8 \\ 10^8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10^8 + 2 \cdot 10^3 + \frac{10^8}{3} - \frac{10^3}{3} \\ \frac{2 \cdot 10^8}{3} + \frac{10^8}{3} + \frac{10^3}{3} - \frac{10^3}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(1,1,2) &= T[-(0,1,-1) - (1,0,1) + 2(1,1,1)] \\ &= -(0,1,-1) - (1,0,1) + 2(1,1,1) \\ &= (3,5,1) \end{aligned}$$

$$T(x,y,z)$$

$$(x,y,z) = \lambda_1(0,1,-1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(1,1,1)$$

$$\begin{aligned} x &= \lambda_2 + \lambda_3 & \Leftrightarrow & x = \lambda_2 + y - x + z \\ y &= \lambda_1 + \lambda_3 & \Leftrightarrow & y = x + z + \lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 = 2x - y - z \\ z &= -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \Leftrightarrow & \lambda_1 = x - z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (x-z)T(0,1,-1) + (2x-y-z)T(1,0,1) + (y-x+z)T(1,1,1) \\ &= (x-z)(0,-1,-1) + (2x-y-z)(1,0,1) + (y-x+z)(1,1,1) \\ &= (0, -x+z, -x+z) + (2x-y-z, 0, 2x-y-z) + (2y-2x+2z, 2y-x+z, 2y-x+z) \\ &= (y+z, -3x+2y+3z, -x+y+2z) \end{aligned}$$

$$\text{Solución } T(x,y,z) = (y+z, -3x+2y+3z, -x+y+2z)$$

Autovalores evidentes:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= 2(1,1,1) & \Leftrightarrow & \lambda = 2 \\ T(1,0,1) &= (1,0,1) & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{aligned}$$

$$M(T, B_C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 4) Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ecuaciones paramétricas y cartesianas de los subespacios propios y bases respectivas. Diagonalizar y calcular A^3

- 5) $p(x) = 1-x$ $q(x) = 2+x^2$ $r(x) = -x^2+2x$ demuestran estos polinomios son li

Coordenadas del polinomio $s(x) = 5-5x$ en la base formada por los polinomios del 4)

$$\lambda_1(1-x) + \lambda_2(2+x^2) + \lambda_3(-x^2+2x) = 0$$

$$x^2: \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \quad \lambda_3 = \lambda_2 \quad \lambda_1 = 0$$

$$x: -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \quad 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow 4\lambda_2 = 0 \quad \lambda_2 = 0$$

$$x^0: \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad \lambda_1 = -2\lambda_2 \quad \lambda_1 = 0$$

$$5-5x = \lambda_1(1-x) + \lambda_2(2+x^2) + \lambda_3(-x^2+2x)$$

$$x^2: 0 = \lambda_2 - \lambda_3$$

$$\lambda_2 = \lambda_3$$

$$x: -5 = -\lambda_1 + 2\lambda_3$$

$$-5 = -\lambda_1 + 2\lambda_3$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$x^0: 5 = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$5 = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\lambda_1 = 5$$

$$\text{Coordenadas de } s(x): (5, 0, 0)$$

6) $X? \quad X + XA = B$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot (I + A) = B$$

$$X = B(I + A)^{-1}$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_1 = F_2 - 1/2 F_3$$

$$F_1 = F_1 + F_2$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Dadas las bases de $\mathbb{R}_3$

$$B_1 = \{ (1, 0, -1), (0, 2, 0), (0, 0, 1) \}$$

$$B_2 = \{ (0, 0, 1), (-1, 0, 2), (1, 1, 0) \}$$

- $M(B_1, B_2)$ y calcular las coordenadas respecto de B_2 de un vector cuyas coordenadas en B_1 son (x, y, z)
¿cuáles serían las coordenadas en la base canónica?

1a coord de $(1, 0, -1)$ en B_2 : $(1, -1, 0)$

$$\frac{1}{1}(0, 0, 1) + \frac{-1}{-1}(-1, 0, 2) + \frac{0}{0}(1, 1, 0)$$

2a : coord. de $(0, 2, 0)$ en B_2 : $(-4, 2, 2)$

$$\frac{-4}{-4}(0, 0, 1) + \frac{2}{2}(-1, 0, 2) + \frac{2}{2}(1, 1, 0)$$

3a : coord. de $(0, 0, -1)$ en B_2 : $(-1, 0, 0)$

$$\frac{-1}{-1}(0, 0, 1) + \frac{0}{0}(-1, 0, 2) + \frac{0}{0}(1, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Coord en } B_2 (y_1, y_2, y_3) = (x - 4y - z, -x + 2y, 2y)$$

¿coord. en B_c ?

$$M_{B_1, B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Coord de (x, y, z)
en B_c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, 2y, -x - z)$$

a) Definir el concepto de autovector y autovalor de la matriz (o la transformación)

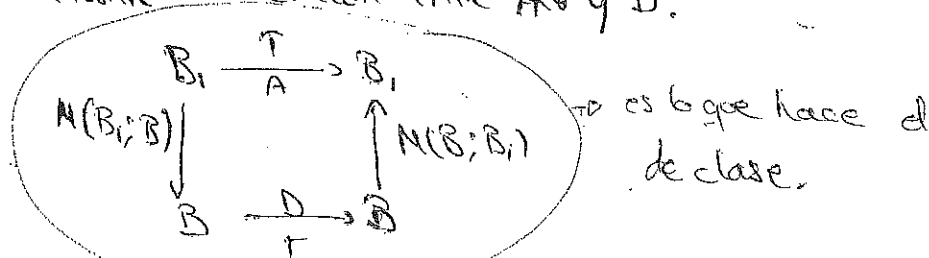
Prop. 1.1
Les autovalor de $T \Leftrightarrow \exists w \neq 0 / T(w) = \lambda w$

b) Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base formada por autovectores, ilustrar de forma razonada cuál es la matriz D de la transformación T respecto de la base B .

$\vec{u}_2$ es autovector asociado a $\lambda_2 \Rightarrow f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow (0, \lambda_2, 0, \dots, 0)$

$$M(T; B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = D \rightarrow \text{matrice diagonal}$$

matrice de T en base B.

$$\begin{aligned} D &= P^{-1} \cdot A \cdot P \\ A &= T \cdot D \cdot P^{-1} \end{aligned}$$


d) Aplica lo anterior para calcular A^3 siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 12 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 22 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{97}}{2}$$

③

a) Expresión matricial de la transform.

A → ~~turismo~~ ^{ciudad} ~~pura~~.

B- turismo rural

C → Playa.

$$\begin{array}{lcl} A_{n+1} & = & 0.6A_n + 0.4B_n + 0.3C_n \\ B_{n+1} & = & 0A_n + 0.4B_n + 0.2C_n \\ C_{n+1} & = & 0.4A_n + 0.2B_n + 0.5C_n \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}$$

b)

$$A_0 = 1.5$$

$$R_0 = 0.5$$

$$C = 1$$

$$\begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.6-\lambda & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.4-\lambda & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5-\lambda \end{vmatrix} = (0.6-\lambda)(0.4-\lambda)(0.5-\lambda) + 0.032 - (0.12(0.4-\lambda) + 0.04(0.6-\lambda))$$

$$= -\lambda^3 + 1.5\lambda^2 - 0.74\lambda + 0.152 - 0.048 + 0.12\lambda - 0.024 + 0.04\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 1.5\lambda^2 - 0.58\lambda + 0.08 = 0$$

hose preden
hacer cosas.

hose garden
hoses ceros.
Hoses Sarrou

places Sarrus

-1	1'5	-0'58	0'08
-1	0'5	-0'08	0

$$\lambda = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.25 - 0.32}}{2}$$

$$-x^2 + 0.5x - 0.08 = 0$$

- 8) Halla una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generados por los vectores $(0, -1, 0, 1), (1, 2, -2, -1), (-1, 3, 2, -4), (1, 1, 2, -5)$

$$W = \text{Lin} \{ (0, -1, 0, 1), (1, 2, -2, -1), (-1, 3, 2, -4), (1, 1, 2, -5) \}$$

$$\lambda_1(1, 2, -2, -1) + \lambda_2(-1, 3, 2, -4) + \lambda_3(1, 1, 2, -5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \text{Lin} \{ (1, 2, -2, -1), (-1, 3, 2, -4) \}$$

$$B_W = \{ (1, 2, -2, -1), (-1, 3, 2, -4) \} \quad \dim W = 2$$

$$\{ (x, y, z, t) \}$$

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = 2a + 3b \\ z = -2a + 2b \\ t = -a - 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x = y + t \end{cases}$$

Una empresa de análisis financiero tiene en plantilla técnicos I y II. Cada año la empresa proporciona un tanto por uno a , $0 < a < 1$ de técnicos de la categoría dos a la I, y descienden de categoría I a II un tanto por uno b con $0 < b < 1$. Formular un modelo que exprese los técnicos de categoría I y II cada año

$$a) \quad I_n = (1-b)I_{n-1} + aII_{n-1}$$

$$II_n = bI_{n-1} + (1-a)II_{n-1}$$

b) ¿ $\lambda = 1$ y $\lambda = 1 - a - b$ son raíces del sistema?

$$\begin{vmatrix} 1-b-\lambda & a \\ b & 1-a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a+b-2)\lambda + 1-b-a = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & a+b-2 & 1-b-a \\ & 1 & a+b-1 \\ \hline 1 & a+b-1 & 0 \end{array}$$

$$\lambda + a + b = 1 = 0$$

$$\lambda = 1 - a - b$$

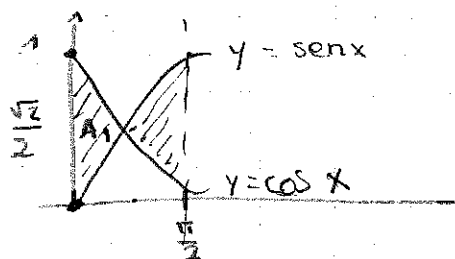
c) Demuestra que hay distribuciones de plantilla que permanecen invariantes de año en año.

Sería un vector asociado a $\lambda = 1$ = cuando se hace la matriz se queda igual.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -b & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{cases} -bx + ay = 0 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}$$

$$= \left\{ x, \frac{b}{a}x \right\}$$

Región en forma de pajarita Área
 $y = \sin x$ $y = \cos x$



$$A = 2A_1$$

$$F_1: \int f(x) - g(x) dx$$

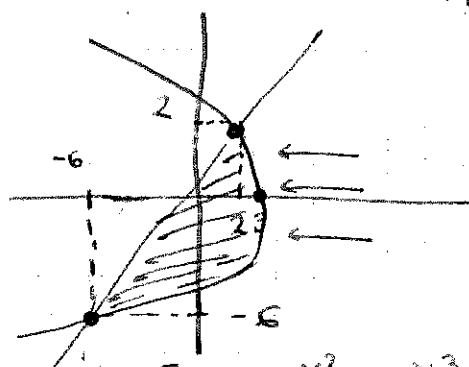
$$F_2: \int h(y) - g(y) dy$$

$$\begin{aligned} A &= 2A_1 = 2 \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx \\ &= 2 [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/4} \\ &= 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(0) + 1 \right] \\ &= 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

Área delimitada por $4x + y^2 = 12 \rightarrow x = \frac{12 - y^2}{4}$

$$\begin{aligned} x &= y \\ 4y + y^2 &= 12 \\ 4y + y^2 - 12 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} y &= 2 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

y	x=y	4x+y ² =12
2	2	2
0	0	3
-6	-6	-6



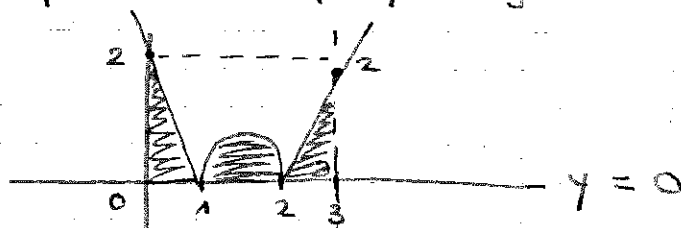
$$\begin{aligned} X &= Ay \\ X &= Ay \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-6}^2 \left(3 - \frac{y^2}{4} - y \right) dy = \left[3y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right]_{-6}^2 \\ &= \left(6 - 2 - \frac{8}{12} \right) - \left(-18 + \frac{216}{12} - 18 \right) = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

Área limitada por $y = |x^2 - 3x + 2|$ y el eje x en el intervalo $[0, 3]$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$A = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$$



$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^3 \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) \right) \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$$

b) ec. paramétricas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = t + 4s \\ y = s \\ z = t \\ u = 2t - s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y + z \\ u = 2z - y \end{cases}$$

ec. canónicas

[4]

$B_1 \rightarrow B_2$

$$B_1 = \{(1, -1), (0, 2)\}$$

$$B_2 = \{(0, 1), (-1, 2)\}$$

$$(1, -1) = \lambda_1 (0, 1) + \lambda_2 (-1, 2)$$

$$(0, 2) = \lambda_3 (0, 1) + \lambda_4 (-1, 2)$$

$$B_2 = X B_1$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 5 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (-1, 2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

[5]

$$T_1(1, 1, 0) = (1, 0, -1)$$

$$f(1, 3, 2) ?$$

$$T_2(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$$

Para calcular la imagen el vector $(1, 3, 2)$ debe poder expresarse como combinación

lineal de $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

$$(1, 3, 2) = \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (1, 0, 1) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Por la linealidad:

$$f(1, 3, 2) = (3, -2, -5)$$

$$3 \cdot f(1, 1, 0) + (-2) \cdot f(1, 0, 1) = (3, -2, -5)$$

$f(0, 0, -2)$ no se puede calcular porque no se puede poner como comb. lineal de T_1, T_2

$$b) f(0, 0, -1) = (0, 2, 2) \text{ c. } f(x, y, z) ?$$

$$(x, y, z) = \lambda_1 f(1, 1, 0) + \lambda_2 f(1, 0, 1) + \lambda_3 f(0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

[1] $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l.i. $\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{w}$ son l.i.

$\hookrightarrow$ si $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \vec{0}$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Supongamos $\alpha(\vec{u}-\vec{v}) + \beta(\vec{u}+\vec{v}) + \gamma(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{0}$

$$(\alpha+\beta)\vec{u} + (\alpha-\beta-\gamma)\vec{v} - \gamma\vec{w} = \vec{0}$$

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son l.i. $\Rightarrow \begin{matrix} \alpha+\beta=0 \\ -\alpha+\beta-\gamma=0 \end{matrix} \rightarrow \gamma=0 \quad \alpha=0 \quad \beta=0$

A ser los coeficientes cero implica que $\vec{u}-\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{v}-\vec{w}$ son l.i.

[2] Son l.i. si y solo si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los restantes.

$$(1, -1, 3) = \lambda_1(1, 0, -3) + \lambda_2(-1, 0, 3)$$

No son l.i. porque ^{no todos} se pueden poner como combinación lineal de los demás.

[3] $\dim(\text{lin} \{ (1, 0, 1, 2), (4, 1, 0, -1), (5, a, b, 1) \}) = 2$.

El tercero tiene que ser combinación lineal de los otros dos ya que en un espacio de dim 2 solo ^{son} necesarios dos vectores para definirlo y los dos 2 primeros vectores son lin. ind. Por necesidad el tercero tiene que ser comb. lineal de los primeros.

$$(5, a, b, 1) = \lambda_1(1, 0, 1, 2) + \lambda_2(4, 1, 0, -1)$$

$$5 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = 5 - 4\lambda_2$$

$$a = \lambda_2$$

$$b = \lambda_1$$

$$1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \quad ; \quad 1 = 2(5 - 4\lambda_2) - \lambda_2 \quad ; \quad -9 = -8\lambda_2 - \lambda_2 \quad ; \quad \lambda_2 = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=1 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1,5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1,5 & -1 & 1 & 0 \\ 1,5 & 1,5 & 0 & 1,5 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1,5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2,5 & -1 & 1,5 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1,5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2,5 & -1 & 1,5 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3,75 & 0 & | & 1,5 & 1,5 \\ 0 & 2,5 & | & -1 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/a \\ 0 & (a^2+1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 1 & | & -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x^n &= -1/a x_0 \\ y^n &= (a^2+1)^n y_0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1/a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a^2+1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/a \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -0,5 \\ 0,5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,25 - 2\lambda + \lambda^2$$