

Tema: APLICACIONES LINEALES

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $F: V \rightarrow W$.
Diremos que F es lineal si sólo si verifica que

- $F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$
- $F(\lambda \vec{u}) = \lambda F(\vec{u})$

Ej 1: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = (x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z)$$

$$F(x, y, z) = (2z + x, x - y, y + 3z)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$$

$$F: M_{2 \times 2} \rightarrow P_1(x) \quad F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (2b + a)x + c$$

Característica de una aplicación lineal definida por su ecuación

Imagen o transformado de un vector concreto u . Se denota por $F(u)$ y se calcula sustituyendo en la ecuación las variables por su valor, el resultado siempre tiene que estar en el espacio de llegada W .

Ex 1: Calcular en la aplicación ① la imagen del vector $(1, 1, 2)$.

$$F(1, 1, 2) = (1 + 1 - 4, 1 - 2 + 2, -2 + 1 + 2) = (-2, 1, 1)$$

En la aplicación ② calcular el transformado de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right) = (2 \cdot 0 + 1)x + 2 = x + 2$$

Imagen de una aplicación lineal F . Se denota por $\text{Im} F$ y es un subespacio vectorial de la llegada que se calcula transformando un vector genérico de la salida.

Ex 2: Determinar la imagen, su base y la dimensión en las 4 dimensiones del ejemplo

$$\text{Im} F = \{ F(x, y, z) = (x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z) \}$$

$$= \text{lin} \{ (1, 1 - 2), (1, -2, 1), (-2, 1, 1) \}$$

¿l.c.? $\rightarrow$ l.c.

$$= \text{lin} \{ (1, 1, -2), (1, -2, 1) \}$$

$$B_{\text{Im} F} = \{ (1, 1, -2), (1, -2, 1) \} \quad \dim \text{Im} F = 2$$

$$\text{Im} F = \{ F(x, y, z) = (2z + x, x - y, y + 3z) \}$$

$$= \text{lin} \{ (1, 1, 0), (0, -1, 1), (2, 0, 3) \} \rightarrow \text{l.c.}$$

$$B_{\text{Im} F} = \{ (1, 1, 0), (0, -1, 1), (2, 0, 3) \} \quad \dim \text{Im} F = 3$$

$$\text{Im}f = \{x+y, x-y, 2x\}$$

$$= \text{lin} \{ (1, 1, 2), (1, -1, 0) \} \rightarrow \text{li} \quad \dim_{\text{Im}f} = 2$$

$$\text{Im}f = \{ (2b+a)x + c \}$$

$$= \text{lin} \{ x, 2x, 1 \} \rightarrow \text{ld}$$

$$= \text{lin} \{ x, 1 \} \rightarrow \text{li}$$

$$B_{\text{Im}f} = \{x, 1\} \quad \dim_{\text{Im}f} = 2$$

Observación: Si la dimensión de imagen de f coincide con la dimensión del espacio de llegada decimos que es suprayectiva, sobreyectiva o epimorfismo.

① $\rightarrow$ no suprayectiva

③ $\rightarrow$ no suprayectiva

② $\rightarrow$ suprayectiva

④ $\rightarrow$ suprayectiva

Característica: Orígenes o preimágenes de un vector concreto de la llegada. Lo denotaremos por $f^{-1}(\vec{v}) = \{ \vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \vec{v} \}$

Ex 3: Calcular si es posible la preimagen de $2x-7$ en ④

$$f^{-1}(2x-7) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2x-7 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2b+a)x + c = 2x-7 \\ 2b+a = 2 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2-2b \\ c = -7 \end{cases}$$

$$f^{-1}(2x-7) = \left\{ \begin{pmatrix} 2-2b & b \\ -7 & d \end{pmatrix} \right\}$$

Calcular en ① la preimagen de $(2, 4, 2)$

$$(x+y-2z, x-2y+z, -2x+y+z) = (2, 4, 2)$$

$$\begin{cases} 2 = x+y-2z \\ 4 = x-2y+z \\ 2 = -2x+y+z \end{cases}$$

El sistema no tiene solución

$$\cancel{f^{-1}(2, 4, 2)}$$

Núcleo de una aplicación lineal f . Se denota también como $\text{Ker}f$ o $\text{Nuc}f$. Es un subespacio vectorial del espacio de salida W formado por las preimágenes del vector $\vec{0}$ de la llegada

$$f^{-1}(\vec{0}_W) = \{ \vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \vec{0}_W \}$$

Observación: Cuando la dimensión del núcleo es 0 decimos que f es inyectiva o monomorfismo.

Ex 4: Calcular el núcleo dando una base y su dimensión de las 4 aplicaciones anteriores

$$\text{Nuc}f = f^{-1}(0, 0, 0) = \left\{ (x, y, z) / \begin{matrix} (x+y-2z, x-2y+z, -2x+y+z) \\ = (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

$$\text{Nuc}f = \{(x, x, x)\} \quad \text{Nuc}f = \text{lin}\{(1, 1, 1)\} \Rightarrow \text{li}$$

$$B_{\text{Nuc}f} = \{(1, 1, 1)\} \quad \dim_{\text{Nuc}f} = 1$$

$$\text{Nuc}f = f^{-1}(0, 0, 0) = \{(x, y, z) / (2z + x, x - y, y + 3z) = (0, 0, 0)\}$$

$$\begin{cases} 2z + x = 0 \\ x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -3z \\ -2z + 3z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0$$

$$\text{Nuc}f \neq \{0\} \quad \dim_{\text{ker}f} = 0 \rightarrow \text{inyectiva}$$

$$\text{Nuc}f = \{(x, y) / (x + y, x - y, 2x) = (0, 0, 0)\} \neq \{0\} \quad \dim_{\text{Nuc}f} = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Nuc}f = \{(0, 0)\}$$

$\rightarrow$ inyectiva

$$\text{Nuc}f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (2b + a)x + c = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} 2b + a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{Nuc}f = \left\{ \begin{pmatrix} -2b & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\text{Nuc}f} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim_{\text{Nuc}f} = 2$$

Observación: cuando una aplicación es inyectiva y suprayectiva decimos que biyectiva o isomorfismo.

Cuando el espacio de salida y el de llegada son iguales decimos que f es endomorfismo.

Cuando es endomorfismo e isomorfismo decimos que es automorfismo. Estas aplicaciones son las únicas que admiten inversa. La matriz asociada a ellas tiene determinante distinto de 0.

Teorema de isomorfía: en toda aplicación lineal de V en W se cumple $\dim V = \dim \text{Im}f + \dim \text{Nuc}f$.

Característica: Matrices asociadas a una aplicación lineal f .

Si f es endomorfismo $f: V \rightarrow V$ la matriz asociada a f en una $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ tiene por columnas

1ª columna: coordenadas de $f(\vec{v}_1)$ en B_V

2ª columna: coordenadas de $f(\vec{v}_2)$ en B_V

...

Ej: calcular la matriz asociada a una aplicación $\textcircled{1}$ en la base $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

1º: coordenadas de $f(1, 1, 1)$ en $B = (0, 0, 0)$

$$f(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

2c: coordenadas de $F(0, 1, 1) = (-1, -1, 2)$ en $B = (-1, 0, 3)$

$$(-1, -1, 2) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-1 0 3

3c: coordenadas de $F(0, 0, 1) = (-2, 1, 1)$ en $B = (-2, 3, 0)$

$$(-2, 1, 1) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-2 3 0

$$M(F; B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Caso especial matriz canónica de un endomorfismo: es la matriz asociada a F en la base canónica

$$M(F; B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 5: Matriz en la base canónica de la aplicación ②

$$M(F; B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a F en un no endomorfismo:

Sea $F: V \rightarrow W$ una aplicación y sean $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y $B_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$ bases respectivas de V y W .

la matriz asociada a F en estas bases tiene por columnas

1c: coord. de $F(\vec{v}_1)$ en B_W

2c: coord. de $F(\vec{v}_2)$ en B_W

Ej: Matriz asociada a la aplicación ③ en las bases

$B_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ y $B_2 = \{(0, 0, 3), (2, 0, 0), (0, 4, 0)\}$

1c: coord. $F(1, 2) = (3, -1, 2)$ en $B_2 = (\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$

$$(3, -1, 2) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2/3 3/2 -1/4

2c: coord $F(2, 1) = (3, 1, 4)$ en B_2

$$(3, 1, 4) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4/3 3/2 1/4

$$M(F; B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 3/2 & 3/2 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a la aplicación ③ en las bases canónicas

$$M(F; B_{c2}, B_{c3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 6: Calcular la matriz asociada a la aplicación ④ en las bases $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y

$B^* = \{(x+1, x-1)\}$

- las bases canónicas

Aplicaciones lineales definidas mediante una matriz. Ej 4 Busca $f: V \rightarrow V$ una aplicación lineal en un espacio vectorial V definida por una matriz A .

- El transformado o imagen de un vector concreto $f(\vec{v})$ se calcula como $A\vec{v}$, $= A \cdot \vec{x}$ donde x son las coordenadas de $\vec{v}$ en B .

- Imagen de f : $\text{Im}f = \text{lin} \{ \text{columnas de } A \}$

- $\text{Nul}f$ viene definida por el sistema de ecuaciones

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

$$④ (2b+a)x + c$$

1c: coordenadas $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2x$ en B^* : $(1, 1)$

$$2x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$$

2c: coordenadas de $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4x$ en B^* : $(2, 2)$

$$a=2 \quad b=1 \\ c=0 \quad d=0$$

$$4x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$$

3c: coordenadas de $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4x+1$ en B^* : $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$4x+1 = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$$

4c: coordenadas de $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 4x+1$ en B^* : $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5/2 & 5/2 \\ 1 & 2 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$B_{C_{H_2 \times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{C_{P_2(x)}} = \{x, 1\}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x \Rightarrow (1, 0)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2x \Rightarrow (2, 0)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \Rightarrow (0, 1) \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$M(f; B_{C_{H_2 \times 2}}; B_{C_{P_2(x)}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 7: En $\mathbb{R}^3$ se define el endomorfismo f cuya matriz en la $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) $\vec{v} = (2, 2, 2)$ transformado

b) base, dimensión, imagen

c) Núcleo, base, dimensión

d) Clasificar la aplicación

$$a) f(\vec{v}) = f(2, 2, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Coordenadas de $(2, 2, 2)$ en la base B

$$b) \text{Im}f = \text{lin} \{(-2, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 1, -2)\} = \text{lin} \{(-2, 1, 1), (1, -2, 1)\}$$

$$B_{\text{Im}f} = \{(-2, 1, 1), (1, -2, 1)\} \quad \text{dimensión Im}f = 2$$

$$c) \text{Nuc} f = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ (x, x, x) \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \quad B_{\text{Nuc} f} = \{ (1, 1, 1) \} \quad \dim_{\text{Nuc} f} = 1$$

d) inyectiva $\rightarrow$ No
suprayectiva $\rightarrow$ No

Ej 8: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ hallar

- a) Una base del núcleo c) la imagen del vector $(6, 1, 1)$
b) Una base de la imagen d) Preimagen del vector $(6, 4, 2)$
e) Clasificación de la matriz
f) Si la matriz A es la matriz canónica cual sería la matriz de la aplicación en la base $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$

$$a) \text{Nuc} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ -y, y, y/3 \}$$

$$B_{\text{Nuc} f} = \{ -1, 1, 1/3 \} \quad \dim_{\text{Nuc} f} = 1 \quad \begin{aligned} 2y + y + 3z &= 0 \\ x + y &= 0 \\ y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

b) $\text{Im} f = \text{lin} \{ (2, 1, 0), (1, 1, 1), (3, 0, -3) \} \rightarrow$ lo porque como la salida tiene dimensión tres (3 columnas) y la dimensión del núcleo es 1 entonces la de la imagen es 2.

$$\text{Im} f = \text{lin} \{ (2, 1, 0), (1, 1, 1) \} \quad B_{\text{Im} f} = \{ (2, 1, 0), (1, 1, 1) \}$$

$$c) f(6, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d) (x, y, z) / f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 6 \\ x + y &= 4 \\ y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 - 2y + y + y - 2 = 6 \Rightarrow 6 = 6 \\ x = 4 - y \\ z = \frac{y - 2}{3} \end{cases}$$

$$f^{-1}(6, 4, 2) = (4 - y, y, \frac{y - 2}{3})$$

e) inyectiva $\rightarrow$ No Suprayectiva $\rightarrow$ No

f) Observación: la dimensión del núcleo también recibe el nombre de nulidad y dimensión de la imagen también se llama rango

$H(f, B) = P^{-1} \cdot A \cdot P$ Siempre que tengamos la matriz de una aplicación en base B , que llamamos A , y queramos la matriz en otra matriz B^* , que vamos a llamar C se va a cumplir que $C = P^{-1} \cdot A \cdot P$ donde P es la matriz de cambio de base de B a B^*

P = matriz de cambio de base de B a B_c

$$1 \text{ coordenadas de } (1, 1, 1) \text{ en } B_c : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$H(F; B) = P^{-1} \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ -4 & -1 & -4 \end{array} \right)$$