Resolução das atividades complementares

Matemática

M2 — Matrizes

p. 6

1 Construa a matriz linha $A = (a_{ij})_{1 \times 5}$ tal que cada elemento obedeça à lei $a_{ij} = 2i - 3j$.

$A = [-1 \quad -4 \quad -7 \quad -10 \quad -13]$

Resolução:

$A = (a_{ij})_{1 \times 5};\ a_{ij} = 2i - 3j$

$a_{11} = 2 - 3 = -1$

$a_{12} = 2 - 6 = -4$

$a_{13} = 2 - 9 = -7$

$a_{14} = 2 - 12 = -10$

$a_{15} = 2 - 15 = -13$

$\therefore A = [-1 \quad -4 \quad -7 \quad -10 \quad -13]$

2 Determine a matriz quadrada de ordem 3 tal que $a_{ij} = \begin{cases} i \text{ se i } = j \\ j \text{ se i } \neq j \end{cases}$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$a_{ij} = \begin{cases} i \text{ se i } = j \\ j \text{ se i } \neq j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3 Qual a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária de uma matriz identidade de ordem 3? 1

Resolução:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 1 - 0 = 1$$

A diferença é 1.

4 Qual a soma dos elementos da diagonal principal da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$? -2

Resolução:

$S = 1 + (-7) + (-2) + 6 \rightarrow S = -2$

5 Coloque V ou F conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas.

a) Toda matriz nula é quadrada. F

b) Toda matriz diagonal é quadrada. V

c) Existe matriz identidade que não é quadrada. F

d) Na matriz identidade, os elementos da diagonal principal são iguais a 1. V

e) Toda matriz quadrada possui o número de linhas igual ao número de colunas. V

Resolução:

a) (Falsa); existem matrizes nulas que não são quadradas.

b) (Verdadeira)

c) (Falsa); toda matriz identidade é uma matriz diagonal.

d) (Verdadeira)

e) (Verdadeira)

6 Construa uma matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} j \text{ se } i = j \\ 2i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolução:

$A = (a_{ij})_{2 \times 3},\ a_{ij} = \begin{cases} j \text{ se } i = j \\ 2i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7 Determine a soma dos elementos da 3ª coluna da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = 3 + 2i - j$. $S = 12$

Resolução:

$A = (a_{ij})_{3 \times 3},\ a_{ij} = 3 + 2i - j$

$3^{a} \text{ coluna} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$S = 2 + 4 + 6 = 12$

8 (UEPB) Dados $a \neq b \neq c$, a matriz quadrada $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 3 & c \end{bmatrix}$ de ordem 3 é chamada de:

a) matriz de Vandermonde
b) matriz identidade
c) matriz nula
d) matriz diagonal
e) matriz triangular

Resolução:

A matriz $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 3 & c \end{bmatrix}$ possui todos os elementos acima da diagonal principal iguais a zero; portanto, é uma matriz triangular.

9 (Unipar-PR) Sabendo que *a* é uma matriz quadrada de ordem 2 e está definida pela lei de formação:
$a_{ij} = \begin{cases} \log_2^{(i+j)} \text{ se } i = j \\ 2^{i+j} \text{ se } i \neq j \end{cases}$, podemos concluir que a sua transposta é:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$a_{ij} = \begin{cases} \log_2^{(i+j)} \text{ se } i = j \\ 2^{1+j} \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_2^{1+1} & 2^{1+2} \\ 2^{2+1} & \log_2^{2+2} \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

10 Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ em que $a_{ij} = 2i + j$. 36

Resolução:

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, $a_{ij} = 2i + j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 \\ 6+1 & 6+2 & 6+3 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$S = 3 + 6 + 9 + 5 + 6 + 7 = 36$

11 Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ em que $a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i \leq j \\ i \cdot j \text{ se } i > j \end{cases}$, determine a soma dos elementos $a_{21} + a_{22}$. 6

Resolução:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 3},\ a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i \leq j \\ i \cdot j \text{ se } i > j \end{cases}$$

$a_{21} = 2 \cdot 1 = 2$
$a_{22} = 2 + 2 = 4$
$a_{21} + a_{22} = 2 + 4 = 6$

12 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & x + y \\ x & -6 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, determine *x* e *y* para que as matrizes sejam iguais. $x = 6$ e $y = 4$

Resolução:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & x + y \\ x & -6 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

Se A = B, então: $x = 6$.

$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - 6 \rightarrow y = 4$

13 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 8 & 1 & 0 \\ 12 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, determine A + B e A − B. $\begin{pmatrix} 1 & 12 & -4 \\ 8 & -1 & -3 \\ 16 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 8 & 3 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 - 2 & 5 + 7 & -2 - 2 \\ 8 + 0 & 1 - 2 & 0 - 3 \\ 12 + 4 & -3 - 1 & 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -4 \\ 8 & -1 & -3 \\ 16 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 + 2 & 5 - 7 & -2 + 2 \\ 8 - 0 & 1 + 2 & 0 + 3 \\ 12 - 4 & -3 + 1 & 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 8 & 3 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

14 Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, determine $A^t + B^t$. $\begin{pmatrix} 0 & 11 & 8 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Resolução:

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 8 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

15 Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ definida por $a_{ij} = i^2 - j$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$ definida por $b_{ij} = j^2 - i$. Determine c_{22} da matriz C = A + B. 4

Resolução:

$A = (a_{ij})_{3 \times 2}$; $a_{ij} = i^2 - j$

$B = (b_{ij})_{3 \times 2}$; $b_{ij} = j^2 - i$

$C = A + B$

$c_{22} = a_{22} + b_{22}$

$a_{22} = 2^2 - 2 = 2$

$b_{22} = 2^2 - 2 = 2$

$c_{22} = a_{22} + b_{22} = 2 + 2 = 4$

16 Seja $A = (a_{ij})_{20 \times 20}$ tal que $a_{ij} = i^3 + j$ e $B = (b_{ij})_{20 \times 20}$ tal que $b_{ij} = 2i + j^2$. Determine c_{78} da matriz $C = A - B^t$. 286

Resolução:

$A = (a_{ij})_{20 \times 20}$; $a_{ij} = i^3 + j$

$B = (b_{ij})_{20 \times 20}$; $b_{ij} = 2i + j^2$

$C = A - B^t$

$a_{78} = 7^3 + 8 = 351$

$b^t_{78} = b_{87} = 16 + 7^2 = 65$

$c_{78} = 351 - 65 = 286$

17 Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, determine $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $C = A + B + I_3$.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$C = (c_{ij})_{3 \times 3}$; $C = A + B + I_3$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

18 Resolva a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 8 \\ 3 & -6 & 10 & 9 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + x \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & -22 & 0 \\ 2 & -11 & 8 & 8 \\ -2 & -1 & -6 & 5 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 8 \\ 3 & -6 & 10 & 9 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + x$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -13 & 8 \\ 1 & -14 & 12 & 10 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x$$

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -22 & 0 \\ 2 & -11 & 8 & 8 \\ -2 & -1 & -6 & 5 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

19 Determine a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária da matriz X:

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + x$ 66

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = x$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$D = -6 - (-72) = 66$

A diferença é 66.

20 As vendas de computadores, impressoras e *webcams* de determinada rede de lojas de informática das cidades A, B, C e D no primeiro semestre de 2005 foram organizadas na seguinte tabela:

	A	B	C	D
Computadores	120	100	50	300
Impressoras	50	150	200	120
Webcams	80	70	100	100

No final do ano foi feita outra tabela, com as vendas do ano todo.

	A	B	C	D
Computadores	500	400	300	600
Impressoras	150	350	400	300
Webcams	90	150	150	400

Expresse, com uma matriz, o total de vendas desses produtos no segundo semestre. $\begin{bmatrix} 380 & 300 & 250 & 300 \\ 100 & 200 & 200 & 180 \\ 10 & 80 & 50 & 300 \end{bmatrix}$

Resolução:

segundo semestre = ano todo − 1º semestre

$$\begin{bmatrix} 500 & 400 & 300 & 600 \\ 150 & 350 & 400 & 300 \\ 90 & 150 & 150 & 400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 120 & 100 & 50 & 300 \\ 50 & 150 & 200 & 120 \\ 80 & 70 & 100 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 380 & 300 & 250 & 300 \\ 100 & 200 & 200 & 180 \\ 10 & 80 & 50 & 300 \end{bmatrix}$$

21 Se $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, A e B se comutam? Não.

Resolução:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+6 & 4+0 \\ 0+2 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+5 & 0+1 \\ 8+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$; portanto, A e B não se comutam.

22 (FGV-SP) *A*, *B* e *C* são matrizes quadradas de ordem 3, e *I* é a matriz identidade de mesma ordem. Assinale a alternativa correta:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$

b) $B \cdot C = C \cdot B$

c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

d) $C \cdot I = C$

e) $I \cdot A = I$

Resolução:

a) (Falsa); a multiplicação de matrizes não é comutativa.

b) (Falsa); a multiplicação de matrizes não é comutativa.

c) (Falsa); a multiplicação de matrizes não é comutativa.

d) (Verdadeira); a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

e) (Falsa)

23 (UEL-PR) Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol realizada na França, em 1998, o grupo *A* era formado por quatro países: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. Observe os resultados (números de vitórias, empates e derrotas) de cada país registrados na tabela a seguir.

	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem uma pontuação que pode ser observada na tabela abaixo.

	Pontuação
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

A matriz $C = \begin{bmatrix} \text{Brasil} \\ \text{Escócia} \\ \text{Marrocos} \\ \text{Noruega} \end{bmatrix}$, que representa a pontuação final de cada país ao término dessa primeira fase, é:

a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; C = A \cdot B$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 0 + 0 \\ 0 + 1 + 0 \\ 3 + 1 + 0 \\ 3 + 2 + 0 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

24 (Faap-SP) Uma montadora produz três modelos de veículos, *A*, *B* e *C*. Neles podem ser instalados dois tipos de *airbags*, *D* e *E*. A matriz [*airbag* – modelo] mostra a quantidade de unidades de *airbags* instaladas:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Em determinada semana, foram produzidas as seguintes quantidades de veículos, dadas pela matriz [modelo – quantidade]:

$$\begin{array}{cc} & \text{quantidade} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \\ x \end{bmatrix} \end{array}$$

O produto da matriz [*airbag* – modelo] pela matriz [modelo – quantidade] é $\begin{bmatrix} 1\,600 \\ 3\,600 \end{bmatrix}$.
Quantos veículos do modelo *C* foram montados na semana?

a) 300
b) 200
c) 150
d) 0
e) 100

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,600 \\ 3\,600 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 600 + 1\,000 + 0 \\ 1\,200 + 2\,000 + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,600 \\ 3\,600 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1\,200 + 2\,000 + 2x = 3\,600 \rightarrow x = 200$$

25 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Verifique se valem as igualdades:

a) $(A + B) \cdot C$ e $A \cdot C + B \cdot C$ V

b) $C \cdot (A - B)$ e $C \cdot A - C \cdot B$ V

c) $(A \cdot B) \cdot C$ e $A \cdot (B \cdot C)$ V

d) $A \cdot B$ e $B \cdot A$ F

Resolução:

a) (Verdadeira)

$$(A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 24 + 8 & 16 - 4 \\ 18 + 0 & 12 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 12 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 + 2 & 12 - 1 \\ 24 - 4 & 16 + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 + 6 & 4 - 3 \\ -6 + 4 & -4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 20 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 12 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

b) (Verdadeira)

$$C \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 20 & -12 - 16 \\ 4 - 5 & -4 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -28 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A - C \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 16 & 6 - 8 \\ 6 - 4 & 2 + 2 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 6 - 4 & 18 + 8 \\ 2 + 1 & 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 26 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -28 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) (Verdadeira)

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 1 & 9 + 2 \\ 4 + 2 & 12 - 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 22 & 8 - 11 \\ 36 + 16 & 24 - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 & -3 \\ 52 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 + 6 & 4 - 3 \\ -6 + 4 & -4 - 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 - 2 & 3 - 6 \\ 48 + 4 & 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -3 \\ 52 & 16 \end{pmatrix}$$

d) (Falsa)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 & 9 + 2 \\ 4 + 2 & 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 12 & 1 - 6 \\ -3 + 8 & -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

26 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, determine X tal que $A \cdot X = I_2$. $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Resolução:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; A \cdot X = I_2$

Seja $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$4c = 0 \rightarrow c = 0$

$a + 3c = 1 \rightarrow a = 1$

$4d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{4}$

$b + 3d = 0 \rightarrow b + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow b = -\frac{3}{4}$

$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

27 Resolva a equação matricial: $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Seja $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Com os dados, temos:

$$\begin{cases} 4a + 9c = 3 \\ -a + 3c = 1 \quad \times (4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 9c = 3 \\ -4a + 12c = 4 \end{cases}$$

$$21c = 7 \rightarrow c = \frac{1}{3}$$

Substituindo *c*, temos:

$-a + 3c = 1 \rightarrow -a + \frac{3}{3} = 1 \rightarrow -a = 1 - 1 \rightarrow a = 0$

$$\begin{cases} 4b + 9d = 0 \\ -b + 3d = -1 \quad \times (4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4b + 9d = 0 \\ -4b + 12d = -4 \end{cases}$$

$$21d = -4 \rightarrow d = -\frac{4}{21}$$

Substituindo *d*, temos:

$-b + 3d = -1 \rightarrow -b + 3 \cdot \left(-\frac{4}{21}\right) = -1 \rightarrow -b - \frac{12}{21} = -1$

$b = 1 - \frac{12}{21} \rightarrow b = \frac{21 - 12}{21} \rightarrow b = \frac{9}{21} \rightarrow b = \frac{3}{7} \therefore \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{21} \end{pmatrix}$

28 (Fuvest-SP) Uma matriz é ortogonal se $A \cdot A^t = I$, em que *I* indica a matriz identidade e A^t indica a transposta de *A*. Se $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é ortogonal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

Resolução:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + x^2 & \frac{y}{2} + xz \\ \frac{y}{2} + xz & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} + x^2 \rightarrow x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y}{2} + xz \rightarrow z = -\frac{y}{2x}$$

$$y^2 + z^2 = 1 \rightarrow y^2 + \frac{y^2}{4x^2} = 1 \rightarrow y^2 + \frac{y^2}{4 \cdot \frac{3}{4}} = 1 \rightarrow y^2 = \frac{3}{4}$$

Logo, $x^2 + y^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

29 (Unipac-MG) Uma empresa pretende fornecer uma cesta de presentes aos seus funcionários. Cada cesta deve sempre conter pacotes de amêndoas, caixas de bombons e garrafas de vinho. Foram propostos três tipos de composição, conforme a tabela 1 abaixo, que mostra o número de itens em cada cesta.

Tabela 1:

	Pacotes de amêndoas	Caixas de bombons	Garrafas de vinho
Cesta 1	4	3	3
Cesta 2	3	4	3
Cesta 3	6	2	2

Foi feita uma pesquisa de preços (em reais) entre dois fornecedores, conforme mostra a tabela 2 abaixo:

Tabela 2:

	Fornecedor 1	Fornecedor 2
Pacote de amêndoas	3,00	3,00
Caixa de bombons	2,50	3,50
Garrafa de vinho	6,00	5,00

Afirma-se que:

I. o produto matricial da tabela 1 pela tabela 2 fornece o preço de cada tipo de cesta composta dos produtos comprados de cada um dos fornecedores.

II. uma cesta do tipo 2 comprada do fornecedor 2 custaria R$ 38,00.

III. o elemento da 3ª linha e 1ª coluna da matriz produto corresponde ao preço da cesta tipo 2 comprada do fornecedor 1.

Assinale a opção que apresenta a(s) afirmativa(s) verdadeira(s):

a) apenas I
b) apenas I e II
c) apenas II
d) apenas III
e) apenas II e III

Resolução:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2{,}5 & 3{,}5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2{,}5 & 3{,}5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 7{,}5 + 18 & 12 + 10{,}5 + 15 \\ 9 + 10 + 18 & 9 + 14 + 15 \\ 18 + 5 + 12 & 18 + 7 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37{,}5 & 37{,}5 \\ 37 & 38 \\ 35 & 35 \end{pmatrix}$$

I. (Verdadeira)

II. (Verdadeira); $a_{22} = 38$.

III. (Falsa); o elemento da 3ª linha e 1ª coluna corresponde à cesta tipo 3 do fornecedor 1.

30 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, determine $B^t \cdot A$ $\begin{bmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

Resolução:

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 15 \\ 6 + 3 \\ 4 + 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^t \cdot A = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

31 (FGV-SP) Uma matriz X tem elementos cuja soma vale 1. Seja X^t a transposta da matriz X. Sabendo que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^t = (1)$, podemos afirmar que o produto dos elementos de X vale:

a) 0
b) 0,25
c) 0,16
d) −2
e) −6

Resolução:

$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^t = (1)$

Como a matriz resultante é 1×1, podemos afirmar que X é uma matriz 1×2 e X^t é uma matriz 2×1.

Sejam $X = (a \quad b)$ e $X^t = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, então:

$$(a \quad b) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1) \rightarrow (a - b \quad -a + b) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a^2 - ab - ab + b^2) =$$

$$= [(a - b)^2] = (1)$$

Como $a + b = 1$, temos: $a = 1$ e $b = 0$ ou $a = 0$ e $b = 1$.
Então, $a \cdot b = 0$.

32 (Unipar-PR) Sabendo que $A = \begin{bmatrix} \log_3 2 & \log_4 3 & \log_5 4 \\ \log_3 8 & \log_4 27 & \log_5 64 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \log_2 3 & \log_2 9 \\ \log_3 4 & \log_3 16 \\ \log_4 5 & \log_4 25 \end{bmatrix}$, a soma dos elementos da matriz $A \cdot B$ é igual a:

a) 42
b) 38
c) 36
d) 24
e) 12

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} \log_3 2 & \log_4 3 & \log_5 4 \\ \log_3 8 & \log_4 27 & \log_5 64 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \log_2 3 & \log_2 9 \\ \log_3 4 & \log_3 16 \\ \log_4 5 & \log_4 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \log_3 2 & \log_4 3 & \log_5 4 \\ \log_3 8 & \log_4 27 & \log_5 64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \log_2 3 & \log_2 9 \\ \log_3 4 & \log_3 16 \\ \log_4 5 & \log_4 25 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \log_3 2 \cdot \log_2 3 + \log_4 3 \cdot \log_3 4 + \log_5 4 \cdot \log_4 5 & \log_3 2 \cdot \log_2 3^2 + \log_4 3 \cdot \log_3 4^2 + \log_5 4 \cdot \log_4 5^2 \\ \log_3 2^3 \cdot \log_2 3 + \log_4 3^3 \cdot \log_3 4 + \log_5 4^3 \cdot \log_4 5 & \log_3 2^3 \cdot \log_2 3^2 + \log_4 3^3 \cdot \log_3 4^2 + \log_5 4^3 \cdot \log_4 5^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 1 + 1 & 2 + 2 + 2 \\ 3 + 3 + 3 & 6 + 6 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$$

$\therefore S = 3 + 6 + 9 + 18 = 36$

33 (Vunesp-SP) Sejam *A* e *B* duas matrizes quadradas de mesma ordem. Em que condição pode-se afirmar que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

a) Sempre, pois é uma expansão binomial.
b) Se e somente se uma delas for a matriz identidade.
c) Sempre, pois o produto de matrizes é associativo.
d) Quando o produto $A \cdot B$ for comutativo com $B \cdot A$.
e) Se e somente se $A = B$.

Resolução:
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ será verdadeira se e somente se $A \cdot B = B \cdot A$, ou seja, quando o produto $A \cdot B$ for comutativo com $B \cdot A$.