Resolução das atividades complementares

TERCEIRÃO FTD 4

Matemática

M21 — Geometria Analítica: Cônicas

p. 47

1 (FGV-SP) Determine a equação da elipse de centro na origem que passa pelos pontos A(2, 0), B(−2, 0) e C(0, 1). $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Resolução:

O centro da elipse coincide com a origem do plano cartesiano, e a equação é dada por λ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$A(2, 0)$ e $B(-2, 0) \in \lambda \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \Rightarrow a = 2 \quad (I)$

$C(0, 1) \in \lambda \Rightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 1 \quad (II)$

De (I) e (II), vem: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

2 (PUC-MG) A equação $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$ representa uma elipse, cujo comprimento do eixo maior é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

Resolução:

Dividindo os termos da equação por 144, temos:

$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Portanto, $a = 4$ e $2a = 8$.

3 (UNI-RIO) A área do triângulo PF_1F_2, em que $P(2, -8)$ e F_1 e F_2 são os focos da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, é igual a:

a) 8
b) 16
c) 20
d) 32
e) 64

Resolução:

F_1 e F_2 são focos da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e $P(2, -8)$.

De acordo com a equação dada, temos: $a = 5$; $b = 3$.

Daí, vem: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 4$.

Os focos da elipse são $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$.

Seja o ΔPF_1F_2.

$\begin{cases} \text{base} = F_1F_2 = 2c = 8 \\ \text{altura} = 8 \end{cases}$

Área do triângulo PF_1F_2: $S = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$

4 (Vunesp-SP) Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Mostre que o ponto $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ pertence à elipse e calcule a distância de *P* ao eixo das abscissas. $\frac{12}{5}$

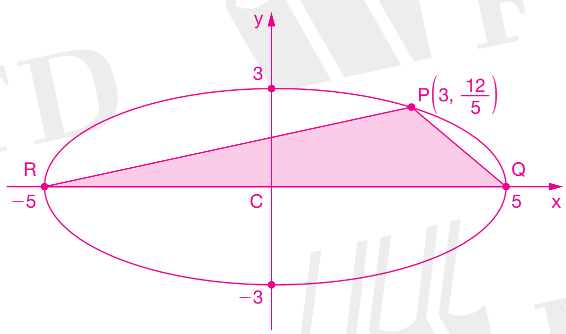
b) Determine os vértices *Q* e *R* da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, em que $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$. Q(5, 0), R(−5, 0) e 12

Resolução:

a) O ponto $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ pertence à elipse, pois $\frac{3^2}{25} + \frac{\left(\frac{12}{5}\right)^2}{9} = \frac{9}{25} + \frac{144}{25 \cdot 9} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

A distância *d* do ponto $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ ao eixo das abscissas é $\frac{12}{5}$.

b) De acordo com o enunciado, a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ tem o seguinte gráfico, onde estão indicados os pontos *P*, *Q* e *R*:



Os pontos *Q* e *R*, de acordo com o gráfico, têm coordenadas Q(5, 0) e R(−5, 0).

A área do triângulo PQR é:

$$S_{\triangle PQR} = \frac{RQ \cdot d}{2} = \frac{10 \cdot \frac{12}{5}}{2} = 12$$

p. 48

5 A órbita da Terra é uma elipse, estando o Sol num dos focos. O eixo maior mede, aproximadamente, $3 \cdot 10^8$ km e a excentricidade é $\frac{1}{60}$. Calcule a maior e a menor distância da Terra ao Sol.

$1,525 \cdot 10^8$ km e $1,475 \cdot 10^8$ km

Resolução:

Eixo maior: $3 \cdot 10^8 \text{ km} \Rightarrow 2a = 3 \cdot 10^8 \Rightarrow a = 1,5 \cdot 10^8$

$e = \frac{1}{60} \Rightarrow e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{60} = \frac{c}{1,5 \cdot 10^8} \Rightarrow c = 2,5 \cdot 10^6$

$A_1(-1,5 \cdot 10^8; 0)$ $A_2(1,5 \cdot 10^8; 0)$

$F_1(-2,5 \cdot 10^6; 0)$ $F_2(2,5 \cdot 10^6; 0)$

Supondo que o Sol esteja em F_2, vamos calcular A_1, F_2 e A_2, F_2.

$d(A_1, F_2) = \sqrt{(-1,5 \cdot 10^8 - 2,5 \cdot 10^6)^2} = 1,525 \cdot 10^8$ km

$d(A_2, F_2) = \sqrt{(1,5 \cdot 10^8 - 2,5 \cdot 10^6)^2} = 1,475 \cdot 10^8$ km

6 (UFJF-MG) Determine os valores de $\theta \in [0, \pi]$ para os quais o ponto P de coordenadas $(2 \cdot \cos 2\theta, 3 \cdot \text{sen } \theta)$ pertença à elipse de equação $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. $\left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi\right\}$

Resolução:

Substituindo as coordenadas na equação dada, temos:

$$\frac{(2 \cdot \cos 2\theta)^2}{4} + \frac{(3 \cdot \text{sen } \theta)^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{4 \cdot \cos^2 2\theta}{4} + \frac{9 \cdot \text{sen}^2 \theta}{3} = 1$$

$$\cos^2 \cdot 2\theta + 3 \cdot \text{sen}^2 \theta = 1 \Rightarrow (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)^2 + 3 \cdot \text{sen}^2 \theta = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 2 \cdot \text{sen}^2 \theta)^2 + 3 \cdot \text{sen}^2 \theta = 1$$

$$4 \cdot \text{sen}^4 \theta - \text{sen}^2 \theta = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 \theta (4 \cdot \text{sen}^2 \theta - 1) = 0$$

Daí: $\text{sen}^2 \theta = 0 \Rightarrow \text{sen } \theta = 0 \therefore \theta = 0$ rad ou $\theta = \pi$ rad

$$4 \cdot \text{sen}^2 \theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad ou } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{sen } \theta = -\frac{1}{2} \therefore \theta \notin [0, \pi]$$

Portanto, os valores de θ são: $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ e π.

7 (Fuvest-SP) A elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

a) $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

b) $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

c) $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$

d) $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

e) $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

Resolução:

Os pontos de intersecção da elipse e da reta são obtidos resolvendo-se o sistema formado pelas suas equações. Assim, devemos ter: $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{9}{4} \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.

Então, $x^2 + \dfrac{(2x + 1)^2}{2} = \dfrac{9}{4}$, ou seja, $12x^2 + 8x - 7 = 0$.

$$x = \frac{-8 \pm 20}{24} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

Se $x_1 = \dfrac{1}{2}$, então $y_1 = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) + 1 \therefore y_1 = 2$.

Se $x_2 = -\dfrac{7}{6}$, então $y_2 = 2 \cdot \left(-\dfrac{7}{6}\right) + 1 \therefore y_2 = -\dfrac{4}{3}$.

Assim, temos: $A\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ e $B\left(-\dfrac{7}{6}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

O ponto médio de $\overline{AB}$ é $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Em questões como a 8, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

8 (UFMS) Sejam *a*, *b* e *c* números reais tais que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Com relação à equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ e sua representação geométrica num sistema cartesiano ortogonal de eixos XOY, é correto afirmar que:

(01) se a = b, então a equação dada é a equação de uma circunferência para qualquer valor não-nulo de *c*.

(02) se $a \neq b$ e $c \neq 0$, então a equação dada é a equação de uma elipse.

(04) se c = 0, então a equação dada é a equação de uma parábola.

(08) se a equação dada for a equação de uma circunferência, então o centro desta será sempre o ponto (0, 0) do sistema XOY.

(16) é possível, dependendo dos valores de *a*, *b* e *c*, que a equação dada seja a equação de uma hipérbole.

(32) se a equação dada for a equação de uma elipse, é possível que essa elipse tenha centro no ponto (a, b) do sistema XOY. 1 + 2 + 8 = 11

Resolução:

(01) Correta.

$a = b$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2c^2$

Considerando $a^2c^2 = r^2$, temos a equacão de uma circunferência: $x^2 + y^2 = r^2$.

(02) Correta.

$a \neq b$ e $c \neq 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2c^2} + \frac{y^2}{b^2c^2} = 1$, que é uma equação do tipo $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$, com $p^2 \neq q^2$.

Supondo $|a| \neq |b|$, temos uma elipse.

(04) Falsa.

$c = 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = 0$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a equação fica satisfeita apenas para $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, representa o ponto O(0, 0).

(08) Correta.

Se $a = b$, temos $x^2 + y^2 = r^2$, que é a equação de uma circunferência com centro em O(0, 0).

(16) Falsa.

Não é possível.

$a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0 \rightarrow$ ponto O(0, 0)

$a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0 \rightarrow$ elipse

(32) Falsa.

Não é possível, pois a equação não é do tipo $\frac{(x - a)^2}{p^2} + \frac{(y - b)^2}{q^2} = 1$, já que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

São corretas as afirmativas 1, 2 e 8, somando 11.

9 (MACK-SP) Os pontos do plano que satisfazem a equação $5x^2 + 3y^2 = 15$ representam:

a) uma parábola
b) uma elipse
c) um par de retas
d) uma circunferência
e) uma hipérbole

Resolução:

$$5x^2 + 3y^2 = 15 \Rightarrow \frac{5x^2}{15} + \frac{3y^2}{15} = \frac{15}{15}$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \text{ (elipse)}$$

10 Numa hipérbole, a excentricidade é $e = \sqrt{5}$ e os vértices são $A_1(2, 0)$ e $A_2(-2, 0)$. Determine as coordenadas dos focos da hipérbole. $F_1(2\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(-2\sqrt{5}, 0)$

Resolução:

$$\left.\begin{matrix} A_1(2, 0) \\ A_2(-2, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 2. \text{ E como } e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}, \text{ temos: } \frac{c}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}.$$

Como o eixo real está contido no eixo *x* e a origem da hipérbole é (0, 0), as coordenadas dos focos são $F_1 = (2\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (-2\sqrt{5}, 0)$.

11 (Fesp-UPE) Em relação à hipérbole de equação $x^2 - 3y^2 = 12$, assinale a alternativa falsa:

a) seu eixo real mede $4\sqrt{3}$
b) seu eixo imaginário mede 4
c) sua distância focal mede 8
d) sua excentricidade é $\sqrt{3}$
e) suas assíntotas são $\pm\sqrt{3}x - 3y = 0$

Resolução:

$x^2 - 3y^2 = 12 \rightarrow$ hipérbole

$$\frac{x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

De acordo com a equação, temos: $a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Cálculo de *c*: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

a) medida do eixo real: $A_1A_2 = 2a = 4\sqrt{3}$ (V)

b) medida do eixo imaginário: $B_1B_2 = 2b = 4$ (V)

c) distância focal: $F_1F_2 = 2c = 8$ (V)

d) excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (e não $\sqrt{3}$) (F)

e) assíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{2}{2\sqrt{3}}x$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow \pm\sqrt{3}x - 3y = 0 \quad \text{(V)}$$

12 (Efei-MG) Determine a área do triângulo cujos vértices estão situados sobre o vértice da parábola $y = -x^2 + 8x - 15$ e sobre a sua intersecção com o eixo das abscissas. 1 (u.a.)

Resolução:

No eixo das abscissas, $y = 0$.

$-x^2 + 8x - 15 = 0 \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = 5 \end{cases}$

$\therefore$ P(3, 0) e Q(5, 0)

$y = -x^2 + 8x - 15$

$y = -x^2 + 8x - 16 + 16 - 15$

$y = (-x + 4)^2 + 1$

$y - 1 = (-x + 4)^2 \therefore V(4, 1)$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$S = \frac{1}{2}|D| = 1 \text{ (u.a.)}$$

13 (Unicamp-SP) Sejam *A* e *B* os pontos de intersecção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

a) Quais as coordenadas dos pontos *A* e *B*? A(1, 1) e B(−1, 1)

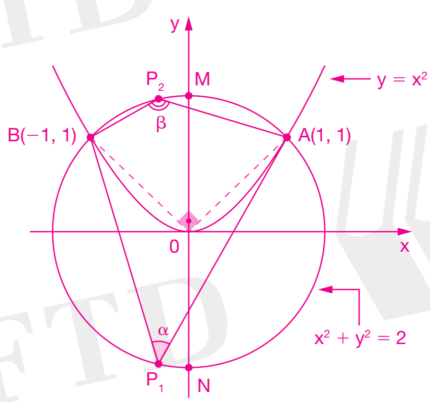
b) Se *P* é um ponto da circunferência diferente de *A* e de *B*, calcule as medidas possíveis para o ângulo $A\hat{P}B$.
45° ou 135°

Resolução:

A circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ tem equação $x^2 + y^2 = 2$.

a) A intersecção entre a parábola de equação $y = x^2$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$ é obtida pela resolução do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$, que determinam os pontos A(1, 1) e B(−1, 1).

b) Seja o gráfico abaixo, em que são representadas a parábola e a circunferência.



Notando que os arcos $\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{ANB}$ medem, respectivamente, 90° e 270°, conclui-se que as medidas possíveis dos ângulos $A\hat{P}B$ formados são:

$$\alpha = \frac{1}{2}\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = \frac{90°}{2} = 45°$$

$$\beta = \frac{1}{2}\text{med}(\overset{\frown}{ANB}) = \frac{270°}{2} = 135°$$

14 (PUC-SP) A equação do conjunto de pontos eqüidistantes da reta $y = -3$ e do ponto F(0, 3) é:

a) $x^2 = y$

b) $x^2 = \frac{y}{2}$

c) $x^2 = 4y$

d) $x^2 = 6y$

e) $x^2 = 12y$

Resolução:

Uma equação reduzida da parábola de foco F(0, p) e diretriz $y = -p$ é: $x^2 = 4py$.

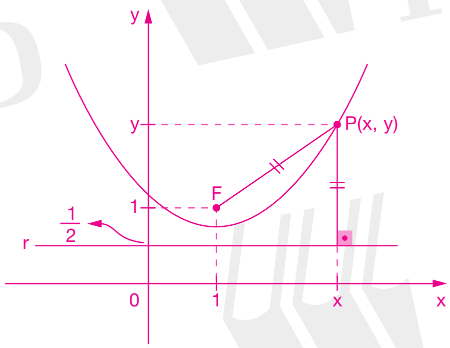
Sendo $p = 3$, temos: $x^2 = 4 \cdot 3 \cdot y \Rightarrow x^2 = 12y$.

15 (UFG) Uma parábola é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta *r*, chamada diretriz da parábola, e de um ponto *F*, chamado foco da parábola.

Encontre a equação da parábola cuja diretriz é a reta $y = \frac{1}{2}$ e cujo foco é o ponto (1, 1). Faça um esboço dessa parábola. $y = x^2 - 2x + \frac{7}{4}$

Resolução:

Fazendo uma ilustração inicial do enunciado, temos:



Pela definição da parábola dada, temos: d(P, F) = d(P, r). (I)

Pela figura: $d(P, r) = y - \frac{1}{2}$. (II)

Cálculo da distância de *P* a *F*:

$d(P, F) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} =$

$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1}$ (III)

Substituindo (II) e (III) em (I):

$\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2} = y - \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 = y^2 - y + \frac{1}{4} \Rightarrow$

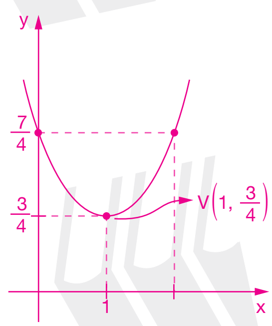
$\Rightarrow y = x^2 - 2x + \frac{7}{4}$

O vértice da parábola tem coordenadas:

$x_v = \frac{-b}{2a} \therefore x_v = \frac{2}{2} = 1; y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 + \frac{7}{4} \therefore y_v = \frac{3}{4}$, então, $V\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

A parábola corta o eixo Oy no ponto Q(0, q): $q = 0^2 - 2 \cdot 0 + \frac{7}{4} \therefore Q = \left(0, \frac{7}{4}\right)$.

Esboço da parábola:



16 (PUC-MG) Os pontos A(10, 1) e B(m, 2) pertencem a uma parábola de vértice na origem e eixo *y*. O valor de *m* é igual a:

a) $5\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $15\sqrt{2}$

d) $20\sqrt{2}$

e) $25\sqrt{2}$

Resolução:

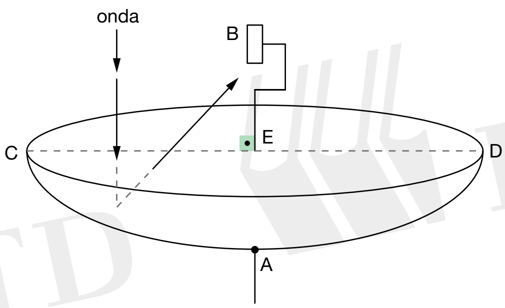
Equação da parábola: $x^2 = 4py$

Se A(10, 1) pertence à curva, temos: $10^2 = 4p \cdot 1 \Rightarrow p = 25$.

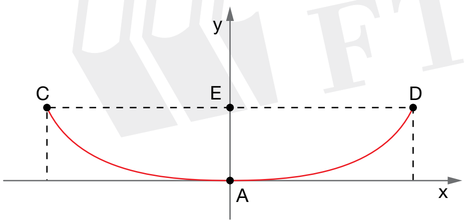
Logo, a equação é $x^2 = 100y$.

Como B(m, 2) também pertence à parábola, vem: $m^2 = 100 \cdot 2 \Rightarrow m = 10\sqrt{2}$.

17 (UERJ) A superfície de uma antena parabólica pode ser gerada pela rotação completa de uma parábola ao redor do seu eixo. A intersecção dessa superfície com qualquer plano perpendicular ao eixo é um círculo. Observe a figura abaixo:



Considere um círculo de centro (E) e diâmetro ($\overline{CD}$) de 4 metros de comprimento, cuja medida da distância do centro (E) ao vértice (A) do parabolóide é 0,5 metro.



a) Escreva a equação cartesiana da parábola de foco (B) contida no plano CAD, sendo o vértice (A) a origem do sistema cartesiano e o eixo das abscissas paralelo ao diâmetro $\overline{CD}$, como mostra a figura ao lado. $y = \frac{1}{8}x^2$

b) Calcule a distância do vértice (A) ao foco (B). 2 m

Resolução:

A equação da parábola é do tipo $x^2 = 4py$.

$\left(2, \frac{1}{2}\right) \in$ à parábola, então: $2^2 = 4p\frac{1}{2} \Rightarrow 8 = 4p \Rightarrow p = 2$

a) $x^2 = 8y \Rightarrow y = \frac{x^2}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2$

b) $d(A, B) = p = 2$ m

18 (Fuvest-SP) Determine a equação de uma das retas que passa pelo ponto (0, 0) e é tangente à parábola de equação $y = x^2 + 4$. $y = 4x$ ou $y = -4x$

Resolução:

Seja *t* uma das retas procuradas.

Como $(0, 0) \in t$, temos: $y - 0 = m(x - 0) \Rightarrow y = mx$.

t é tangente à parábola (λ), então: $t \cap \lambda = \{A\}$

$$\begin{cases} y = mx & \text{(I)} \\ y = x^2 + 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), vem: $x^2 + 4 = mx \Rightarrow x^2 - mx + 4 = 0$

Como devemos ter solução única:

$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4$

Portanto, *t*: $y = 4x$ ou $y = -4x$.