Matemática

M10 – Função logarítmica

p. 37

1 Sendo f uma função dada por $f(x) = \log_2 8x^4$, calcule o valor de f(512). 39

Resolução:

$f(x) = \log_2 8x^4$

$f(512) = \log_2 8 \cdot 512^4 = \log_2 8 + 4 \cdot \log_2 2^9 = \log_2 2^3 + 4 \cdot \log_2 2^9 = 3 + 36 = 39$

$f(512) = 39$

2 A expressão $4^{\log_2 5} - \log_3 9^5$ é igual a:

a) 15
b) 18
c) 20
d) 22
e) 25

Resolução:

$4^{\log_2 5} - \log_3 9^5$

$2^{2 \cdot \log_2 5} - 5 \cdot \log_3 3^2 = 2^{\log_2 25} - 10 = 25 - 10 = 15$

3 Calcule $y = 3^{x-2}$, sendo $x = \log_3 5$. $\frac{5}{9}$

Resolução:

$y = 3^{x-2}$

$x = \log_3 5$

$$y = 3^{\log_3 5 - 2\log_3 3} = 3^{\log_3 5 - \log_3 9} = 3^{\log_3 \frac{5}{9}} = \frac{5}{9}$$

4 Resolva a expressão $2^{2\log_2 5 - \log_2 15}$. $\frac{5}{3}$

Resolução:

$$A = 2^{2\log_2 5 - \log_2 15} = 2^{\log_2 5^2 - \log_2 15} = 2^{\log_2 \frac{25}{15}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

5 Determine o valor da expressão $\log_k (k^2 \cdot \sqrt[3]{k})$. $\frac{7}{3}$

Resolução:

$$A = \log_k (k^2 \cdot \sqrt[3]{k}) = \log_k k^2 + \log_k \sqrt[3]{k} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

6 Os logaritmos da expressão apresentada a seguir são todos na base 10. Calcule o valor de *E*.

$$E = \frac{1 + \log 1000}{2 - \log 0{,}001} \quad \frac{4}{5}$$

Resolução:

$$E = \frac{1 + \log_{10} 10^3}{2 - \log_{10} 10^{-3}} = \frac{1 + 3}{2 + 3} = \frac{4}{5}$$

7 O valor de $\log_4 (16 \cdot \log_2 (4 \cdot \log_3 81))$ é:

a) 6
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

Resolução:

$\log_4 (16 \cdot \log_2 (4 \cdot \log_3 81))$

$A = \log_4 (16 \cdot \log_2 (4 \cdot \log_3 3^4)) = \log_4 (16 \cdot \log_2 16) = \log_4 (16 \cdot \log_2 2^4) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

p. 40

8 Considerando p, q, r, x, y números reais positivos na equação $\log_3 \frac{p}{q} + \log_3 \frac{q}{r} - \log_3 \frac{py}{rx} = 2$, assinale a alternativa correta.

a) $x = 9y$
b) $y = 3x$
c) $x = 6y$
d) $y = 9x$
e) $x = 3y$

Resolução:

$$\log_3 \frac{p}{q} + \log_3 \frac{q}{r} - \log_3 \frac{py}{rx} = 2$$

$$\log_3 \frac{\frac{p}{q}}{\frac{py}{rx}} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = 3^2 \rightarrow x = 9y$$

9 Sendo $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule $\log 45$. 1,66

Resolução:

Pelos dados, temos:

$$\log 45 = \log 3^2 \cdot 5 = \log 3^2 + \log 5 = 2 \cdot \log 3 + \log \frac{10}{2} = 2 \log 3 + \log 10 - \log 2 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}48 + 1 - 0{,}3 = 1{,}66$$

10 Sabendo que *p* e *q* são números reais positivos e $p \neq 1$, qual a alternativa que satisfaz o valor de *x* em $p^{x-1} = pq$?

a) $1 - \log_p q$
b) $2 - \log_p q$
c) $1 + \log_p q$
d) $2 + \log_p q$
e) $2 \cdot \log_p q$

Resolução:

$p^{x-1} = pq$

$\log_p p^{x-1} = \log_p pq \rightarrow x - 1 = \log_p p + \log_p q \rightarrow x = 2 + \log_p q$

11 Qual é o valor de $\frac{p}{q}$ se $\log_3 p - \log_3 q = -1$? $\frac{1}{3}$

Resolução:

$\log_3 p - \log_3 q = -1$

$\log_3 \frac{p}{q} = -1 \rightarrow \frac{p}{q} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

12 Se $a = \log 2$ e $b = \log 3$, então $\log \frac{9\sqrt{2}}{4\sqrt[3]{3}}$ é igual a:

a) $\frac{10b - 9a}{6}$
b) $\frac{12b - 3a}{6}$
c) $\frac{10b - 9a}{3}$
d) $\frac{9b - 10a}{3}$
e) $\frac{9b - 12a}{6}$

Resolução:

$a = \log 2;\ b = \log 3$

$\log \frac{9\sqrt{2}}{4\sqrt[3]{3}} = \log 9\sqrt{2} - \log 4\sqrt[3]{3} = \log 3^2 + \log 2^{\frac{1}{2}} - \log 2^2 - \log 3^{\frac{1}{3}} =$

$= 2 \cdot \log 3 + \frac{1}{2}\log 2 - 2\log 2 - \frac{1}{3}\log 3 = 2b + \frac{1}{2}a - 2 \cdot a - \frac{1}{3}b = \frac{10b - 9a}{6}$

13 Sejam $x = \log_3 a$ e $y = \log_3 \frac{a}{3}$, em que *a* é um número real positivo, calcule o valor de $x - y$. 1

Resolução:

$x = \log_3 a;\ y = \log_3 \frac{a}{3}$

$x - y = \log_3 a - \log_3 \frac{a}{3} = \log_3 \frac{a}{\frac{a}{3}} = \log_3 3 = 1$

14 O valor da expressão $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{6}{4} + \log_2 \frac{8}{5} + \log_2 \frac{10}{6}$ é:

a) 2
b) $2 \cdot \log_2 3$
c) $3 - \log_2 3$
d) $\frac{1}{3}$
e) $1 + \log_2 \frac{1}{3}$

Resolução:

$\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{6}{4} + \log_2 \frac{8}{5} + \log_2 \frac{10}{6} =$

$= \log_2 2 - \log_2 3 + \log_2 2 \cdot 3 - \log_2 2^2 + \log_2 2^3 - \log_2 5 + \log_2 2 \cdot 5 - \log_2 2 \cdot 3 =$

$= \log_2 2 - \log_2 3 + \log_2 2 + \log_2 3 - 2 \cdot \log_2 2 + 3 \cdot \log_2 2 - \log_2 5 + \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 2 - \log_2 3 =$

$= 3 \cdot \log_2 2 - \log_2 3 = 3 - \log_2 3$

p. 42

15 Sabendo que $\log 3 = 0{,}477$, calcule:

a) $\log 0{,}09$ $-1{,}046$
b) $\log 270$ $2{,}431$
c) $\log 8{,}1$ $0{,}90848...$

Resolução:

$\log 3 = 0{,}477$

a) $\log 0{,}09 = \log \frac{9}{100} = \log 9 - \log 100 = \log 3^2 - \log 10^2 = 2 \log 3 - 2 \log 10 =$

$= 2 \cdot 0{,}477 - 2 = -1{,}046$

b) $\log 270 = \log 27 \cdot 10 = \log 27 + \log 10 = \log 3^3 + 1 = 3 \log 3 + 1 = 3 \cdot 0{,}477 + 1 = 2{,}431$

c) $\log 8{,}1 = \log \frac{81}{10} = \log 81 - \log 10 = \log 3^4 - 1 = 4 \log 3 - 1 = 4 \cdot 0{,}477 - 1 = 0{,}908$

16 Sendo $E = \log 0{,}0001 + \log 1\,000$, então *E* é igual a:

a) -3
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

Resolução:

$E = \log 0{,}0001 + \log 1\,000$

$E = \log \frac{1}{10\,000} + \log 10^3 = \log 1 - \log 10^4 + \log 10^3 = 0 - 4 \cdot \log 10 + 3 \cdot \log 10 = 0 - 4 + 3 = -1$

17 Considere um número real *x*, positivo e diferente de 1. Calcule o valor da expressão $\log_{x^2} x + \log_x x^2$. $\frac{5}{2}$

Resolução:

$\log_{x^2} x + \log_x x^2 = \frac{\log x}{\log x^2} + \frac{\log x^2}{\log x} = \frac{\log x}{2 \log x} + \frac{2 \log x}{\log x} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

18 Sabendo que $\log_5 2 = a$, qual o valor de $\log_2 50$?

a) $\frac{a}{2 + a}$ m

b) $\frac{a + 1}{a + 2}$

c) $\frac{a - 1}{a + 2}$

d) $\frac{a + 1}{2}$

e) $\frac{a + 2}{a}$

Resolução:

$\log_5 2 = a$

$\log_2 50 = \log_2 25 \cdot 2 = \log_2 25 + \log_2 2 = \log_2 5^2 + 1 = 2 \log_2 5 + 1 = 2 \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 2} + 1 =$

$= \frac{2}{a} + 1 = \frac{2 + a}{a}$

19 A expressão $\log_{a^2} a + \log_{a^3} a + \log_{a^4} a$ é igual a:

a) $\frac{13}{12}$

b) $\frac{9}{13}$

c) 1

d) $\frac{7}{12}$

e) $\frac{3}{4}$

Resolução:

$\log_{a^2} a + \log_{a^3} a + \log_{a^4} a = \frac{\log_a a}{2 \log_a a} + \frac{\log_a a}{3 \log_a a} + \frac{\log_a a}{4 \log_a a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$

20 Resolva a equação $12^x = 15$, sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$. 1,090

Resolução:

$12^x = 15 \rightarrow \log_{12} 15 = x$

$x = \frac{\log 15}{\log 12} = \frac{\log 3 \cdot 5}{\log 2^2 \cdot 3} = \frac{\log 3 + \log 5}{2 \log 2 + \log 3} = \frac{\log 3 + \log 10 - \log 2}{2 \log 2 + \log 3}$

$x = \frac{0{,}477 + 1 - 0{,}301}{2 \cdot 0{,}301 + 0{,}477} = \frac{1{,}176}{1{,}079} = 1{,}090$

p. 45

21 Se f é uma função definida por $f(x) = \log_{(k - 2)} (x^2 + 2)$, quais são os valores de k que tornam f decrescente? $2 < k < 3$

Resolução:

f será decrescente se $0 < k - 2 < 1 \rightarrow 2 < k < 3$

22 Determine o domínio de $f(x) = \log_{(x + 1)} (-2x + 8)$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < k < 4 \text{ e } x \neq 0\}$

Resolução:

Para que exista essa função, devemos ter: $-2x + 8 > 0$, $x + 1 > 0$ e $x + 1 \neq 1$.

$-2x + 8 > 0 \rightarrow x < 4$

$x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

$x + 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 0$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4 \text{ e } x \neq 0\}$.

23 Qual é o domínio da função definida por $f(x) = \log_x (x^2 + 3x)$? $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

Resolução:

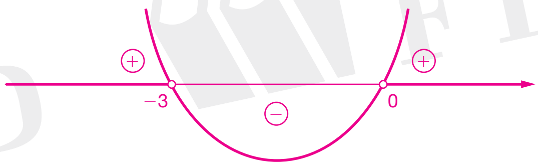
Para $f(x) = \log_x (x^2 + 3x)$, devemos ter: $x^2 + 3x > 0$, $x > 0$ e $x \neq 1$.

$x^2 + 3x > 0$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ a concavidade está voltada para cima

zeros de *f*:

$x^2 + 3x = 0 \rightarrow x \cdot (x + 3) = 0 \rightarrow x' = 0$ e $x'' = -3$



Como $x > 0$ e $x \neq 1$, temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

24 Sejam *a* um número positivo e diferente de 1 e *f* uma função crescente dada por $f(x) = \log_a x$. Determine *a*, sabendo que $f(a^3) = b$ e $f\left(\frac{5}{2}a - 1\right) = b - 1$. $a = 2$

Resolução:

$f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

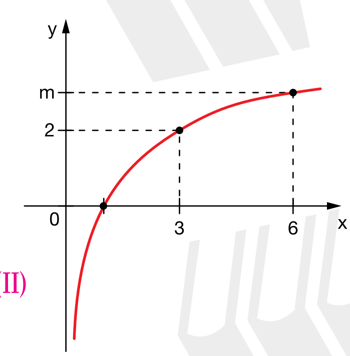
$f(a^3) = b \rightarrow \log_a a^3 = 3 \log_a a = 3 = b \rightarrow b = 3$

$f\left(\frac{5}{2}a - 1\right) = b - 1 \rightarrow \log_a\left(\frac{5}{2}a - 1\right) = 3 - 1 = 2 \rightarrow a^2 = \frac{5}{2}a - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot a^2 - 5a + 2 = 0 \rightarrow a = 2$ ou $a = \frac{1}{2}$

Como a função é crescente, $a > 1$; portanto, $a = 2$.

25 A figura mostra o gráfico da função dada por $f(x) = \log_2 \frac{kx}{m}$. Obtenha o ponto em que o gráfico intersecta o eixo *x*. $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$



Resolução:

Observando o gráfico da função, temos:

para $x = 3, y = 2 \rightarrow \log_2 \frac{k \cdot 3}{m} = 2 \rightarrow 3 \cdot \frac{k}{m} = 2^2$ (I)

para $x = 6, y = m \rightarrow \log_2 \frac{k \cdot 6}{m} = m \rightarrow 6 \cdot \frac{k}{m} = 2^m \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot \frac{k}{m} = 2^m$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos: $2 \cdot 2^2 = 2^m \rightarrow m = 3$ e $k = 4$.

No ponto em que o gráfico intercepta o eixo *x*, $y = 0$; então:

$\log_2 \frac{kx}{m} = 0 \rightarrow \frac{kx}{m} = 2^0$

Substituindo *k* e *m*, temos: $x = \frac{3}{4}$.

$\therefore P\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

26 Resolva as equações:

a) $\log_{12} 2x = 1$ $S = \{6\}$

b) $\log_3 (51 - 4x) = 3$ $S = \{6\}$

c) $\log_8 (2x + 2) - \log_8 (x + 5) = 0$ $S = \{3\}$

Resolução:

a) condição de existência: $2x > 0 \rightarrow x > 0$

definição de log $\rightarrow 2x = 12^1 \rightarrow x = 6$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{6\}$

b) condição de existência: $51 - 4x > 0 \rightarrow x < \frac{51}{4} \rightarrow x < 12{,}75$

definição de log $\rightarrow 51 - 4x = 3^3 \rightarrow -4x = 27 - 51 \rightarrow x = 6$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{6\}$

c) condições de existência: $2x + 2 > 0$ e $x + 5 > 0 \rightarrow x > -1$ e $x > -5 \rightarrow x > -1$

$\log_8 (2x + 2) = \log_8 (x + 5)$

igualdade de log $\rightarrow 2x + 2 = x + 5 \rightarrow x = 3$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{3\}$

27 Determine o conjunto solução das equações:

a) $\log_x 16 + \log_{x^2} 16 = 6$ $S = \{2\}$

b) $\log_x \frac{x}{4} + \log_x (x + 6) = \log_x (x + 2)$ $S = \{2\}$

Resolução:

a) condições de existência: $x > 0, x \neq 1, x^2 > 0$ e $x^2 \neq 1 \rightarrow x > 0$ e $x \neq 1$

Usando a mudança de base, temos: $\log_x 16 + \frac{\log_x 16}{\log_x x^2} = 6$

$\log_x 16 = a$

$a + \frac{a}{2} = 6 \rightarrow 2 \cdot a + a = 12 \rightarrow a = 4$

$\log_x 16 = 4 \rightarrow x^4 = 2^4 \rightarrow x = 2$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{2\}$

b) condições de existência: $\frac{x}{4} > 0, x + 6 > 0, x + 2 > 0, x > 0$ e $x \neq 1 \rightarrow x > 0$ e $x \neq 1$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log_x \frac{x}{4} \cdot (x + 6) = \log_x (x + 2)$

igualdade de log $\rightarrow \frac{x}{4} \cdot (x + 6) = x + 2 \rightarrow x^2 + 6x = 4x + 8 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 4) \cdot (x - 2) = 0 \rightarrow x = -4$ (não satisfaz a condição de existência) ou $x = 2$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{2\}$

28 Qual o conjunto solução da equação $1 + \log_3 x = \log_x 9$? $S = \left\{3, \frac{1}{9}\right\}$

Resolução:

$1 + \log_3 x = \log_x 9$

condições de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$

Usando a mudança de base, temos:

$$1 + \log_3 x = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 x}$$

Fazendo $\log_3 x = a \rightarrow 1 + a = \frac{2}{a} \rightarrow a + a^2 - 2 = 0 \rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (a + 2) \cdot (a - 1) = 0 \rightarrow a = -2$ ou $a = 1$

Se $a = -2 \rightarrow \log_3 x = -2 \rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ (satisfaz a condição de existência)

Se $a = 1 \rightarrow \log_3 x = 1 \rightarrow x = 3$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \left\{\frac{1}{9}, 3\right\}$

29 Resolva as equações:

a) $\log_4 (\log_x 9) = \frac{1}{2}$ $S = \{3\}$

b) $(\log_6 x)^2 + 3 \cdot \log_6 x = 10$ $S = \left\{\frac{1}{6^5}, 36\right\}$

Resolução:

a) condições de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$

$\log_x 9 = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow x^2 = 3^2 \rightarrow x = 3$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{3\}$

b) condição de existência: $x > 0$

Fazendo $\log_6 x = a$, temos:

$a^2 + 3 \cdot a - 10 = 0 \rightarrow (a + 5) \cdot (a - 2) = 0 \rightarrow a = -5$ ou $a = 2$

Se $a = -5 \rightarrow \log_6 x = -5 \rightarrow x = 6^{-5} = \frac{1}{6^5}$ (satisfaz a condição de existência)

Se $a = 2 \rightarrow \log_6 x = 2 \rightarrow x = 6^2 = 36$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \left\{\frac{1}{6^5}, 36\right\}$

30 Ache o conjunto solução das equações:

a) $\log_3 (x + 3) + \log_3 (x - 3) = 3$ $S = \{6\}$

b) $\log_2 (2x - 2) + 1 = \log_2 \left(\frac{7x}{2} + 2\right)$ $S = \{12\}$

Resolução:

a) condições de existência: $x + 3 > 0$, $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log_3 (x + 3) \cdot (x - 3) = 3 \rightarrow x^2 - 9 = 27 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$

Se $x = 6$ (satisfaz a condição de existência)

Se $x = -6$ (não satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{6\}$

b) condições de existência: $2x - 2 > 0$, $\frac{7x}{2} + 2 > 0 \rightarrow x > 1$

$\log_2 (2x - 2) - \log_2 \left(\frac{7x}{2} + 2\right) = -1$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos:

$$\log_2 \frac{2x - 2}{\frac{7x}{2} + 2} = -1 \rightarrow \frac{2x - 2}{\frac{7x}{2} + 2} = 2^{-1} \rightarrow \frac{2x - 2}{\frac{7x}{2} + 2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow 4x - 4 = \frac{7x}{2} + 2 \rightarrow 8x - 8 = 7x + 4 \rightarrow x = 12$ (satisfação a condição de existência)

$\therefore S = \{12\}$

31 Qual o conjunto solução da equação $\log_5 (x + 1)^3 + \log_5 (x + 1) = 4 + \log_5 (x + 1)^2$? $S = \{24\}$

Resolução:

condição de existência: $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

$3 \log_5 (x + 1) + \log_5 (x + 1) = 4 + 2 \log_5 (x + 1)$

Fazendo $\log_5 (x + 1) = a$, temos:

$3a + a = 4 + 2a \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$

$\log_5 (x + 1) = 2 \rightarrow x + 1 = 5^2 \rightarrow x = 24$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{24\}$

32 Resolva o sistema $\begin{cases} \log x + \log y = \log 200 \\ x + y = 30 \end{cases}$ $x = 10$ e $y = 20$ ou $x = 20$ e $y = 10$

Resolução:

condições de existência: $x > 0$ e $y > 0$

$\begin{cases} \log x + \log y = \log 200 \rightarrow \log xy = \log 200 \rightarrow xy = 200 \quad \text{(I)} \\ x + y = 30 \rightarrow x = 30 - y \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$(30 - y)y = 200 \rightarrow y^2 - 30y + 200 = 0 \rightarrow (y - 20) \cdot (y - 10) = 0 \rightarrow y = 10$ ou $y = 20$

Se $y = 10 \rightarrow x = 20$ e,

se $y = 20 \rightarrow x = 10$.

$\therefore S = \{(10, 20)$ ou $(20, 10)\}$

33 Determine os números reais *a* e *b*, de modo que $\begin{cases} \log_4 a + \log_4 b = 3 \\ \log_2 a - \log_2 b = 2 \end{cases}$ a = 16 e b = 4

Resolução:

condição de existência: $a > 0$ e $b > 0$

$$\begin{cases} \log_4 a + \log_4 b = 3 \rightarrow \log_4 ab = 3 \rightarrow ab = 2^6 \quad \text{(I)} \\ \log_2 a - \log_2 b = 2 \rightarrow \log_2 \frac{a}{b} = 2 \rightarrow \frac{a}{b} = 2^2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos $a = 4b$; substituindo em (I), vem: $4bb = 2^6 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = \pm 4$

Se $b = 4 \rightarrow a = 16$ (satisfaz a condição de existência)

Se $b = -4 \rightarrow a = -16$ (não satisfaz a condição de existência)

Portanto, $a = 16$ e $b = 4$.

34 Resolva a equação $\log_6 x + \log_{36} x = 3$. $S = \{36\}$

Resolução:

condição de existência: $x > 0$

$$\log_6 x + \log_{36} x = 3 \rightarrow \log_6 x + \frac{\log_6 x}{\log_6 36} = 3$$

Fazendo $\log_6 x = a$:

$$a + \frac{a}{2} = 3 \rightarrow 2a + a = 6 \rightarrow a = 2$$

$\log_6 x = 2 \rightarrow x = 6^2 = 36$ (satisfaz a condição de existência)

$\therefore S = \{36\}$

35 Determine o número inteiro *n*, tal que $\log_{100} n = 2 - \log \sqrt{n}$. $n = 100$

Resolução:

condição de existência: $n > 0 \rightarrow \sqrt{n} > 0 \rightarrow n > 0$

$$\log_{100} n = 2 - \log \sqrt{n}$$

$$\frac{\log n}{\log 100} = 2 - \frac{1}{2} \log n$$

Fazendo $\log n = a$:

$$\frac{a}{2} = 2 - \frac{a}{2} \rightarrow a = 4 - a \rightarrow a = 2$$

$\log n = 2 \rightarrow n = 10^2 = 100$ (satisfaz a condição de existência)

36 Qual é o conjunto solução da inequação $\log_2 (2x - 1) \geqslant 3$? $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{9}{2}\right\}$

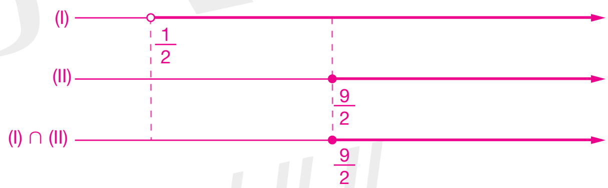
Resolução:

condição de existência: $2x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$ (I)

$\log_2 (2x - 1) \geqslant 3 \log_2 2 \rightarrow \log_2 (2x - 1) \geqslant \log_2 2^3 \rightarrow$ base > 1

$2x - 1 \geqslant 2^3 \rightarrow 2x \geqslant 9 \rightarrow x \geqslant \frac{9}{2}$ (II)

Fazendo (I) $\cap$ (II), temos:



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{9}{2}\right\}$

37 Resolva a inequação $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 5) > 3$. $\{x \in \mathbb{R} | x > 8\}$

Resolução:

condições de existência: $x + 1 > 0$, $x - 5 > 0 \rightarrow x > 5$ (I)

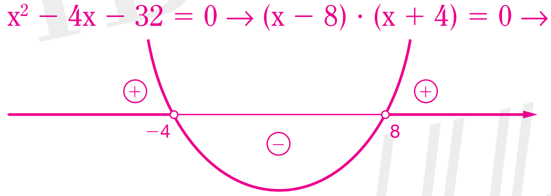
$\log_3 (x + 1) \cdot (x - 5) > 3 \cdot \log_3 3 \rightarrow \log_3 (x + 1) \cdot (x - 5) > \log_3 3^3 \rightarrow$ base > 1

$(x + 1) \cdot (x - 5) > 3^3 \rightarrow x^2 - 4x - 5 > 27 \rightarrow x^2 - 4x - 32 > 0$

$a = 1 \rightarrow$ a concavidade está voltada para cima

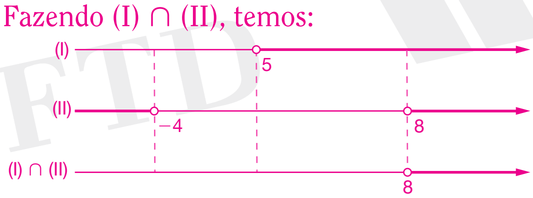
zeros de *f*:

$x^2 - 4x - 32 = 0 \rightarrow (x - 8) \cdot (x + 4) = 0 \rightarrow x' = 8$ e $x'' = -4$



$x < -4$ ou $x > 8$ (II)

Fazendo (I) $\cap$ (II), temos:



$S = \{x \in \mathbb{R} | x > 8\}$

38 Resolva a inequação $\log_3\left(\log_{\frac{2}{3}} x\right) > 1$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{8}{27}\right\}$

Resolução:

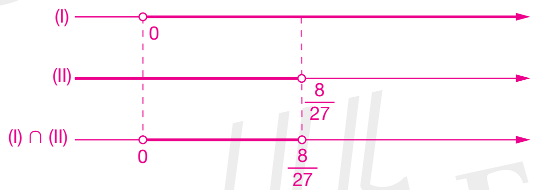
condição de existência: $x > 0$ (I)

$\log_3\left(\log_{\frac{2}{3}} x\right) > \log_3 3 \rightarrow$ base > 1

$\log_{\frac{2}{3}} x > 3 \rightarrow \log_{\frac{2}{3}} x > 3 \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} \rightarrow \log_{\frac{2}{3}} x > \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \rightarrow$ base < 1

$x < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \rightarrow x < \frac{8}{27}$ (II)

Fazendo (I) ∩ (II), temos:



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{8}{27}\right\}$

39 Resolva a inequação $(\log_3 x)^2 > \log_3 x + 6$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{9} \text{ ou } x > 27\right\}$

Resolução:

condição de existência: $x > 0$ (I)

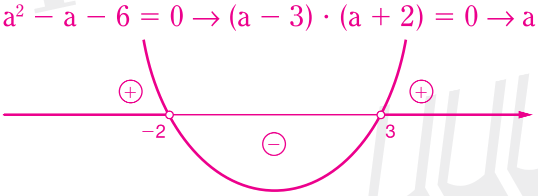
Fazendo $\log_3 x = a$:

$a^2 - a - 6 > 0$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ a concavidade está voltada para cima

zeros de *f*:

$a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow (a - 3) \cdot (a + 2) = 0 \rightarrow a = 3$ ou $a = -2$



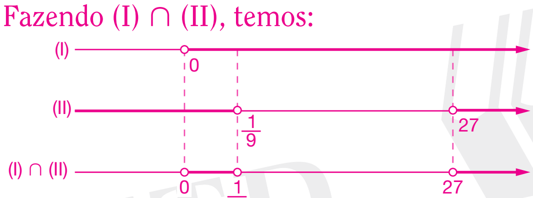
$a < -2$ ou $a > 3$

Se $\log_3 x < -2 \rightarrow \log_3 x < -2 \log_3 3 \rightarrow \log_3 x < \log_3 3^{-2} \rightarrow$ base $> 1 \rightarrow x < \frac{1}{9}$

Se $\log_3 x > 3 \rightarrow \log_3 x > 3 \log_3 3 \rightarrow \log_3 x > \log_3 3^3 \rightarrow$ base $> 1 \rightarrow x > 27$

Então, $x < \frac{1}{9}$ ou $x > 27$ (II)

Fazendo (I) ∩ (II), temos:



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{9} \text{ ou } x > 27\right\}$

40 Considerando a função definida por $f(x) = \log_5 (2x^2 - 5x + 2)$:

a) determine o domínio de f; —— $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

b) determine o conjunto E dos valores de x, para os quais $f(x)$ é positivo. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x > \frac{5 + \sqrt{17}}{4}\right\}$

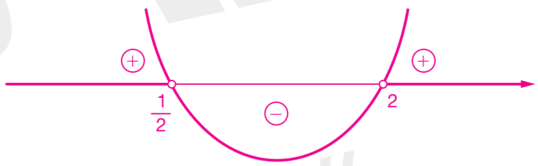
Resolução:

a) Pelos dados, devemos ter: $2x^2 - 5x + 2 > 0$.

$a = 2 > 0 \rightarrow$ a concavidade está voltada para cima

zeros de f:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = \frac{1}{2}$$



$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$$

b) $\log_5 2x^2 - 5x + 2 > 0$

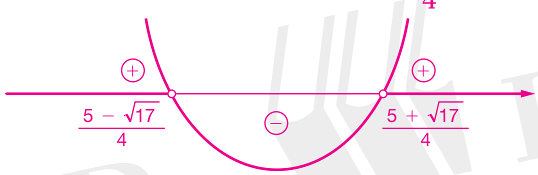
$\log_5 2x^2 - 5x + 2 > \log_5 1$

base $> 1 \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 > 1$

$a = 2 > 0 \rightarrow$ a concavidade está voltada para cima

zeros de f:

$$2x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$



$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x > \frac{5 + \sqrt{17}}{4}\right\}$$

41 Resolva a inequação $\log_x \log_{\frac{1}{x}} 4 > 0$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$

Resolução:

$\log_x \log_{\frac{1}{x}} 4 > 0,\ x > 0 \text{ e } x \neq 1$

$$\text{Se } x > 1 \rightarrow \log_x \log_{\frac{1}{x}} 4 > \log_x 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{x}} 4 > 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{x}} 4 > \log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \rightarrow 4 < \frac{1}{x} \rightarrow x < \frac{1}{4}$$

$$\text{Se } 0 < x < 1 \rightarrow \log_x \log_{\frac{1}{x}} 4 > \log_x 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{x}} 4 < 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{x}} 4 < \log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} > 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 < \frac{1}{x} \rightarrow x < \frac{1}{4}$$

Então, temos $x > 0$ e $x < \frac{1}{4}$; logo, $0 < x < \frac{1}{4}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$$