TERCEIRÃO FTD 4

Matemática

M22 – Números Complexos

p. 54

1 Resolva as equações no campo dos números complexos.

a) $x^2 + 2x + 2 = 0$ $\{-1 + i, -1 - i\}$

b) $3x^2 + 4x + 8 = 0$ $\left\{\frac{-2}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3}i, \frac{-2}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{3}i\right\}$

Resolução:

a) $x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 \Rightarrow \Delta = -4$

- Cálculo das raízes

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{-2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = -1 \pm i \therefore S = \{-1 + i, -1 - i\}$

b) $3x^2 + 4x + 8 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 \Rightarrow \Delta = 16 - 96 \Rightarrow \Delta = -80$

- Cálculo das raízes

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-80}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 4i\sqrt{5}}{6}$

$x = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{5}}{3} \therefore S = \left\{\frac{-2}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3}i, \frac{-2}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{3}i\right\}$

2 (Esam-RN) Se $(a + 3i)(1 + 2i) = b + 5i$, então $a + b$ é:

a) -5

b) -4

c) 1

d) 4

e) 5

Resolução:

$(a + 3i)(1 + 2i) = b + 5i$

$a + 2ai + 3i + 6i^2 = b + 5i$

$(a - 6) + (2a + 3)i = b + 5i$

Da igualdade, temos: $\begin{cases} a - 6 = b & \text{(I)} \\ 2a + 3 = 5 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo o sistema: $a = 1$ e $b = -5$

Então, $a + b = 1 + (-5) = -4$.

3 Qual é o conjugado do número complexo $z = \frac{4}{1 - i}$? $2 - 2i$

Resolução:

$z = \frac{4}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{4 + 4i}{1 - i^2} = 2 + 2i$

$\bar{z} = 2 - 2i$

4 (Unimep-SP) O número complexo $\frac{3 + i}{m - i}$ tem a parte imaginária nula. O valor do número real *m* é:

a) -3
b) 3
c) 0
d) 1
e) -1

Resolução:

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, temos:

$$\frac{3 + i}{m - i} \cdot \frac{m + i}{m + i} = \frac{3m + 3i + mi - 1}{m^2 + 1} = \frac{(3m - 1)}{m^2 + 1} + \frac{(3 + m)i}{m^2 + 1}$$

Como a parte imaginária é nula, temos:

$$\frac{3 + m}{m^2 + 1} = 0 \Rightarrow m = -3$$

5 (Unic-MT) Para que o número $Z = (x - 3i) \cdot (3 + xi)$ seja real, devemos ter ($x \in \mathbb{R}$) tal que:

a) $x = 0$
b) $x = \pm\frac{1}{3}$
c) $x = \pm 9$
d) $x = \pm 3$
e) nenhum $x \in \mathbb{R}$ satisfaz a condição.

Resolução:

$z = (x - 3i)(3 + xi) \Rightarrow z = 3x + x^2i - 9i + 3x$

$z = 6x + (x^2 - 9)i$

z é real $\Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$x = \pm 3$

6 (UFSM-RS) A soma dos números complexos $\frac{5 + 5i}{1 + i}$ e $\frac{20}{1 - i}$ é:

a) $\frac{25 + 5i}{2}$
b) $10 + 10i$
c) $-10 - 10i$
d) $15 + 10i$
e) $30 + 20i$

Resolução:

$$\frac{5 + 5i}{1 + i} + \frac{20}{1 - i} = \frac{5(1 + i)}{1 + i} + \frac{20(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = 5 + \frac{20 + 20i}{2} = 15 + 10i$$

7 (UCS-RS) Multiplicando-se o número complexo $z = 2 + 2i$ pela unidade imaginária *i*, obtém-se um número complexo cuja representação, no plano, corresponde a um ponto pertencente à reta de equação:

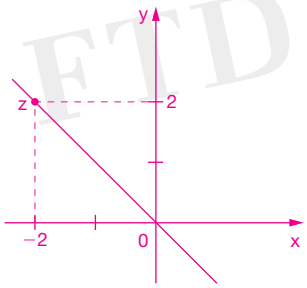
a) $y = -x$
b) $y = -2x + 2$
c) $y = x$
d) $y = -2x$
e) $y = 2x$

Resolução:

$z = 2 + 2i$

$z \cdot i = (2 + 2i)i \Rightarrow z \cdot i = 2i - 2$

A representação de *z* corresponde a um ponto da bissetriz dos quadrantes pares: $y = -x$.



8 (UFPA) Numa PG de quatro termos, a soma dos termos de ordem ímpar é $1 - i$ e a soma dos termos de ordem par é $2i$, em que i é a unidade imaginária. Determine o número complexo $a + bi$ que representa a razão dessa progressão. $-1 + i$

Resolução:

$a_1 = x \qquad a_2 = xq \qquad a_3 = xq^2 \qquad a_4 = xq^3$

$$\begin{cases} x + xq^2 = 1 - i \\ xq + xq^3 = 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + q^2) = 1 - i & \text{(I)} \\ xq(1 + q^2) = 2i & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{1}{q} = \frac{1 - i}{2i} \Rightarrow q = \frac{2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = -1 + i$$

9 (UCSal-BA) Se o número complexo $z = a + bi$ é tal que $z^2 = (\overline{z})^2$, então é verdade que:

a) $a = 0$ e $b \neq 0$
b) $a = 0$ ou $b = 0$
c) $a \neq 0$ e $b = 0$
d) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$
e) $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Resolução:

$(a + bi)^2 = (a - bi)^2$

$a^2 + 2abi - b^2 = a^2 - 2abi - b^2 \Rightarrow 2abi = -2abi \Rightarrow 4abi = 0$

$a = 0$ ou $b = 0$

p. 55

10 (UEM-PR) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} z + \overline{z} & i^{342} \\ z\overline{z} & z - \overline{z} \end{bmatrix}$, em que $z = a + bi$ é um número complexo. Sendo $\det A = 27$, calcule o valor de $a^2 + b^2$. 27

Resolução:

Seja $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$

Pelos dados do exercício, temos:

$$\det A = 27 \Rightarrow \begin{vmatrix} a + \cancel{bi} + a - \cancel{bi} & i^{342} \\ (a + bi)(a + bi) & a + bi - (a - bi) \end{vmatrix} = 27$$

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 \\ a^2 + b^2 & 2bi \end{vmatrix} = 27$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$2a \cdot 2bi + 1(a^2 + b^2) = 27$

$4abi + a^2 + b^2 = 27 + 0 \cdot i$

Da igualdade, temos: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 27 \\ 4ab = 0 \end{cases}$

Portanto, $a^2 + b^2 = 27$.

11 (UFG) Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}\right\}$. Represente, geometricamente, no plano complexo, o conjunto A.
(Obs.: Re(z) é a parte real do número complexo z.)

Resolução:

$z = a + bi; z \neq 0$

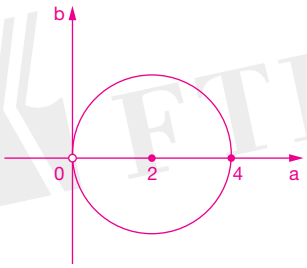
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a = a^2 + b^2$$

$$a^2 - 4a + b^2 = 0$$

$$(a - 2)^2 + b^2 = 4$$

Circunferência de centro C(2, 0) e raio $r = 2$



12 (UFBA) Sendo $z = 2 - i$, o inverso de z^2 é:

a) $\frac{5 + 4i}{41}$

b) $\frac{2 + i}{5}$

c) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

d) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

e) $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

Resolução:

$z = 2 - i$

Cálculo de $z^2 \Rightarrow z^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$

Cálculo de $\frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{1}{z^2} = \frac{1}{3 - 4i} = \frac{1 \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

13 (UFJF-MG) Se $z = 2 + 4i$ e $w = 1 - i$ são números complexos, então $\left(\frac{z}{w}\right)^2$ é igual a:

a) $8 - 6i$

b) $-1 + 3i$

c) $1 + 9i$

d) $-8 + 6i$

e) $-8 - 6i$

Resolução:

$$\frac{z}{w} = \frac{(2 + 4)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + 4i - 4}{2} = \frac{-2 + 6i}{2}$$

$$\frac{z}{w} = -1 + 3i$$

$$\left(\frac{z}{w}\right)^2 = (-1 + 3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i \Rightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^2 = -8 - 6i$$

14 (Cefet-PR) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$, na qual *i* é a unidade imaginária. É correto afirmar que A^9 é igual a:

a) A
b) $-A$
c) $i \cdot A$
d) I_3
e) $-I_3$

(I_3: identidade de ordem 3)

Resolução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = I_3 \cdot I_3 = I_3 \qquad A^9 = A^8 \cdot A = I_3 \cdot A = A$$

15 (Fafi-BH) A fração $\dfrac{i^3 - i^2 + i^{17} - i^{35}}{i^{16} - i^{13} + i^{30}}$ corresponde ao número complexo:

a) $1 + i$
b) $-1 + i$
c) $-1 - i$
d) $1 - i$
e) $2 + i$

Resolução:

$i^3 = -i$
$i^2 = -1$
$i^{17} = i^{16} \cdot i = i$
$i^{35} = i^{32} \cdot i^3 = -i$

$i^{16} = i^0 = 1$
$i^{13} = i^{12} \cdot i = i$
$i^{30} = i^{28} \cdot i^2 = -1$

$$\frac{i^3 - i^2 + i^{17} - i^{35}}{i^{16} - i^{13} + i^{30}} = \frac{-i + 1 + i + i}{1 - i - 1} = \frac{(1 + i)i}{-i \cdot i} = -1 + i$$

16 (UERN) O número complexo $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^{15}$ é igual a:

a) 0 (zero)
b) i
c) 1
d) -1
e) $-i$

Resolução:

$$z = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{2} = i \qquad z^{15} = i^{15} = i^3 = -i$$

17 (Vunesp-SP) Considere o número complexo $z = i$, em que *i* é a unidade imaginária. O valor de $z^4 + z^3 + z^2 + z + \dfrac{1}{z}$ é:

a) -1
b) 0
c) 1
d) i
e) $-i$

Resolução:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + \frac{1}{z} = i^4 + i^3 + i^2 + i + \frac{1}{i} = 1 - i - 1 + i + \frac{1(-i)}{1(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

18 (UERN) Se $z = \dfrac{(1 + i)^2}{1 - i}$, o argumento de z é:

a) $-\dfrac{3\pi}{4}$

b) $-\dfrac{\pi}{4}$

c) $\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi}{2}$

e) $\dfrac{3\pi}{4}$

Resolução:

$z = \dfrac{(1 + i)^2}{1 - i} = \dfrac{1 + 2i - 1}{1 - i} = \dfrac{2i}{1 - i}$

Logo: $z = \dfrac{2i}{1 - i} \cdot \dfrac{1 + i}{1 + i} = \dfrac{2i - 2}{1 + 1} = -1 + i$

$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \alpha = \dfrac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

19 (UFSC) Dada a expressão $2Z + \overline{Z} = 2Zi - 7$, sendo Z um número complexo, determine $|Z|^2$. 5

Resolução:

$2Z + \overline{Z} = 2Zi - 7$

Seja $Z = a + bi$

$2(a + bi) + a - bi = 2i(a + bi) - 7$

$2a + 2bi + a - bi = 2ai - 2b - 7$

$3a + bi - 2ai + 2b = -7 \Rightarrow 3a + 2b + (b - 2a)i = -7$

$$\begin{array}{l} 3a + 2b = -7 \\ -2a + b = 0 \\ \hline 7a = -7 \Rightarrow a = -1 \\ \qquad\qquad\quad b = -2 \end{array}$$

$Z = -1 - 2i \Rightarrow |Z|^2 + \left(\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}\right)^2 = 5$

20 (UFPB) O número complexo $z = a + ib$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$, é tal que (a, b) pertence à reta $2x - y + 1 = 0$. Sabendo-se que $|z| = \sqrt{2}$, determine z. $-1 - i$ ou $\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i$

Resolução:

Pelos dados, temos:

$2 \cdot a - b + 1 = 0 \Rightarrow b = 2a + 1$ (I)

$|z| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$ (II)

Substituindo (I) em (II), vem:

$a^2 + (2a + 1)^2 = 2 \Rightarrow a^2 + 4a^2 + 4a + 1 - 2 = 0$

$5a^2 + 4a - 1 = 0$ $\begin{cases} a' = \dfrac{1}{5} \therefore b = \dfrac{7}{5} \\ a'' = -1 \therefore b = -1 \end{cases}$

Portanto, $z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i$ ou $z = -1 - i$.

21 (UFRGS) Os argumentos dos números complexos u e z são, respectivamente, $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{4}$ e $|uz| = 4$. Calcule a parte real e a parte imaginária de uz. Re(uz) $= 2$ e Im(uz) $= 2\sqrt{3}$

Resolução:

$|uz| = 4$

$\arg(uz) = \arg u + \arg z = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$uz = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

Logo, Re(uz) $= 2$ e Im(uz) $= 2\sqrt{3}$.

p. 63

22 (Unicamp-SP) Dado um número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número complexo $\bar{z} = x - iy$.

a) Resolva as equações: $z \cdot \bar{z} = 4$ e $(\bar{z})^2 = z^2$.

b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

$(0, 2)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$

Resolução:

a) Sendo $z = x + yi$, com x e y números reais, temos que:

(I) $z \cdot \bar{z} = 4 \Leftrightarrow (x + yi) \cdot (x - yi) = 4 \therefore x^2 + y^2 = 4$

(II) $(\bar{z})^2 = z^2 \Leftrightarrow (x - yi)^2 = (x + yi)^2 \therefore xy = 0$

Os conjuntos solução das equações (I) e (II) são, respectivamente, $S_I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ e $S_{II} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & \text{(I)} \\ xy = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (II), temos $x = 0$ ou $y = 0$.

Substituindo $x = 0$ em (I), obtemos $y = \pm 2$.

Substituindo $y = 0$ em (I), obtemos $x = \pm 2$.

Os pontos comuns aos lugares geométricos dados pelas equações (I) e (II) são: $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

23 (ITA-SP) Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z \cdot \bar{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de $z \cdot w$, então α é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) π

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{5\pi}{3}$

e) $\frac{3\pi}{2}$

Resolução:

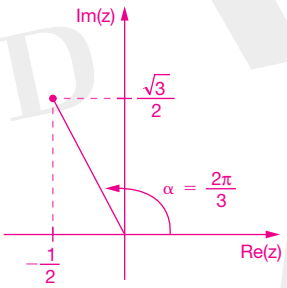
Se $z = 1 + i\sqrt{3}$ e $z \cdot \bar{w} = 1$, então:

$\bar{w} = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \Rightarrow \bar{w} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$w = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

Portanto, $z \cdot w = (1 + i\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Se $\alpha \in [0; 2\pi]$ é um argumento de $z \cdot w$, então $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.



24 Passe para a forma algébrica os complexos:

a) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$ $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

b) $z = 2(\cos 315° + i\,\text{sen}\,315°)$ $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Resolução:

a) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$

$z = 4\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z = -2 + 2\sqrt{3}i$

b) $z = 2(\cos 315° + i\,\text{sen}\,315°)$

$z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

25 (UFAL) A imagem do número complexo $z = 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$ é o ponto:

a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

e) $(-3\sqrt{3}, 3)$

Resolução:

$z = 3 \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$

$$\begin{cases} \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$z = 3 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

Logo, a imagem de z é o ponto $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

26 (FEI-SP) Dado o número complexo: $z = 1 + \sqrt{3}i$.

a) Escreva na forma algébrica o complexo z^{-1}.

$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

b) Escreva o complexo z na forma trigonométrica.

$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

Resolução:

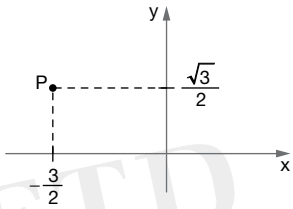
a) $z^{-1} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

b) $\rho = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow \rho = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

Logo, $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$.

27 (PUC-RS) Seja z um número complexo cujo afixo P está representado abaixo no plano de Argand-Gauss.



A forma trigonométrica do número z é:

a) $\sqrt{3}\ (\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

b) $\sqrt{3}\ (\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

c) $\sqrt{3}\ (-\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

d) $\sqrt{3}\ (\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

e) $\sqrt{3}\ (-\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

Resolução:

$$z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \rho = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = 150°$$

$$z = \sqrt{3}\ (\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$$

28 (UCDB-MS) Dados os números complexos $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, o produto $z_1 \cdot z_2$, na forma algébrica, é igual a:

a) $6 + 6i$

b) $6 - 6i$

c) $-6i$

d) $6i$

e) $-6 - 6i$

Resolução:

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right);\ z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6(0 + i) = 6i \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 6i$$

29 (UFSC) Dado o número complexo $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$, determine o valor de $z^6 - 2z^3$. 80

Resolução:

$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

$w = z^6 - 2z^3$

$w = 2^6(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) - 2(2^3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi))$

$w = 64 \cdot 1 - 2(8 \cdot (-1)) \Rightarrow w = 64 + 16 \Rightarrow w = 80$

30 (UEMA) Considere z um número complexo satisfazendo a condição $|z| = 2$. Se o argumento de z é igual a 60°, então z^9 é igual a:

a) $-2^9 i$
b) -2^9
c) $2^9(1 + i)$
d) $2^9(1 - i)$
e) 2^9

Resolução:

Escrevendo z na forma trigonométrica:

$z = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

$z^9 = 2^9[\cos (9 \cdot 60°) + i \operatorname{sen} (9 \cdot 60°)]$

$z^9 = 512 (\cos 540° + i \operatorname{sen} 540°)$

$z^9 = 512 (\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$

$z^9 = 512 (-1 + 0i) = -512 = -2^9$

31 (UFRGS) O valor de $(\sqrt{3} + i)^6$ é:

a) $64 - 64i$
b) $-64i$
c) $64i$
d) -64
e) 64

Resolução:

Seja: $z = \sqrt{3} + i$

$\rho = \sqrt{3 + 1} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$$

$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$

$z^6 = 2^6\left(\cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} 6 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$

$z^6 = 64(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \Rightarrow z^6 = 64(-1 + 0) \Rightarrow z^6 = -64$

Em questões como a 32 e a 33, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

32 (UFMS) Considerando números complexos, suas propriedades e representações, é correto afirmar que:

(01) o número $\frac{13}{3 - 2i} - \frac{4}{1 - i}$ não é inteiro.

(02) $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{32} = 1$.

(04) as raízes complexas da equação $\frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$ são $\frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-3 - 3i\sqrt{3}}{2}$.

(08) se n é um número natural, então 4 é o menor valor não-nulo de n para que $(1 + i)^n$ seja um número real.

(16) se $z = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$, então $z^2 = -2i$. $2 + 4 + 8 + 16 = 30$

Resolução:

(01) Falsa.

$$\frac{13}{3 - 2i} - \frac{4}{1 - i} = \frac{13}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} - \frac{4}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} =$$

$$= 3 + 2i - 2(1 + i) = 3 + 2i - 2 - 2i = 1$$

Logo, o número é inteiro.

(02) Correta.

$$\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{32} = \left(\frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i}\right)^{32} = \left(\frac{1 + 2i - 1}{1 + i}\right)^{32} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{32} = i^{32} = i^0 = 1$$

(04) Correta.

$$\frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 + 3x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$$

(08) Correta.

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos n \cdot \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right)$$

Para ser um número real, devemos ter:

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$n\cancel{\pi} = 4k\cancel{\pi} \Rightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, o menor valor não-nulo de n, para ser um número real, é 4.

(16) Correta.

$$z^2 = (\sqrt{2})^2 (\cos 2 \cdot 135° + i \operatorname{sen} 2 \cdot 135°)$$

$$z^2 = 2(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) \Rightarrow z^2 = 2(0 - 1i) = -2i$$

São corretas as afirmativas 2, 4, 8 e 16, somando 30.

33 (UFSC) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeira(s):

(01) A parte imaginária de $(z + \bar{z})$ é o dobro da parte imaginária de z.

(02) Se z é um número complexo, então $z \cdot z^{-1} = 1$.

(04) O número complexo $z = 3i$ tem módulo 3 e argumento $\frac{3\pi}{2}$.

(08) Se $z = 2i$, então $z^6 = -64$. $2 + 8 = 10$

Resolução:

(01) Falsa.

Seja $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

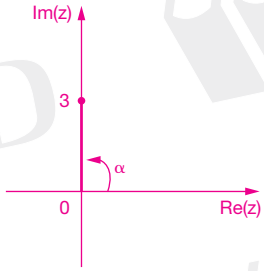
$(z + \bar{z}) = a + bi + a - bi = 2a$

(02) Correta.

$$z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{1}{z} = 1$$

(04) Falsa.

$z = 3i$



$|z| = 3$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad

(08) Correta.

$z^6 = (2i) = 64i^6 = 64i^2 = -64$

São corretas as afirmativas 2 e 8, somando 10.

34 (UFRJ) Determine o menor inteiro $n \geqslant 1$ para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ é um número real positivo. 12

Resolução:

Escrevendo o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica, temos:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

Portanto, $z^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$.

Para que z^n seja um número real positivo, devemos ter: $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6} = 0$ e $\cos\frac{n\pi}{6} > 0$.

Portanto, $n = 12$.

35 (UFU-MG) Calcule as raízes quartas do complexo $z = -8 - 8\sqrt{3}\,i$.

$1 + \sqrt{3}\,i$, $-\sqrt{3} + i$, $-1 - \sqrt{3}\,i$ e $\sqrt{3} - i$

Resolução:

$z = -8 - 8\sqrt{3}\,i$

$\rho = \sqrt{(8)^2 + (8\sqrt{3})^2} \qquad \rho = \sqrt{64 + 192} = 16$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{8}{16} = -\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{8\sqrt{3}}{16} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$z = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$w_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)$$

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$w_0 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$w_1 = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$w_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}\,i$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$w_3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

As raízes são: $1 + \sqrt{3}\,i$, $-\sqrt{3} + i$, $-1 - \sqrt{3}\,i$ e $\sqrt{3} - i$.

36 (ITA-SP) Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área desse polígono, em unidades de área, é igual a:

a) $\sqrt{3}$

b) 5

c) π

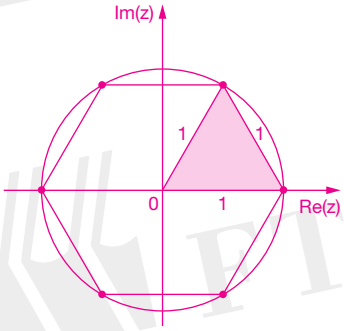
d) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

e) 2π

Resolução:

As soluções da equação $z^6 = 1$ são as seis raízes sextas do número 1. Já que uma dessas raízes é igual a 1, elas pertencem a uma circunferência de raio 1, centro na origem e dividem essa circunferência em 6 partes iguais, determinando um hexágono regular.

A área desse polígono é dada por $A = 6 \cdot \dfrac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$.



37 (Fuvest-SP)

a) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação $\bar{z} = iz^2$, em que *i* é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$ e $\bar{z}$ é o conjugado de *z*.

b) Represente essas soluções no plano complexo.

Resolução:

a) Sendo $z = x + yi$ e $\bar{z} = iz^2$, tem-se: $\overline{(x + yi)} = i \cdot (x + yi)^2 \Leftrightarrow (x - yi) = i(x^2 - y^2 + 2xyi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - yi = -2xy + (x^2 - y^2)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2xy \\ -y = x^2 - y^2 \end{cases}$

Então, temos:

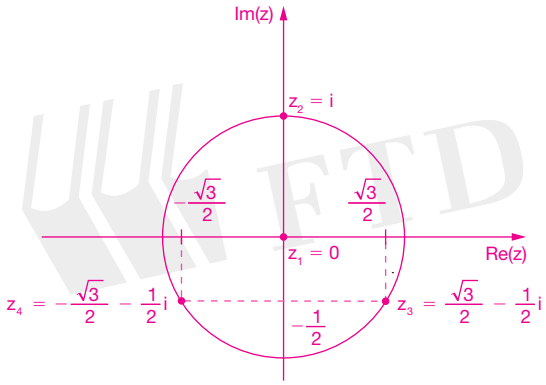
(I) $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y = x^2 \end{cases} \therefore (x = 0 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ e } y = 1)$

(II) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ y^2 - y = x^2 \end{cases} \therefore \left(x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } y = -\dfrac{1}{2}\right) \text{ ou } \left(x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } y = -\dfrac{1}{2}\right)$

As soluções da equação $\bar{z} = iz^2$ são, portanto:

$z_1 = 0 \qquad z_2 = i \qquad z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \qquad z_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

b) Representadas estas soluções no plano complexo, obtém-se:



38 (MACK-SP) Se $z = x + yi$ ($i^2 = -1$) é tal que $|z + i| = |z + 2|$, então os pontos de coordenadas (x, y), x e y reais percorrem:

a) uma hipérbole
b) uma circunferência
c) uma elipse
d) uma reta
e) uma parábola

Resolução:

Se $z = x + yi$, então:

$|z + i| = |x + yi + i| = |x + (y + 1)i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$

$|z + 2| = |x + yi + 2| = |(x + 2) + yi| = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$

Se $|z + i| = |z + z|$, então:

$\cancel{\sqrt{}}x^2 + (y + 1)^2 = \cancel{\sqrt{}}(x + 2)^2 + y^2 \Rightarrow$

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 = \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} \Rightarrow 4x - 2y + 3 = 0$

Os pontos percorrem uma reta.

39 (Fuvest-SP) Determine os números complexos *z* que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\text{Im}\left(\frac{z - i}{1 + i}\right) = \frac{1}{2}$.

Lembretes: $i^2 = -1$; se $w = a + bi$, com *a* e *b* reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\text{Im}(w) = b$. $2i$ e -2

Resolução:

Temos: $\text{Im}\left(\frac{z - i}{1 + i}\right) = \frac{1}{2}$. Se $z = a + bi$, então:

$$\frac{a + bi - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{a + bi - i - ai + b - 1}{1 + 1} = \frac{(a + b - 1) + (-a + b - 1)i}{2}$$

Logo: $\text{Im}\left(\frac{z - i}{1 + i}\right) = \frac{-a + b - 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -a + b = 2$ (I)

Sendo $|z| = 2$, então $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ ou $a^2 + b^2 = 4$ (II)

De I e II: $\begin{cases} -a + b = 2 \Rightarrow b = 2 + a \\ a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow a^2 + (2 + a)^2 = 4 \Rightarrow a^2 + 4 + 4a + a^2 = 4 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow 2a^2 + 4a = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = -2$

Se $a = 0 \Rightarrow b = 2$.

Se $a = -2 \Rightarrow b = 0$.

Desse modo:

$z = 2i$ ou $z = -2$.

40 (Unesp-SP) Considere os números $z = 2 - i$ e $w = -3 - i$, sendo i a unidade imaginária.

a) Determine $z \cdot w$ e $|w - z|$.

b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, $b \geqslant 0$, de modo que os números complexos z, w e $t = bi$ sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20.

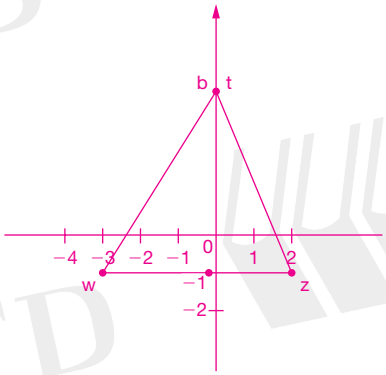
Resolução:

a) $z = 2 - i \qquad w = -3 - i$

$z \cdot w = (2 - i)(-3 - i) = -6 - 2i + 3i - 1 = -7 + i$

$|w - z| = |-3 - i - 2 + i| = |-5| = 5$

b) $z(2, -1) \qquad w(-3, -1) \qquad t(0, b)$



O triângulo tem base 5 e altura $b + 1$. Como sua área é 20, então:

$$A = \frac{5 \cdot (b + 1)}{2} = 20 \Rightarrow 5b + 5 = 40 \Rightarrow 5b = 35 \Rightarrow b = 7$$

41 (UNI-RIO-Ence-RJ) O número complexo $z = a + bi$, $i^2 = -1$, com a e b inteiros, é tal que (a, b) pertence à reta $x - 2y + 1 = 0$. Dado $z \cdot \bar{z} = 2$, determine z. $1 + i$

Resolução:

(a, b) pertence à reta $x - 2y + 1 = 0$, então $a - 2b + 1 = 0 \Rightarrow a = 2b - 1$ (I)

$z \cdot \bar{z} = 2 \Rightarrow (a + bi)(a - bi) = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$ (II)

De I e II: $(2b - 1)^2 + b^2 = 2 \Rightarrow 4b^2 - 4b + 1 + b^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5b^2 - 4b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$ ou $b = -\frac{1}{5}$ (não convém)

Se $b = 1 \Rightarrow a = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow z = 1 + i$

42 (Fatec-SP) Se i é a unidade imaginária, a soma $2 + 4 \cdot i^2 + 6 \cdot i^4 + ... + 100 \cdot i^{98}$ é um número:

a) primo

b) divisível por 4

c) múltiplo de 6

d) negativo

e) quadrado perfeito

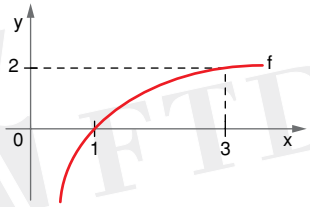
Resolução:

Soma: $2 + 4i^2 + 6i^4 + ... + 100i^{98} = 2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + ... + 98 - 100 =$

$= (2 + 6 + 10 + ... + 98) - (4 + 8 + 12 + ... + 100) = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} - \frac{(4 + 100) \cdot 25}{2} =$

$= \frac{100 \cdot 25}{2} - \frac{104 \cdot 25}{2} = 1\,250 - 1\,300 = -50$

43 (Fatec-SP) Na figura ao lado, tem-se o gráfico da função *f*, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_b x$, com $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.
O módulo do número complexo $z = b^2 - bi$ é:



a) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{5}$
d) $3\sqrt{10}$
e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{4}$

Resolução:

Pelo gráfico, $f(3) = 2$, ou seja: $\log_b 3 = 2 \Rightarrow b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$ $(b > 0)$.

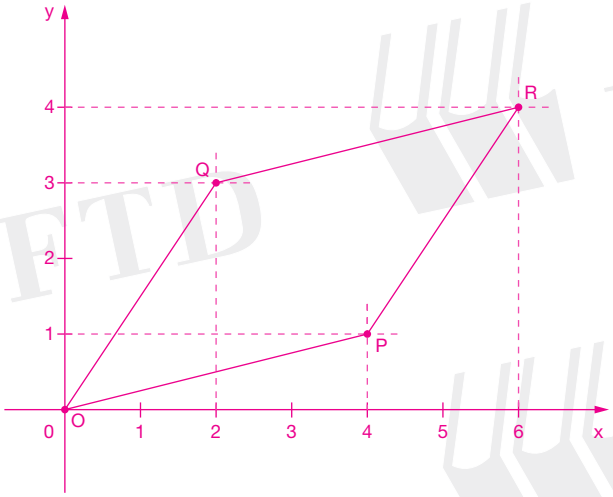
Se $z = b^2 - bi$, então: $z = 3 - \sqrt{3}i$; daí, $|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

44 (MACK-SP) Considere os complexos $u = 4 + i$, $v = 2 + 3i$ e $w = 6 + 4i$, cujos afixos, em relação a um sistema de eixos perpendiculares, são, respectivamente, *P*, *Q* e *R*. Sendo *O* a origem do sistema, a área do quadrilátero OPRQ é:

a) 8
b) 9
c) 15
d) 12
e) 10

Resolução:

Dados *P*, *Q*, *R* e *O*, temos:



Sendo $m_{OP} = m_{QR} = \frac{1}{4}$ e $m_{OQ} = m_{PR} = \frac{3}{2}$, concluímos que OPRQ é um paralelogramo.
A área desse paralelogramo é o dobro da área do △OPQ. Desse modo:

$$A_{OPRQ} = 2 \cdot A_{OPQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 10$$

45 (UFBA) Sendo a_n a parte real do número complexo $\left(\frac{i}{3}\right)^n$, para cada número natural n, determine $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ $\frac{9}{10}$

Resolução:

Sendo a_n a parte real de $\left(\frac{i}{3}\right)^n$, temos:

$a_0 = \left(\frac{i}{3}\right)^0 = 1$ $\qquad a_3 = \left(\frac{i}{3}\right)^3 = \frac{-i}{27}$

$a_1 = \left(\frac{i}{3}\right)^1 = \frac{i}{3}$ $\qquad a_4 = \left(\frac{i}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

$a_2 = \left(\frac{i}{3}\right)^2 = \frac{-1}{9}$ $\qquad \vdots$

Desse modo, $S = 1 + \left(\frac{-1}{9}\right) + \frac{1}{81} + \ldots$:

$$S = \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \ldots\right) + \left(\frac{-1}{9} + \frac{-1}{243} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{81}} + \frac{\frac{-1}{9}}{1 - \frac{1}{81}} = \frac{1}{\frac{81 - 1}{81}} + \frac{\frac{-1}{9}}{\frac{81 - 1}{81}} = \frac{1}{\frac{80}{81}} + \frac{\frac{-1}{9}}{\frac{80}{81}} =$$

$$= \frac{81}{80} + \left(\frac{-1}{\cancel{9}}\right) \cdot \frac{\cancel{81}^{9}}{80} = \frac{81}{80} - \frac{9}{80} = \frac{72}{80} = \frac{9}{10}$$

46 (MACK-SP) Dados os complexos z e w, tais que $2z + w = 2$ e $z + w = \frac{1 + 2i}{i}$, $i^2 = -1$, o módulo de w é igual a:

a) 5

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6}$

e) $3\sqrt{3}$

Resolução:

$$\begin{cases} 2z + w = 2 \\ z + w = \frac{1 + 2i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i + 2}{1} = 2 - i \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z + w = 2 \\ -2z - 2w = -4 + 2i \end{cases} +$$

$$-w = -2 + 2i \Rightarrow w = 2 - 2i$$

$$|w| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

47 (UFSCar-SP) Sejam i a unidade imaginária e a_n o n-ésimo termo de uma PG com $a_2 = 2a_1$. Se a_1 é um número ímpar, então $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + \ldots i^{a_{10}}$ é igual a:

a) $9i$ ou $-9i$
b) $-9 + i$ ou $-9 - i$
c) $9 + i$ ou $9 - i$
d) $8 + i$ ou $8 - i$
e) $7 + i$ ou $7 - i$

Resolução:

Uma PG em que $a_2 = 2a_1$ é uma PG de razão 2. Desse modo, sendo a_1 ímpar, será da forma $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), a_2 será par e da forma $2 \cdot (2k + 1)$, daí em diante todos os termos serão múltiplos de 4:

$i^{a_1} = i^{2k+1} = i^{2k} \cdot i^1 = (i^2)^k \cdot i = (-1)^k \cdot i$

$i^{a_2} = i^{2(2k+1)} = i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = i^0 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^{a_3} = i^{a_4} = i^{a_5} = i^{a_6} = i^{a_7} = i^{a_8} = i^{a_9} = i^{a_{10}} = 1$

A soma $i^{a_1} + i^{a_2} + \ldots + i^{a_{10}} = (-1)^k \cdot i + (-1) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 =$
$= (-1)^k \cdot i + 7 = 7 + (-1)^k \cdot i$, ou seja, se k for par, a soma será $7 + i$; se k for ímpar, será $7 - i$.

48 (FGV-SP) O ponto P é o afixo de um número complexo z e pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$. Sabendo-se que o argumento de z é 60°, pode-se afirmar que:

a) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
b) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
e) $\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$

Resolução:

A circunferência $x^2 + y^2 = 9$ tem centro $C(0, 0)$ e raio 3. Como P pertence à circunferência, a distância de P até C é o módulo de z e vale 3 (raio). Sendo 60° o argumento de z, então:

$$z = 3 \cdot (\cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

49 (Unicamp-SP) Um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, pode ser escrito na forma trigonométrica: $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, em que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}$. Essa forma de representar os números complexos não-nulos é muito conveniente, especialmente para o cálculo de potências inteiras de números complexos, em virtude da fórmula de Moivre:
$[|z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^k = |z|^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)$, que é válida para todo $k \in \mathbb{Z}$. Use essas informações para:

a) calcular $(\sqrt{3} + i)^{12}$; 4 096

b) sendo $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor de $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{15}$. 0

Resolução:

a) Sendo $z = \sqrt{3} + i$, temos:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right\rangle \theta = \frac{\pi}{6}$$

Assim sendo, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Pela fórmula de Moivre:

$$z^{12} = 2^{12} \cdot \left(\cos\frac{12\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{12\pi}{6}\right) = 4\,096 \cdot (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) =$$
$$= 4\,096 \cdot (1 + i \cdot 0) = 4\,096$$

b) $1 + z + z^2 + \ldots + z^{15}$ corresponde à soma dos termos de uma PG de 16 termos com 1º termo 1 e razão *z*.

Para determinarmos essa soma, utilizamos $S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$; logo:

$$S_{16} = 1 \cdot \left(\frac{z^{16} - 1}{z - 1}\right) = \frac{z^{16} - 1}{z - 1}$$

Sendo $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, temos: $z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

Assim:

$$z^{16} = 1^{16} \cdot \left(\cos\frac{16\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{16\pi}{4}\right) = 1(\cos 4\pi + i \cdot \operatorname{sen} 4\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

$$S_{16} = \frac{z^{16} - 1}{z - 1} = \frac{1 - 1}{z - 1} = \frac{0}{z - 1} = 0$$

50 (Fatec-SP) Sabe-se que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n^2 - 15n}{2} + \left(\frac{n^2 - 23n}{2}\right) \cdot i$ é a expressão da soma dos n primeiros termos de uma PA. Considerando que i é a unidade imaginária, a forma trigonométrica do 10º termo dessa progressão é:

a) $\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

b) $\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

c) $2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

d) $2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

e) $2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

Resolução:

Como $S_n = \frac{n^2 - 15n}{2} + \left(\frac{n^2 - 23n}{2}\right)i$ é a soma dos n termos de uma PA, podemos afirmar que:

$$S_1 = a_1 = \frac{1^2 - 15 \cdot 1}{2} + \left(\frac{1^2 - 23 \cdot 1}{2}\right)i = \frac{1 - 15}{2} + \frac{1 - 23}{2}i = -7 - 11i$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{2^2 - 15 \cdot 2}{2} + \left(\frac{2^2 - 23 \cdot 2}{2}\right)i = \frac{4 - 30}{2} + \frac{4 - 46}{2}i = -13 - 21i$$

$$a_2 = -13 - 21i - a_1 = -13 - 21i - (-7 - 11i) = -6 - 10i$$

A razão da PA é $r = a_2 - a_1 = (-6 - 10i) - (-7 - 11i) = 1 + i$

Assim, o 10º termo será: $a_{10} = a_1 + 9r = (-7 - 11i) + 9 \cdot (1 + i) =$
$= 2 - 2i$

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\rangle \theta = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow a_{10} = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$$

51 (ITA-SP) Sendo $z = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = |z + z^2 + z^3 + ... + z^{60}|$. $\sqrt{4 + \sqrt{2}}$

Resolução:

Sendo $z = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}i}{2}$, temos:

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^2 = 1^2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}\right) = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$z^3 = 1^3 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^4 = 1^4 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{4}\right) = -1 + i \cdot 0 = -1$$

$$z^5 = 1^5 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^6 = 1^6 \cdot \left(\cos\frac{6\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}\right) = 0 + i \cdot (-1) = -i$$

$$z^7 = 1^7 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^8 = 1^8 \cdot \left(\cos\frac{8\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{8\pi}{4}\right) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

Sendo **nula** a soma dessas 8 potências e levando-se em conta que de 8 em 8 termos esses valores se repetem, concluímos que a soma $z^1 + z^2 + z^3 + ... + z^{54} + z^{55} + z^{56} = 0$, logo:

$$\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = |z^{57} + z^{58} + z^{59} + z^{60}| = |z^1 + z^2 + z^3 + z^4| =$$

$$= \left|\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + i + \left(\cancel{\frac{-\sqrt{2}}{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i + (-1)\right| = |-1 + (\sqrt{2} + 1)i| =$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

52 (IBMEC-SP) Considere a equação $x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = 0$, com $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

a) Determine os valores de θ para os quais essa equação admite raízes reais.

b) Resolvendo em $\mathbb{C}$ a equação dada, determine, em função de θ, suas raízes e represente-as no plano de Argand-Gauss.

Resolução:

a) A equação admitirá raízes reais quando $\Delta \geqslant 0$:

$x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = 0$

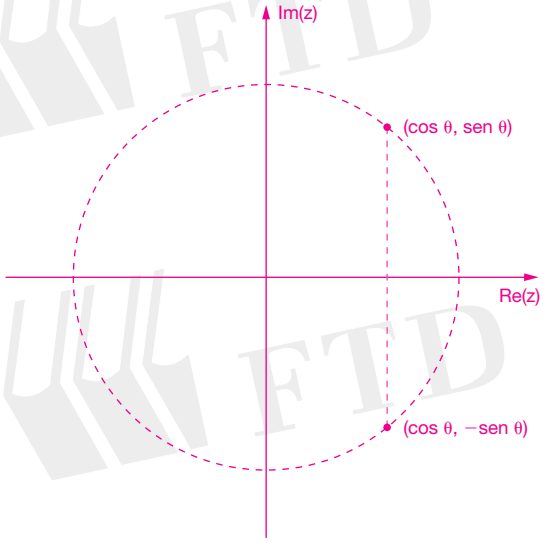
$\Delta = (-2\cos(\theta))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4(1 - \cos^2\theta) = -4\,\text{sen}^2\,\theta$

$\therefore -4\,\text{sen}^2\,\theta \geqslant 0 \Rightarrow \text{sen}^2\,\theta \leqslant 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

b) Raízes em $\mathbb{C}$:

$$x = \frac{-(-2\cos\theta) \pm \sqrt{-4\,\text{sen}^2\,\theta}}{2 \cdot 1} = \frac{2\cos\theta \pm i \cdot 2\,\text{sen}\,\theta}{2} =$$

$$= \frac{2(\cos\theta \pm i \cdot \text{sen}\,\theta)}{2} = \cos\theta \pm i \cdot \text{sen}\,\theta$$



Em função de θ, os pontos descrevem uma circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 1.

53 (FGV-SP)

a) Determine, no plano de Argand-Gauss, o lugar geométrico dos números complexos z representados pela equação:

$$z \cdot \bar{z} - w \cdot \bar{z} - \bar{w} \cdot z + 25 = 0, \text{ sendo } w = -2 + 5i.$$

b) De todos os números complexos z de módulo 3, determine aqueles que satisfazem a igualdade $|z - 2i| = \sqrt{3} \cdot |i - 2|$.

Resolução:

a) Se $z = x + yi$ e $w = -2 + 5i$, temos:

$z \cdot \bar{z} - w \cdot \bar{z} - \bar{w} \cdot z + 25 = 0$

$(x + yi)(x - yi) - (-2 + 5i)(x - yi) - (-2 - 5i)(x + yi) + 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - \cancel{xyi} + \cancel{xyi} + y^2 + 2x - \cancel{2yi} - \cancel{5xi} - 5y + 2x + \cancel{2yi} + \cancel{5xi} - 5y + 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$

O lugar geométrico é uma circunferência de centro $(-2, 5)$ e raio 2.

b) Temos: $\begin{cases} |z| = 3 \\ |z - 2i| = \sqrt{3} \cdot |i - 2| \end{cases}$

Se $z = x + yi$, então:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \\ \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = \sqrt{15} \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2} - 4y + 4 = 15 \end{cases}$$

$9 - 4y + 4 = 15 \Rightarrow -4y = 2 \Rightarrow y = \dfrac{-1}{2}$

$x^2 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 - \dfrac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \dfrac{35}{4} \Rightarrow x = \pm \dfrac{\sqrt{35}}{2}$

Logo, $z = \dfrac{\sqrt{35}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ ou $z = \dfrac{-\sqrt{35}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.