Matemática

M10 – Progressões

p. 46

1 (UFBA) A soma dos 3º e 4º termos da seqüência abaixo é:

$$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_{n+1} = 18 + (-1)^{n+1} \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) −36
b) −18
c) 0
d) 18
e) 36

Resolução:

$$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_{n+1} = 18 + (-1)^{n+1} \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$a_2 = 18 + (-1)^2 \cdot a_1 = 18 + 18 = 36$

$a_3 = 18 + (-1)^3 \cdot a_2 = 18 - 36 = -18$

$a_4 = 18 + (-1)^4 - a_3 = 18 - 18 = 0$

$a_3 + a_4 = -18 + 0 = -18$

2 (UERN) A seqüência de números positivos $(x, x + 10, x^2, \ldots)$ é uma progressão aritmética, cujo décimo termo é:

a) 94
b) 95
c) 101
d) 104
e) 105

Resolução:

$(x, x + 10, x^2, \ldots) \rightarrow$ PA de números positivos

$2(x + 10) = x + x^2$

$x^2 - x - 20 = 0$

$$x = \frac{1 \pm 9}{2} \begin{cases} x' = 5 \\ x'' = -4 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

PA: (5, 15, 25, ...)

$a_1 = 5;\ r = 10$

$a_{10} = a_1 + 9r = 5 + 9 \cdot 10 \therefore a_{10} = 95$

3 (UFJF-MG) Em 2004, foi realizada, em Atenas, a 28º Olimpíada da era moderna, evento esportivo que acontece de quatro em quatro anos.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que a edição da Olimpíada de 1948 e o ano de 50ª Olimpíada da era moderna, supondo que não haja interrupção, são, respectivamente:

a) 14ª e 2200
b) 15ª e 2204
c) 15ª e 2086
d) 14ª e 2092
e) 17ª e 2092

Resolução:

Do enunciado, temos:

$a_{28} = 2004$ e $r = 4$

Logo:

$a_{28} = a_1 + 27\,r \rightarrow 2004 = a_1 + 27 \cdot 4 \rightarrow a_1 = 1896$

Daí, vem:

$1948 = 1896 + (n - 1) \cdot 4 \rightarrow 52 = 4n - 4 \rightarrow n = 14$

$a_{50} = a_1 + 49\,r \rightarrow a_{50} = 1896 + 49 \cdot 4 \rightarrow a_{50} = 2092$

4 (UFG) Um reservatório de água tem a forma de um cubo de arestas 10 m. Por causa de um vazamento, a cada hora perde-se 5% do volume total do reservatório.

a) Se o reservatório estiver completamente cheio no início do vazamento, em quanto tempo ele estará vazio? 20 h

b) Se o vazamento permanecer por 12 horas, quantos litros de água restarão no reservatório? 400 000 ℓ

Resolução:

a) O volume total é igual a:

$v = a^3 \rightarrow v = 10^3 \rightarrow v = 1\,000\ m^3$

A cada hora perde-se 5%: $V = 0{,}05 \cdot 1\,000 = 50\ m^3$

Portanto, temos a PA:

$$\left.\begin{array}{l} 1\ h \rightarrow 950 \\ 2\ h \rightarrow 900 \\ 3\ h \rightarrow 850 \\ \ \vdots \qquad \vdots \\ n\ h \rightarrow 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} r = -50 \\ a_1 = 950 \end{array}$$

Assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,r \rightarrow 0 = 950 + (n - 1)(-50)$$
$$50n = 1\,000$$
$$n = 20 \text{ horas}$$

b) $a_{12} = a_1 + 11r \rightarrow a_{12} = 950 + 11 \cdot (-50)$

$a_{12} = 400\ m^3$

Em litros, temos 400 000 litros

Resposta: a) 20 h b) 400 000 ℓ

5 (UFPel-RS) A Matemática está presente em cada momento do nosso cotidiano, desde a criação do mundo. Como exemplo, podemos citar a origem da vida por meio de divisão celular, a divisão do tempo em milênios, séculos, anos etc.

A aplicabilidade dessa ciência, no dia-a-dia, é comprovada até mesmo pelas pessoas que não tiveram muita escolaridade e que, contudo, são capazes de administrar esse conhecimento muito bem. Numa área reservada para o plantio de eucaliptos, o espaçamento das mudas – dispostas em fileiras – deve ser de 2,5 m, e a plantação deverá iniciar a uma distância de 1 m das extremidades do terreno.

Baseando-se no texto, em seus conhecimentos e considerando que as fileiras tenham o mesmo número de mudas tanto na horizontal quanto na vertical, determine:

a) a quantidade máxima que pode ser plantada num terreno retangular, cujas medidas são $x + 3$ e $x + 5$ e cuja área é igual a 899 m²; 144 mudas

b) a menor área e o menor perímetro do terreno para que haja o plantio de 289 mudas de eucalipto.

1 681 m² e 164 m

Resolução:

a) A área do retângulo é dada pelo produto da base pela altura. Logo:

$$(x + 3)(x + 5) = 899 \rightarrow x^2 + 8x - 884 = 0 \begin{cases} x = 26 \\ x = -34 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Os lados do terreno medem:

$x + 3 = 26 + 3 = 29$ m

$x + 5 = 26 + 5 = 31$ m

Sendo *n*, o número de plantas e fazendo os cálculos para os lados, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1)\, r \rightarrow 31 = 1 + (n - 1) \cdot 2{,}5$

$n = 13$

$a_n = a_1 + (n - 1)\, r \rightarrow 29 = 1 + (n - 1) \cdot 2{,}5$

$n = 12{,}2$

Como as fileiras têm o mesmo número de mudas tanto na horizontal quanto na vertical, o número de plantas considerado por fileira é 12, o que resulta num total de 144 mudas.

b) A menor área possível é a de um terreno quadrado de lado ℓ, então $n^2 = 289$, sendo *n* o número de mudas. Logo:

$n^2 = 289 \rightarrow n = 17$ ou $n = -17$ (não serve)

Portanto, devemos ter 17 mudas em cada fileira.

Daí, vem:

$a_n = 1 + (17 - 1) \cdot 2{,}5 \rightarrow a_n = 41$

menor área do terreno $= \ell^2 = 41^2 = 1\,681$ m²

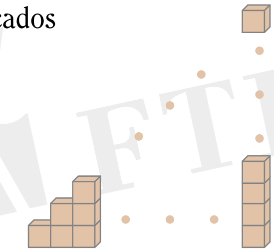
menor perímetro do terreno $= 41 \cdot 4 = 164$ m

Resposta:

a) 144 mudas

b) 1 681 m² e 164 m

6 (UFPB) Uma escada foi feita com 210 blocos cúbicos iguais, que foram colocados uns sobre os outros, formando pilhas, de modo que a primeira pilha tinha apenas 1 bloco, a segunda, 2 blocos, a terceira, 3 blocos, e assim sucessivamente, até a última pilha, conforme a figura ao lado.



A quantidade de degraus dessa escada é:

a) 50
b) 40
c) 30
d) 20
e) 10

Resolução:

A progressão aritmética que representa os blocos é:

PA (1, 2, 3, 4, ..., n, ...)

$a_n = a_1 + (n - 1)\,r \rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1 \rightarrow a_n = n$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow 210 = \frac{(1 + n)n}{2}$$

$$n^2 + n - 420 = 0 \begin{cases} n = 20 \\ n = -21 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

O número de degraus é 20.

7 (UFMT) Em uma clínica ortodôntica são atendidos 30 clientes diários de segunda a sexta-feira. Para redimensionar a estrutura física, a clínica passará a atender da seguinte maneira: dois clientes no primeiro dia do mês, quatro no segundo, seis no terceiro, oito no quarto e assim sucessivamente. Considerando que essa clínica atende 20 dias por mês, o número de clientes atendidos, em um mês, será reduzido em:

a) 35%
b) 30%
c) 40%
d) 25%
e) 70%

Resolução:

No primeiro caso, temos:

$30 \cdot 20 = 600$ clientes

No redimensionamento, temos:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ...$

No 20º dia, o número de clientes será:

$a_{20} = a_1 + 19r \rightarrow a_{20} = 2 + 19 \cdot 2$

$a_{20} = 40$ clientes

Logo:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})n}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{(2 + 40) \cdot 20}{2}$$

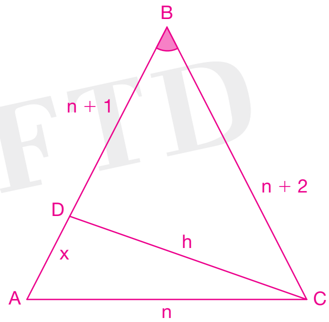
$$S_{20} = 420 \text{ clientes}$$

A redução é de:

$$\frac{600 - 420}{600} = \frac{180}{600} = 0{,}30 = 30\%$$

8 (UFBA) As medidas dos lados de um triângulo ABC formam uma PA de razão igual a 1. Determine a altura do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{AB}$, sabendo que $\overline{AC} < \overline{AB} < \overline{BC}$ e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{3}{5}$. 12

Resolução:



Considerando n, n + 1 e n + 2 as medidas dos lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, do triângulo ABC e usando a lei dos cossenos nesse triângulo, tem-se:

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\cdot\frac{3}{5} \rightarrow n^2 - 12n - 13 = 0 \begin{cases} n = 13 \\ n = -1 \end{cases}$$

Sendo *n* a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC, o valor a ser considerado é 13.
Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos DAC e BDC e considerando a medida de $\overline{DC}$ igual a *h*, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 13^2 \\ h^2 + (14 - x)^2 = 15^2 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações, tem-se: $x^2 - (14 - x)^2 = 169 - 225 \rightarrow x = 5$.
Substituindo-se o valor de *x* na equação $h^2 + x^2 = 13^2$, obtém-se $h^2 = 169 - 25 = 144$.
Logo, h = 12u.c.

9 (MACK-SP) A caixa d'água reserva de um edifício, que tem capacidade para 25 000 litros, contém, em determinado dia, 9 600 litros. Contrata-se uma empresa para fornecer 400 litros de água nesse dia, 600 litros no dia seguinte, 800 litros no próximo, e assim por diante, aumentando em 200 litros o fornecimento de cada dia. O número de dias necessários para que a caixa atinja a sua capacidade total é:

a) 11
b) 13
c) 14
d) 12
e) 10

Resolução:
Sendo *V* o volume em litros que falta para a caixa atingir a capacidade total antes de se contratar a empresa, do enunciado temos:
$V = 25\,000 - 9\,600 \therefore V = 15\,400$
Seja *n* a quantidade de dias necessários para que a caixa atinja a sua capacidade total. Devemos ter:
$400 + 600 + 800 + ... + a_n = 15\,400$ (I)
Ainda, $a_n = 400 + (n - 1)\cdot 200 \therefore a_n = 200n + 200$ (II)
De (I) e (II), vem:

$$\frac{(400 + 200n + 200)\cdot n}{2} = 15\,400$$

$$n^2 + 3n - 154 = 0 \begin{cases} n = 11 \\ n = -14 \text{ (não convém)} \end{cases} \quad \therefore \quad n = 11$$

10 (Unifor-CE) As distâncias que seis trabalhadores percorrem diariamente para ir de suas casas à fábrica onde trabalham são numericamente iguais aos termos de uma PA. Se a casa mais próxima da fábrica fica a 1 km dela e a mais distante, a 8,5 km, a soma das distâncias que os seis percorrem diariamente para ir de suas casas até a fábrica, em quilômetros, é igual a:

a) 20
b) 22,5
c) 25
d) 28,5
e) 30

Resolução:

Do enunciado, temos a seguinte PA de seis termos:

1; ___; ___; ___; ___; 8,5

Daí, vem:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \rightarrow 8{,}5 = 1 + (6 - 1) \cdot r$

$7{,}5 = 5r$

$r = 1{,}5$

A soma dos termos dessa PA é igual a:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow S_6 = \dfrac{(1 + 8{,}5)6}{2} \rightarrow$

$\rightarrow S_6 = 28{,}5$ km

Em questões como a 11, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

11 (UFPR) Uma empresa de autopeças vem sofrendo sucessivas quedas em suas vendas a partir de julho de 2002. Naquele mês, ela vendeu 100 000 peças e, desde então, a cada mês tem vendido 2 000 peças a menos. Para reverter essa tendência, o departamento de *marketing* da empresa resolveu lançar uma campanha cuja meta é aumentar o volume de vendas à razão de 10% a.m. nos próximos seis meses, a partir de janeiro de 2004. A respeito das vendas dessa empresa, é correto afirmar:

(01) Neste mês de dezembro, se for confirmada a tendência de queda, serão vendidas 66 000 peças.
(02) O total de peças vendidas nos últimos 12 meses, até novembro de 2003, inclusive, é de 900 000 peças.
(04) Se a meta da campanha for atingida, os números de peças vendidas mês a mês, a partir do seu lançamento, formarão uma PA de razão 10.
(08) Se a meta da campanha for atingida, o número de peças a serem vendidas no mês de março de 2004 será superior a 80 000.
(16) Se a campanha não for lançada e as vendas continuarem na mesma tendência de queda, daqui a 24 meses a empresa não estará mais vendendo peça alguma. 1 + 8 = 9

Resposta:

01. (Verdadeira)

Pelos dados, temos a PA (100 000, 98 000, 96 000, ...), com a_1 = julho de 2002 (100 000) e a_{18} = dezembro de 2003.

Logo, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{18} = a_n = 100\,000 + (18 - 1) \cdot -2\,000$

$a_{18} = 66\,000$ peças

02. (Falsa)

a_6 = novembro de 2002 $\rightarrow a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot r$

$a_6 = 100\,000 + 5 \cdot -2\,000$

$a_6 = 90\,000$ peças

a_{17} = novembro de 2003 $\rightarrow a_{17} = 100\,000 + (17 - 1) \cdot -2\,000$

$a_{17} = 68\,000$ peças

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S = \dfrac{(90\,000 + 68\,000) \cdot 12}{2}$

$S = 948\,000$ peças

04. (Falsa)

A proposição é falsa, pois a PG será de razão 1,1.

08. (Verdadeira)

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que $a_1 = 66\,000$, $q = 1{,}1$ e $n = 3$.

Logo, $a_3 = 66\,000 \cdot (1{,}1)^3$

$a_3 = 66\,000 \cdot 1{,}331$

$a_3 = 87\,846$ peças

16. (Falsa)

$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot r$

$a_{24} = 100\,000 + 23 \cdot (-2\,000)$

$a_{24} = 100\,000 - 46\,000 = 54\,000$

12 (UFSC) Assinale a(s) proposição(ões) correta(s):

(01) Se $f(x) = 3x + a$ e a função inversa de f é $g(x) = \frac{x}{3} + 1$, então $a = -3$.

(02) Se (a_n) e (b_n) são duas progressões aritméticas, então $(a_n + b_n)$ é uma PA.

(04) A equação $\sqrt{x^2 + 1} = x - 1$ não tem solução real.

(08) $\frac{4^{3+x} - 4^{x-3}}{4^x + 4^{x-3}} = 64$ para todo x real.

(16) $\frac{n^2 - 1}{n + 1} = n - 1$ para todo número inteiro n.

$1 + 2 + 4 = 7$

Resolução:

01. (Verdadeira)

$$y = 3x + a \rightarrow x = 3y + a \rightarrow y = \frac{x - a}{3}$$

$$y = \frac{x}{3} - \frac{a}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{a}{3}$$

$$f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow \frac{x}{3} - \frac{a}{3} = \frac{x}{3} + 1$$

$$-\frac{a}{3} = 1$$

$$a = -3$$

02. (Verdadeira)

Sejam:

$a_n \rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots =$
$= a_1, a_1 + r_1, a_1 + 2r_1, a_1 + 3r_1, \ldots$

$b_n \rightarrow b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots =$
$= b_1, b_1 + r_2, b_1 + 2r_2, b_1 + 3r_2, \ldots$

$a_n + b_n = a_1 + b_1 + a_1 + b_1 + r_1 + r_2 +$
$+ a_1 + b_1 + 2r_1 + 2r_2, a_1 + b_1 + 3r_1 + 3r_2, \ldots$

$a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (a_1 + b_1 + r) +$
$+ (a_1 + b_1 + 2r) + (a_1 + b_1 + 3r), \ldots$

A seqüência é uma PA de 1º termo $(a_1 + b_1)$ e razão $r = r_1 + r_2$

04. (Verdadeira)

$\sqrt{x^2 + 1} = x - 1 \rightarrow$

$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2 = (x - 1)^2 \rightarrow$

$\rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{1} = \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} \rightarrow$

$\rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

Verificação: $\sqrt{0^2 + 1} = 0 - 1$

$\sqrt{1} = -1$

$1 \neq -1 \quad \therefore \quad S = \varnothing$

08. (Falsa)

$$\frac{4^{3+x} - 4^{x-3}}{4^x + 4^{x-3}} = \frac{4^3 \cdot 4^x - 4^x \cdot 4^{-3}}{4^x + 4^x \cdot 4^{-3}} =$$

$$= \frac{64 \cdot 4^x - \frac{4^x}{64}}{4^x + \frac{4^x}{64}} = \frac{\frac{4\,096 \cdot 4^x - 4^x}{\cancel{64}}}{\frac{64 \cdot 4^x + 4^x}{\cancel{64}}} =$$

$$= \frac{\cancel{4^x}(4\,096 - 1)}{\cancel{4^x}(64 + 1)} = \frac{4\,095}{65} = 63 \text{ para todo } x \text{ real.}$$

16. (Falsa)

$\frac{n^2 - 1}{n + 1} = n - 1$ não se define para $n = -1$.

p. 54

13 (Unifor-CE) O número de termos da progressão $\left(\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \ldots, 3\,125\right)$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Resolução:

$a_1 = \frac{1}{125}$; $a_n = 3\,125$; $q = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{125}} = 5$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow 3\,125 = \frac{1}{125} \cdot 5^{n-1} \rightarrow$

$\rightarrow 5^5 = 5^{-3} \cdot 5^{n-1}$

$n = 9$

14 Os números x, $\sqrt{x}$ e $\log_2(10x)$ são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica. Calcule:

a) o 1º termo *x* $x = \frac{1}{5}$

b) o 5º termo 5

Resolução:

a) $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\log_2(10x)}{\sqrt{x}}$, onde $x > 0 \therefore \log_2(10x) = 1$

$x = \frac{1}{5}$

b) $a_1 = \frac{1}{5}$; $a_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $a_3 = 1 \therefore q = \sqrt{5}$

$a_4 = 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}$ $a_5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

15 (Unitau-SP) Calcule o valor de *x*, de modo que a seqüência $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ seja uma progressão geométrica. 1

Resolução:

$$\frac{3^{4-x}}{3^{x+1}} = \frac{3^{3x+1}}{3^{4-x}} \rightarrow 8 - 2x = 4x + 2 \rightarrow x = 1$$

16 (UFOP-MG) Numa progressão geométrica, $a_1 = 1$ e $a_2 = 9$. Determine *n*, sabendo que $a_n = 6\,561$. 5

Resolução:

$a_1 = 1$; $a_2 = 9 \rightarrow q = \frac{9}{1} = 9$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow 6\,561 = 1 \cdot 9^{n-1}$

$3^8 = 3^{2(n-1)} \rightarrow 8 = 2n - 2 \rightarrow n = 5$

17 (UFRGS) Para pagar uma dívida de *x* reais no seu cartão de crédito, uma pessoa, após um mês, passará a fazer pagamentos mensais de 20% sobre o saldo devedor. Antes de cada pagamento, será lançado juro de 10% sobre o saldo devedor. Efetuados 12 pagamentos, a dívida, em reais, será:

a) zero

b) $\frac{x}{12}$

c) $(0,88)^{12}x$

d) $(0,92)^{12}x$

e) $(1,1)^{12}x$

Resolução:

Sendo *x* o saldo devedor, a cada mês serão acrescidos a esse saldo 10% de juros e, em seguida, descontados 20% a título de pagamento, gerando um novo saldo devedor de $x \cdot 1,1 \cdot 0,8 = 0,88\,x$.

Como a cada mês o procedimento se repete, cada novo saldo devedor corresponderá ao anterior multiplicado por 0,88, gerando uma seqüência do tipo x; 0,88x; $(0,88)^2x$; $(0,88)^3x$; ..., que é uma PG de 1º termo *x* e razão 0,88, na qual cada novo saldo devedor é dado por $(0,88)^{n-1}x$, sendo *n* o nº de termos da seqüência.

Após 12 pagamentos, estaremos no 13º termo da seqüência, ou seja, $A_{13} = (0,88)^{13-1}\,x = (0,88)^{12}x$.

18 (UEM-PR) Os números x, y e z formam uma PA crescente cuja soma é igual a 48. Somando-se 8 unidades a z, a nova seqüência passa a formar uma PG. Calcule o valor de z. 24

Resolução:

Considerando as duas afirmações:

a) (x, y, z) é uma PA crescente de soma 48; logo:

$$S_3 = \frac{(x + z) \cdot 3}{2} = 48 \rightarrow x + z = 32 \rightarrow x - 32 = z$$

$$\frac{x + z}{2} = y \rightarrow y = \frac{32}{2} \rightarrow y = 16$$

b) (x, y, z + 8) é uma PG, daí:

$$y^2 = x \cdot (z + 8) \rightarrow 16^2 = x \cdot (32 - x + 8) \rightarrow 256 = 40x - x^2 \rightarrow x^2 - 40x + 256 = 0$$

$$\Delta = 1\,600 - 1\,024$$

$$\Delta = 576$$

$$x = \frac{40 \pm 24}{2} = \begin{cases} x' = 32 \\ x'' = 8 \end{cases}$$

Como a PA é crescente, $x = 8$: (8, 16, 24)

$\therefore z = 24$

19 (Fuvest-SP) Três números positivos, cuja soma é 30, estão em PA. Somando-se, respectivamente, 4, −4 e −9 ao 1º, 2º e 3º termos dessa PA, obtemos três números em PG. Então, um dos termos da PA é:

a) 9
b) 11
c) 12
c) 13
e) 15

Resolução:

Seja $(x - r, x, x + r)$ a PA.

Se a soma dos termos é igual a 30, temos: $x - r + x + x + r = 30 \rightarrow 3x = 30 \rightarrow x = 10$

Somando-se 4, −4 e −9, nessa ordem, aos termos da PA, temos a PG $(10 - r + 4, 10 - 4, 10 + r - 9)$, ou ainda $(14 - r, 6, 1 + r)$.

Na PG, teremos: $6^2 = (14 - r) \cdot (1 + r) \rightarrow 36 = 14 + 14r - r - r^2 \rightarrow$

$r^2 - 13r + 22 = 0$

$\Delta = 169 - 88 = 81$

$$r = \frac{13 \pm 9}{2} = \begin{cases} r' = 11 \text{ (não convém)} \\ r'' = 2 \end{cases}$$

$\therefore r = 2$ e a PA procurada é (8, 10, 12).

20 (UENF-RJ) Numa reserva florestal foram computados 3 645 coelhos. Uma determinada infecção alastra-se de modo que, ao final do primeiro dia, há cinco coelhos infectados e, a cada cinco dias, o número total de coelhos infectados triplica.

a) Determine a quantidade de coelhos infectados ao final do 21º dia. 405 coelhos

b) Calcule o número mínimo de dias necessários para que toda a população de coelhos esteja infectada. 31 dias

Resolução:

a) a_n = nº de coelhos infectados na n-ésima etapa

b_n = dia em que ocorre a_n

$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ e $b_n = 1 + (n - 1) \cdot 5$

Sendo $b_n = 21$, temos:

$21 = 1 + (n - 1) \cdot 5 \rightarrow n = 5$

Portanto:

$a_5 = 5 \cdot 3^{5-1} \rightarrow a_5 = 405$ coelhos

b) Sendo $a_n = 3\,645$, temos:

$3\,645 = 5 \cdot 3^{n-1} \rightarrow 3^{n-1} = 729$

$3^{n-1} = 3^6$

$n = 7$

Portanto:

$b_7 = 1 + (7 - 1) \cdot 5 \rightarrow b_7 = 31$ dias

21 (UFPB) Socorro, apaixonada por Matemática, propôs para seu filho, João: “Você ganhará uma viagem de presente, no final do ano, se suas notas, em todas as disciplinas, forem maiores ou iguais à quantidade de termos comuns nas progressões geométricas (1, 2, 4, ..., 4 096) e (1, 4, 16, ..., 4 096)”. De acordo com a proposta, João ganhará a viagem se não tiver nota inferior a:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Resolução:

PG (1, 2, 4, 8, 16, ..., 4 096)
PG (1, 4, 16, ..., 4 096)
Os termos iguais são os termos da PG (1, 4, 16, ..., 4 096). Logo:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$4\,096 = 1 \cdot 4^{n-1}$
$2^{12} = 4^{n-1}$
$2^{12} = 2^{2(n-1)}$
$2^{12} = 2^{2n-2}$
$12 = 2n - 2$
$2n = 14$
$n = 7$

A nota deverá ser maior ou igual a 7.

22 (UFSC) Assinale a(s) proposição(ões) correta(s):

(01) O 20º termo da PA $(x, x + 10, x^2, ...)$ com $x < 0$ é 186.

(02) A soma dos *n* primeiros números naturais ímpares é $n^2 + 1$.

(04) O termo $\frac{1}{1\,024}$ encontra-se na 12ª posição na PG $\left(2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$.

(08) Sabendo que a sucessão (x, y, 10) é uma PA crescente e a sucessão (x, y, 18) é uma PG crescente, então $xy = 12$.

(16) O valor de *x* na igualdade $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + ... = 12$, na qual o 1º membro é a soma dos termos de uma PG infinita, é 10. $1 + 4 + 8 = 13$

Resolução:

01. (Verdadeira)

$x + 10 - x = x^2 - (x + 10) \rightarrow$
$\rightarrow 10 = x^2 - x - 10$
$x^2 - x - 20 = 0 \rightarrow x = 5$ (não serve)
ou
$x = -4$

A progressão aritmética é $(-4, 6, 16, ...)$.

Logo: $a_{20} = a_1 + 19r \rightarrow$
$a_{20} = -4 + 19 \cdot 10 = 186$

02. (Falsa)

Os números ímpares são (1, 3, 5, 7, ...).

$a_n = a_1 + (n - 1)r \rightarrow$
$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \rightarrow a_n = 2n - 1$

Logo: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow$

$\rightarrow S_n = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2$

04. (Verdadeira)

$a_{12} = a_1 q^{11} \rightarrow a_{12} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \rightarrow$

$\rightarrow a_{12} = 2 \cdot \frac{1}{2\,048} = \frac{1}{1\,024}$

08. (Verdadeira)

(x, y, 10) é uma PA $\therefore 10 - y = y - x \rightarrow$
$\rightarrow x = y + y - 10 \rightarrow x = 2y - 10$ (I)

(x, y, 18) é uma PG $\therefore \frac{y}{x} = \frac{18}{y} \rightarrow y^2 = 18x \rightarrow x = \frac{y^2}{18}$ (II)

Fazendo (I) = (II), teremos:

$\frac{y^2}{18} = 2y - 10 \rightarrow y^2 = 36y - 180 \rightarrow$
$\rightarrow y^2 - 36y + 180 = 0$
$\Delta = 576$

$y = \frac{36 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{36 \pm 24}{2} = \begin{cases} y' = 30 \\ y'' = 6 \end{cases}$

Se $y = 6$, então $x = 2 \cdot 6 - 10 = 2$
Se $y = 30$, então $x = 2 \cdot 30 - 10 = 50$

Como a PA e a PG são crescentes, teremos $x = 2$ e $y = 6$, conseqüentemente, $x \cdot y = 2 \cdot 6 = 12$.

16. (Falsa)

$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + ... = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{3-1}{3}} = \frac{x}{\frac{2}{3}} =$

$= \frac{3x}{2} \rightarrow \frac{3x}{2} = 12 \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8$

Em questões como a 23, as alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna I, e as falsas, na II.

23 (UFSE) Verifique a veracidade das afirmações que seguem:

V – F

0 – 0 Os termos da seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$, em que $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, são chamados números de Fibonacci. Assim sendo, o 8º número de Fibonacci é 21.

1 – 1 A seqüência $(2^{2x}, 2^{2x+1}, 3 \cdot 2^{2x}, 2^{2x+2}, ...)$ é uma PA de razão 4^x.

2 – 2 A soma de todos os números pares compreendidos entre 57 e 217 é 10 980.

3 – 3 Podem ser inseridos cinco meios geométricos reais entre os números −3 e 96.

4 – 4 Se a seqüência (40, a, b, 5,...) é uma PG, então a soma de seus dez primeiros termos é igual a $\frac{5\,115}{64}$.

Resolução:

00. (Verdadeira)

$n = 2 \rightarrow a_3 = a_2 + a_1 \rightarrow a_3 = 2$

$n = 3 \rightarrow a_4 = a_3 + a_2 \rightarrow a_4 = 3$

$n = 4 \rightarrow a_5 = a_4 + a_3 \rightarrow a_5 = 5$

$n = 5 \rightarrow a_6 = a_5 + a_4 \rightarrow a_6 = 8$

$n = 6 \rightarrow a_7 = a_6 + a_5 \rightarrow a_7 = 13$

$n = 7 \rightarrow a_8 = a_7 + a_6 \rightarrow a_8 = 21$

11. (Verdadeira)

$2^{2x}, 2 \cdot 2^{2x}, 3 \cdot 2^{2x}, 4 \cdot 2^{2x}, ...$

A razão é:

$r = 2 \cdot 2^{2x} - 2^{2x} = 1 \cdot 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$

22. (Falsa)

A seqüência é (58, 60, 62, ..., 216)

$a_n = a_1 + (n - 1)\, r \rightarrow 216 =$

$= 58 + (n - 1) \cdot 2 \rightarrow n = 80$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow$

$\rightarrow S_n = \frac{(58 + 216) \cdot 80}{2} \rightarrow$

$\rightarrow S_n = 10\,960$

33. (Falsa)

$a_7 = a_1 q^6 \rightarrow 96 = -3 \cdot q^6 \rightarrow q^6 = -32 \rightarrow \nexists$ raiz real

44. (Verdadeira)

(40, a, b, 5, ...) é uma PG; portanto,

$a_4 = a_1 \cdot q^3$, ou seja, $5 = 40 \cdot q^3 \rightarrow q^3 = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \rightarrow$

$\rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \rightarrow q = \frac{1}{2}$.

$$S_{10} = \frac{40 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{40 \cdot \left(\frac{1 - 1\,024}{1\,024}\right)}{\frac{1-2}{2}} = \frac{5\,115}{64}$$

24 (UFSC) Se *a*, *b*, *c* são termos consecutivos de uma PA de razão 5 e (a + 2), b, (c − 1) são termos consecutivos de uma PG, qual o valor de a + b + c? 36

Resolução:

(a, b, c): PA com r = 5

$$\begin{cases} b = a + 5 & \text{(I)} \\ c = a + 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

(a + 2, b, c − 1): PG

$$\left\{ \frac{b}{a + 2} = \frac{c - 1}{b} \right. \quad \text{(III)}$$

Substituindo as expressões (I) e (II) na expressão (III):

$\frac{a + 5}{a + 2} = \frac{a + 10 - 1}{a + 5} \rightarrow a = 7 \therefore b = 12; c = 17$

Logo, $a + b + c = 7 + 12 + 17$

$a + b + c = 36$

25 (UFPA) A soma da série infinita $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$ é:

a) $\frac{6}{5}$

b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{5}{4}$

d) 2

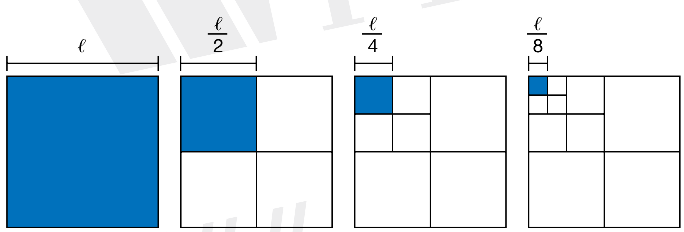
e) $\frac{7}{4}$

Resolução:

$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{5} \rightarrow q = \frac{1}{5}$

$S_n = \frac{a_1}{1 - q} \rightarrow S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$

26 (UFPel-RS) O lado de um quadrado mede ℓ unidades de comprimento. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtêm-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme a figura, que mostra parte de uma seqüência infinita. Determine a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos dessa seqüência. 8ℓ



Resolução:

$a_1 = 4\ell;\ a_2 = \frac{4\ell}{2};\ a_3 = \frac{4\ell}{4} \rightarrow q = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{a_1}{1 - q} \rightarrow S_n = \frac{4\ell}{1 - \frac{1}{2}} = 8\ell$