TERCEIRÃO FTD 2

Matemática

M8 – Função Logarítmica

p. 14

1 (UFSM-RS) Sejam $\log_8 128 = x$, $\log_4 64 = y$ e $\log_2 32 = z$, então $x + y + z$ é igual a:

a) $\frac{13}{2}$

b) $\frac{31}{3}$

c) 13

d) 18

e) $\frac{64}{3}$

Resolução:

$\log_8 128 = x \Rightarrow 8^x = 128 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$

$\log_4 64 = y \Rightarrow 4^y = 64 \Rightarrow y = 3$

$\log_2 32 = z \Rightarrow 2^z = 32 \Rightarrow z = 5$

$x + y + z = \frac{7}{3} + 3 + 5 = \frac{31}{3}$

2 (UFMT) A magnitude de um terremoto é medida na escala de Richter. Considere que as magnitudes M_1 e M_2 de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$, em que E_1 e E_2 são as medidas das quantidades de energia liberada pelos terremotos.

Em 1955, ocorreu um terremoto no norte de Mato Grosso e, em 2004, um outro na ilha de Sumatra, na costa da Indonésia, que liberaram as quantidades de energia E_1 e E_2, respectivamente. Admitindo-se que E_1 foi equivalente à milésima parte de E_2 e que o terremoto ocorrido na ilha de Sumatra teve magnitude $M_2 = 9$, qual a magnitude M_1 do terremoto ocorrido no norte de Mato Grosso?

a) 6

b) 7

c) 5

d) 4

e) 3

Resolução:

Sendo $E_1 = \frac{E_2}{1\,000}$ e $M_2 = 9$, temos:

$$M_1 - M_2 = \frac{2}{3}\log\frac{E_1}{E_2} \Rightarrow M_1 - 9 = \frac{2}{3}\cdot\log\frac{\frac{E_2}{1\,000}}{E_2}$$

$$M_1 - 9 = \frac{2}{3}\cdot\log\frac{1}{1\,000}$$

$$M_1 - 9 = \frac{2}{3}\cdot(-3)$$

$$M_1 = 9 - 2$$

$$M_1 = 7$$

3 (Unicruz-RS) O logaritmo de um número na base 16 é $\frac{2}{3}$. Então, o logaritmo desse número na base $\frac{1}{4}$ é:

1) $\frac{3}{8}$
2) 3
3) 6
4) $-\frac{3}{4}$
5) $-\frac{4}{3}$

Resolução:
Do enunciado, temos:

$$\log_{16} x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 16^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \left(2^4\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{3}}$$

Portanto:

$$\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}} 2^{\frac{8}{3}} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y = 2^{\frac{8}{3}}$$

$$2^{-2y} = 2^{\frac{8}{3}}$$

$$-2y = \frac{8}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}$$

4 (Unifor-CE) O número real x, tal que $x = 2^{3 + \log_2 3} + 3^{2 + \log_3 2}$, é igual a:

a) 36
b) 42
c) 54
d) 60
e) 72

Resolução:

$$x = 2^3 \cdot 2^{\log_2 3} + 3^2 \cdot 3^{\log_3 2} \Rightarrow x = 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2$$

$$x = 24 + 18$$

$$x = 42$$

5 (UNI-RIO/Ence-RJ) Sabe-se que $1 + \log x + \log^2 x + \log^3 x + \ldots = \frac{3}{5}$. Calcule o valor de x^3 sabendo que $|\log x| < 1$. 0,01

Resolução:
Sendo $|\log x| < 1$, a seqüência $1 + \log x + \log^2 x + \log^3 x + \ldots$ é uma PG infinita e decrescente, com 1º termo (a_1) igual a 1 e razão (q) igual a log x. Logo:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{1 - \log x} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$3(1 - \log x) = 5 \Rightarrow 3 - 3\log x = 5 \Rightarrow -3\log x = 2 \Rightarrow \log x = \frac{-2}{3}$$

Aplicando a definição:

$$\log x = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = 10^{\frac{-2}{3}}$$

Portanto:

$$x^3 = \left(10^{\frac{-2}{3}}\right)^3 \Rightarrow 10^{-2} = 0{,}01$$

6 (MACK-SP) O valor de $\log\left(\frac{1}{ab}\right)$, sabendo que *a* e *b* são raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, é:

a) 2

b) -1

c) $-\frac{1}{2}$

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

Resolução:

Como *a* e *b* são raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, temos: $a = 2$ e $b = 5$.

Assim:

$$\log\left(\frac{1}{ab}\right) = \log\left(\frac{1}{2 \cdot 5}\right) = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$$

7 (UFBA) Determine todos os valores de *x* para os quais $y = \sqrt{x - \frac{2}{x-1}} + \log_2(-x + 3)$ é um número real. $[-1, 1[\cup [2, 3[$

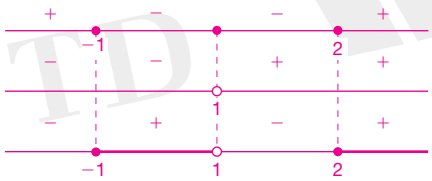
Resolução:

Devemos ter:

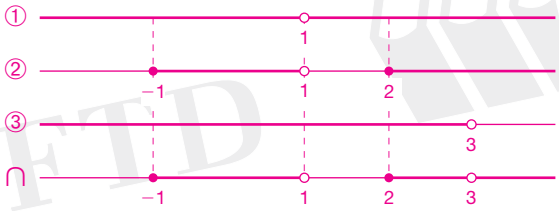
$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ ①

$x - \frac{2}{x-1} \geqslant 0$ e $-x + 3 > 0$

$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \geqslant 0$ ② $x < 3$ ③



Fazendo ① ∩ ② ∩ ③, vem:



$x \in [-1, 1[\cup [2, 3[$

8 (UEL-PR) No universo $\mathbb{R}$, quais as soluções da equação $\log_{x^2}(3x^2 + 4) = 2$? $\{-2, 2\}$

Resolução:

C.E.: $\begin{cases} 3x^2 + 4 > 0 & \forall\ x \in \mathbb{R} \\ x^2 > 0 \text{ e } x^2 \neq 1 \end{cases}$

$(x^2)^2 = 3x^2 + 4$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \qquad (x^2 = y)$

$y^2 - 3y - 4 = 0$

$x' = +2$ e $x'' = -2$

$S = \{-2, 2\}$

9 (UEM-PR) Determine o conjunto solução da seguinte equação: $(\log_2 x)^2 + \log_2\left(\frac{1}{x}\right) = 6$. $\left\{\frac{1}{4}, 8\right\}$

Resolução:

Devemos ter $x > 0$.

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 6$

Fazendo $\log_2 x = y$, vem:

$y^2 - y = 6 \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \begin{cases} y' = 3 \\ y'' = -2 \end{cases}$

Logo:

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

$\log_2 x = -2 \Rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

10 (UEPG-PR) Sendo $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 = 0$, então o produto entre as raízes da equação vale:

a) -8

b) 16

c) $-\frac{1}{4}$

d) 4

e) 8

Resolução:

$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 = 0$

C.E.: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x = y \end{cases}$

$y^2 - 3y - 4 = 0 \begin{cases} y' = -1 \\ y'' = 4 \end{cases}$

$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$

Produto das raízes: $\frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

11 (Uniderp-MS) A equação $\log_3 (\log_x 27) = 2$ é verdadeira se, e somente se:

a) $x \in]0, 1[$

b) $x \in]1, 2[$

c) $x \in]2, +\infty[$

d) x é potência de 2.

e) x é divisor de 3.

Resolução:

$\log_3 (\log_x 27) = 2 \Rightarrow \log_x 27 = 9 \Rightarrow x^9 = 27$

$x = \sqrt[9]{27}$

$x = \sqrt[3]{3}$

Logo, $x \in]1, 2[$.

p. 18

12 (Cefet-PR) O conjunto solução da equação $(\log_2 4)2^x + \left(\log_2 \frac{1}{2}\right)2^x - (\log 100)4^x = 0$ é:

a) $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

b) $\{0, -1\}$

c) $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$

d) $\{-1\}$

e) $\{0\}$

Resolução:

Sendo $\log_2 4 = 2$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ e $\log 100 = 2$, temos:

$2 \cdot 2^x - 1 \cdot 2^x - 2 \cdot 4^x = 0$

$2 \cdot 2^x - 1 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0$

Fazendo $2^x = y$, vem:

$2y - y - 2 \cdot y^2 = 0 \Rightarrow 2y^2 - y = 0$

$y(2y - 1) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Logo:

$2^x = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

$2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$

13 (UEL-PR) Os números reais que satisfazem a equação $\log_2 (x^2 - 7x) = 3$ pertencem ao intervalo:

a) $]0, +\infty[$
b) $[0, 7]$
c) $]7, 8]$
d) $[-1, 8]$
e) $[-1, 0]$

Resolução:

$\log_2 (x^2 - 7x) = 3$

C.E.: $\{x^2 - 7x > 0$

$\log_2 (x^2 - 7x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x = 8$

$$x^2 - 7x - 8 = 0 \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 8 \end{cases}$$

Logo, as raízes da equação pertencem ao intervalo $[-1, 8]$.

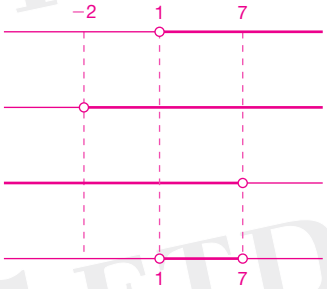
14 (UFMA) Considere a expressão: $\log_2 (x - 1) - \log_2 (x + 2) - \log_2 (7 - x) + 1 + \log_2 3$.
Se *A* é o conjunto de números reais para os quais essa expressão está definida e *B*, o conjunto de todos os números reais em que essa expressão se anula, então:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 7\}$ e $B = \{4\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ e } 1 < x < 7\}$ e $B = \{4\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ e } 1 < x < 7\}$ e $B = \{-5, 4\}$
d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ e } 1 < x < 7\}$ e $B = \{-5\}$
e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 7\}$ e $B = \{4\}$

Resolução:

Pelos dados, temos:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ 7 - x > 0 \Rightarrow -x > -7 \Rightarrow x < 7 \end{cases}$$



Logo, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 7\}$

$\log_2 (x - 1) - \log_2 (x + 2) - \log_2 (7 - x) + 1 + \log_2 3 = 0$

$\log_2 (x - 1) - \log_2 (x + 2) - \log_2 (7 - x) + \log_2 3 = -1$

$$\log_2 \frac{(x - 1) \cdot 3}{(x + 2) \cdot (7 - x)} = -1 \Rightarrow \frac{3(x - 1)}{(x + 2)(7 - x)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$(x + 2)(7 - x) = 2 \cdot 3 \cdot (x - 1)$

$7x - x^2 + 14 - 2x = 6x - 6$

$$x^2 + x - 20 = 0 \begin{cases} x' = -5 \text{ (não serve)} \\ x'' = 4 \text{ (serve)} \end{cases}$$

Logo, $B = \{4\}$.

15 (Unemat-MT) De acordo com a equação logarítmica $\log_2 (3x - 1) = 1 + \log_2 (x + 3)$, podemos afirmar que:

1 Para que a equação tenha solução, o valor de x terá de ser igual a 7.

2 Uma representação equivalente à equação acima pode ser dada como $\log_2 \left(\frac{3x - 1}{x + 3}\right) = 1$.

3 Como $\log_2 1 = 0$, logo a solução dessa equação é $x = 2$.

4 Essa equação não apresenta nenhuma resposta pertencente ao conjunto dos números reais, pois não podemos representar o número 1 numa expressão logarítmica.

5 Podemos afirmar que a equação $\log_2 (3x - 1) = 1 + \log_2 (x + 3)$ é equivalente à equação $\log_2 (3x - 1) = \log_2 (2x + 6)$, como resultado da aplicação de propriedades operatórias dos logaritmos.

Resolução:

1. (Verdadeira)

C.E.: $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

$x + 3 > 0$

$\log_2 (3x - 1) = \log_2 2 + \log_2 (x + 3) \Rightarrow \log_2 (3x - 1) = \log_2 2(x + 3)$

$3x - 1 = 2(x + 3)$

$x = 7$

2. (Verdadeira)

$\log_2 (3x - 1) - \log_2 (x + 3) = 1 \Rightarrow \log_2 \frac{3x - 1}{x + 3} = 1$

3. (Falsa)

$\log_2 1 = 0$, mas a solução não é $x = 2$.

4. (Falsa)

A solução é um número real.

5. (Verdadeira)

$\log_2 (3x - 1) = \log_2 (2x + 6)$

Resposta: VVFFV

16 (Uniube-MG) A expectativa de lucro de uma pequena empresa é expressa pela lei $L(t) = 2\,000\,(1{,}25)^t$, sendo $L(t)$ o lucro após t meses. Considere $\log 4 = 0{,}602$ e $\log 1{,}25 = 0{,}097$. Pode-se afirmar, assim, que o lucro atingirá R$ 8 000,00 no decorrer do:

a) 10º mês
b) 7º mês
c) 5º mês
d) 4º mês
e) 3º mês

Resolução:

$L(t) = 2\,000\,(1{,}25)^t$

$8\,000 = 2\,000\,(1{,}25)^t \Rightarrow 4 = (1{,}25)^t$

$\log 4 = \log (1{,}25)^t \Rightarrow \log 4 = t \cdot \log 1{,}25$

$0{,}602 = t \cdot 0{,}097 \Rightarrow t = \frac{0{,}602}{0{,}097} = 6{,}2$

No decorrer do 7º mês.

17 (UFSM-RS) Carros novos melhoram o escoamento do trânsito e causam menos poluição. Para adquirir um carro novo, um cidadão fez um investimento de R$ 10 000,00 na poupança, a juros mensais de 1%, o qual rende, ao final de n meses, o valor de $C(n) = 10\,000\,(1{,}01)^n$ reais.

O número mínimo de meses necessário para que o valor aplicado atinja R$ 15 000,00 é:

a) 44
b) 46
c) 47
d) 48
e) 50

Dados:

$\log_{10} 2 = 0{,}301$

$\log_{10} 3 = 0{,}477$

$\log_{10} 101 = 2{,}004$

Resolução:

Pelos dados, temos:

$$C(n) = 15\,000 \Rightarrow 15\,\cancel{000} = 10\,\cancel{000} \cdot (1{,}01)^n$$

$$15 = 10 \cdot (1{,}01)^n$$

$$\frac{15}{10} = (1{,}01)^n$$

Aplicando logaritmo decimal em ambos os membros, temos:

$$\log \frac{15}{10} = \log (1{,}01)^n \Rightarrow \log 15 - \log 10 = n \cdot \log 1{,}01$$

$$n = \frac{\log 15 - \log 10}{\log 1{,}01}$$

$$n = \frac{\log \frac{30}{2} - \log 10}{\log 1{,}01}$$

$$n = \frac{\log 30 - \log 2 - \log 10}{\log 1{,}01}$$

$$n = \frac{\log 3 + \cancel{\log 10} - \log 2 - \cancel{\log 10}}{\log 1{,}01}$$

Substituindo os valores dos logaritmos, temos:

$$n = \frac{0{,}477 - 0{,}301}{2{,}004 - 2} \Rightarrow n = \frac{0{,}176}{0{,}004}$$

$$n = 44 \text{ meses}$$

18 (UFPR) Um grupo de estudantes resolveu repetir a medição da altura do Pico da Neblina feita na década de 1960. Para isso, escalaram essa montanha e levaram um barômetro. Chegando ao cume da montanha, efetuaram várias medições da pressão atmosférica no local e obtiveram o valor médio de 530 mmHg. A pressão atmosférica P (h) a uma dada altura *h* (em metros, em relação ao nível do mar) é fornecida pela função $P(h) = P_0 \cdot e^{\alpha h}$, sendo *e* a base do sistema de logaritmos neperianos, $P_0 = 760$ mmHg a pressão atmosférica ao nível do mar, e α um número que depende principalmente da temperatura média no local de medição.

Sabendo-se que, nas condições desse experimento, $\alpha = -0{,}00012$ e que os estudantes usaram os valores aproximados $\ln(760) = 6{,}63$ e $\ln(530) = 6{,}27$, qual foi a altura que encontraram para o Pico da Neblina?

3 000 m

Resolução:

Substituindo os valores, temos:

$P(h) = P_0 \cdot e^{\alpha h} \Rightarrow P(h) = 760 \cdot e^{-0{,}00012h}$

Sendo P(h) = 530 mmHg, vem:

$530 = 760 \cdot e^{-0{,}00012h}$

Tomando os logaritmos dos dois membros, obtemos:

$\ln 530 = \ln[760 \cdot e^{-0{,}00012h}]$

$\ln 530 = \ln 760 + \ln e^{-0{,}00012h}$

$\ln 530 = \ln 760 - 0{,}00012h \cdot \ln e$

$6{,}27 = 6{,}63 - 0{,}00012h \cdot 1$

$0{,}00012h = 0{,}36$

$h = 3\,000$ m

19 Resolva a equação $4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3$. $\{2, 4\}$

Resolução:

$4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3$

C.E.: $\{x > 0$

$\log_2 x = y \Rightarrow x = 2^y$

$4 \cdot (2^y)^y = 2^{3y}$

$2^{y^2+2} = 2^{3y} \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \begin{cases} y' = 2 \\ y'' = 1 \end{cases}$

$x = 2^2 = 4$

$x = 2^1 = 2$

$S = \{2, 4\}$

20 (MACK-SP) Se $\begin{cases} 2\log_y x + (\log_x y)^{-1} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases}$, com $x > 1$ e $y > 1$, então o valor de $x + y$ é:

a) 12
b) 18
c) 20
d) 24
e) 36

Resolução:

Com $x > 1$ e $y > 1$, temos:

$$\frac{1}{\log_x y} = \log_y x.$$

De $2\log_y x + \dfrac{1}{\log_x y} = 6$, temos:

$$2\log_y x + \log_y x = 6$$
$$3\log_y x = 6$$
$$\log_y x = 2 \Rightarrow x = y^2$$

De $x - y = 12$, temos:

$y^2 - y = 12$

$y^2 - y - 12 = 0$

As raízes dessa equação são 4 e -3.

Da condição $y > 1$, temos $y = 4$.

Como $x = y^2$, temos $x = 16$ e, portanto, $x + y = 20$.

21 (FGV-SP)

a) Obtenha os valores de *x* e *y* que satisfazem o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \log_4 x - \log_4 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ $x = 10$ e $y = 5$

b) Qual o conjunto solução da equação exponencial $5^{2x} - 5^{x+1} + 4 = 0$? $\{0, \log_5 4\}$

Resolução:

a) $$\begin{cases} x + y = 15 \\ \log_4 x - \log_4 y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ \log_4 \left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = 4^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

b) $5^{2x} - 5^{x+1} + 4 = 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 5 \cdot (5^x) + 4 = 0$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 4$

Para $y = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Para $y = 4 \Rightarrow 5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4$

22 Sendo $\log 2 = 0{,}3$; $\log 3 = 0{,}4$ e $\log 5 = 0{,}7$, calcule:

a) $\log_2 50$ $\frac{17}{3}$

b) $\log_3 45$ $\frac{15}{4}$

c) $\log_9 2$ $\frac{3}{8}$

d) $\log_8 600$ 3

e) $\log_5 3$ $\frac{4}{7}$

f) $\log_6 15$ $\frac{11}{7}$

Resolução:

a) $\log_2 50 = \frac{\log 50}{\log 2} = \frac{\log(2 \cdot 5 \cdot 5)}{\log 2} = \frac{\log 2 + \log 5 + \log 5}{\log 2} = \frac{0{,}3 + 0{,}7 + 0{,}7}{0{,}3} = \frac{1{,}7}{0{,}3} = \frac{17}{3}$

b) $\log_3 45 = \frac{\log 45}{\log 3} = \frac{\log(3 \cdot 3 \cdot 5)}{\log 3} = \frac{\log 3 + \log 3 + \log 5}{\log 3} = \frac{0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}7}{0{,}4} = \frac{1{,}5}{0{,}4} = \frac{15}{4}$

c) $\log_9 2 = \frac{\log 2}{\log 9} = \frac{\log 2}{\log 3^2} = \frac{\log 2}{2 \log 3} = \frac{0{,}3}{2 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}3}{0{,}8} = \frac{3}{8}$

d) $\log_8 600 = \frac{\log 600}{\log 8} = \frac{\log(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)}{\log 2^3} =$

$= \frac{\log 2^3 + \log 3 + \log 5^2}{\log 2^3} = \frac{3 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}7}{3 \cdot 0{,}3} = \frac{2{,}7}{0{,}9} = 3$

e) $\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0{,}4}{0{,}7} = \frac{4}{7}$

f) $\log_6 15 = \frac{\log 15}{\log 6} = \frac{\log(3 \cdot 5)}{\log(2 \cdot 3)} = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 2 + \log 3} = \frac{0{,}4 + 0{,}7}{0{,}3 + 0{,}4} = \frac{1{,}1}{0{,}7} = \frac{11}{7}$

23 (UEPG-PR) Se $\log_2 N = p$, assinale o que for correto:

(01) $\log_{16} N = \frac{p}{4}$

(02) $\log_{\frac{1}{2}} N = -p$

(04) $\log_3 N = p \log_3 2$

(08) $\log_8 N^2 = \frac{2p}{3}$

(16) $\log_2 N = 2 \log_2 p$

Resolução:

01. (Verdadeira)

$\log_{16} N = \frac{\log_2 N}{\log_2 16} = \frac{\log_2 N}{4} = \frac{p}{4}$

02. (Verdadeira)

$\log_{\frac{1}{2}} N = \frac{\log_2 N}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{p}{-1} = -p$

04. (Verdadeira)

$\log_3 N = \frac{\log_2 N}{\log_2 3} = \frac{p}{\frac{\log_3 3}{\log_3 2}} =$

$= \frac{p}{\frac{1}{\log_3 2}} = p \cdot \log_3 2$

08. (Verdadeira)

$\log_8 N^2 = 2 \cdot \log_8 N = 2 \cdot \frac{\log_2 N}{\log_2 8} = \frac{2p}{3}$

16. (Falsa)

$\log_2 N = p \Rightarrow N = 2^p$

$\log_2 N = \log_2 2^p = p \cdot \log_2 2$

24 (PUC-MG) A raiz da equação $\log_2 x + \log_4 x = 1$ é igual a:

a) 2
b) $\sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt[3]{4}$
d) $2\sqrt[3]{4}$
e) $3\sqrt[3]{2}$

Resolução:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1 \qquad (\log_2 x = y)$$

$$y + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$\log_2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

25 (MACK-SP) Se $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \frac{1}{x} = -1$, então $\log_4 x$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) -1
d) 1
e) -2

Resolução:

De $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \frac{1}{x} = -1$ e $x > 0$, temos:

$$\log_2 x^{\frac{1}{2}} + \log_2 x^{-1} = -1$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x = -1$$

$$-\frac{1}{2}\log_2 x = -1$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, $\log_4 x = \log_4 4 = 1$.

26 (ITA-SP) O valor de y que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) 3
d) $\frac{1}{8}$
e) 7

Resolução:

$$\frac{\log_7 49}{\log_7 y} = \frac{\log_7 7}{\log_7 y^2} + \frac{\log_7 7}{\log_7 2 + \log_7 y} \qquad (\log_7 y = x)$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{\log_7 2 + x} \Rightarrow \frac{2}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{\log_7 2 + x} \Rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{\log_7 2 + x}$$

$$3(\log_7 2 + x) = 2x \Rightarrow 3\log_7 2 = -x \Rightarrow x = \log_7 2^{-3}$$

Assim, $\log_7 y = \log_7 2^{-3} \Rightarrow y = \frac{1}{8}$

27 (EFOA-MG) Sabendo-se que $\log_a 5 + \log_b 4 = 1$ e $\log_a b = 2$, o valor de $a + b$ é:

a) 100
b) 115
c) 119
d) 120
e) 110

Resolução:

$\log_a 5 + \log_b 4 = 1$ e $\log_a b = 2$ $\quad (0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$

$\log_a b = 2 \Rightarrow b = a^2$

$$\log_b 4 = \frac{\log_a 4}{\log_a a^2} = \frac{\log_a 4}{2}$$

Substituindo, vem:

$$\log_a 5 + \frac{\log_a 4}{2} = 1 \Rightarrow \log_a (5^2 \cdot 4) = 2$$

$\log_a 100 = 2 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$b = a^2 \Rightarrow b = 100$

Então, $a + b = 110$

28 (Unipar-PR) Dado o sistema:

$$\begin{cases} \log_5 x + \log_{\frac{1}{5}} y = 1 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$$

O valor de $(x + y)^2$ é igual a:

a) 64
b) 81
c) 100
d) 121
e) 144

Resolução:

$$\log_5 x + \frac{\log_5 y}{\log_5 \frac{1}{5}} = 1 \Rightarrow \log_5 x - \log_5 y = 1$$

$$\log_5 \frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{x}{y} = 5$$

$$x = 5y$$

Logo:

$x + 2y = 14 \Rightarrow 5y + 2y = 14 \Rightarrow y = 2$

$x = 5y \Rightarrow x = 5 \cdot 2 = 10$

Portanto:

$(x + y)^2 = (10 + 2)^2 = 144$

29 (UEFS-BA) Se $\dfrac{3}{\log_2 x} + \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_5 x} = 2$, então x^2 é igual a:

a) 80
b) 120
c) 260
d) 320
e) 360

Resolução:

Vamos mudar os logaritmos para a base 10. Logo:

$$\frac{3}{\frac{\log x}{\log 2}} + \frac{2}{\frac{\log x}{\log 3}} + \frac{1}{\frac{\log x}{\log 5}} = 2$$

$$\frac{3\log 2}{\log x} + \frac{2\log 3}{\log x} + \frac{\log 5}{\log x} = 2, \text{ mas } \log 5 = \log 10 - \log 2.$$

$$\frac{3\log 2}{\log x} + \frac{2\log 3}{\log x} + \frac{\log 10 - \log 2}{\log x} = 2$$

$$\frac{3\log 2 + 2\log 3 + \log 10 - \log 2}{\cancel{\log x}} = \frac{2\log x}{\cancel{\log x}}$$

$$2\log 2 + 2\log 3 + \log 10 = 2\log x$$
$$\log 2^2 + \log 3^2 + \log 10 = \log x^2$$
$$\log 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10 = \log x^2$$
$$\log 360 = \log x^2$$
$$x^2 = 360$$

30 (UFC) Sejam x e y os números reais positivos que satisfazem o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 3 + \log_3 2 \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 + \log_{\sqrt{3}} 2 \end{cases}$$

Assinale a alternativa na qual consta o valor numérico de $x + y$:

a) 12
b) 18
c) 24
d) 30
e) 36

Resolução:

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 \sqrt{3}} + \frac{\log_3 y}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3 + \log_3 2$$

$$\log_3 x + \log_3 y = 3 + \frac{\log_3 2}{\log_3 \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\log_3 x - \log_3 y = \log_3 27 + \log_3 2 & ① \\ \log_3 x + \log_3 y = \log_3 27 + 2\log_3 2 & ② \end{cases}$$

Fazendo ① + ②, vem:

$3\log_3 x = 2\log_3 27 + 3\log_3 2 \Rightarrow \log_3 x^3 = \log_3 27^2 \cdot 2^3 \Rightarrow x^3 = 3^6 \cdot 2^3 \Rightarrow x = 18$

Substituindo $x = 18$ em ①, temos:

$$2\log_3 18 - \log_3 y = \log_3 27 + \log_3 2 \Rightarrow \log_3 \frac{18^2}{y} = \log_3 27 \cdot 2$$

$$\frac{18^2}{y} = 54$$

$$y = 6$$

Portanto: $x + y = 24$

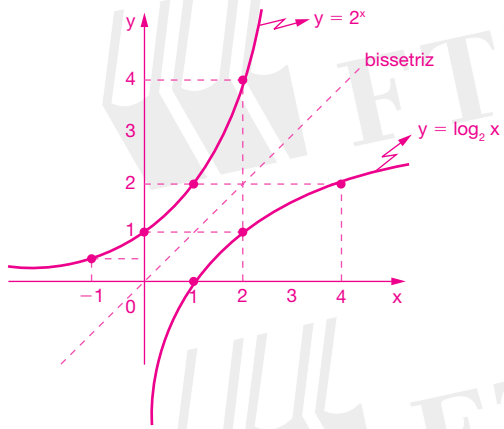
31 Construa, num mesmo sistema de eixos, os gráficos de:

a) $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \log_2 x$

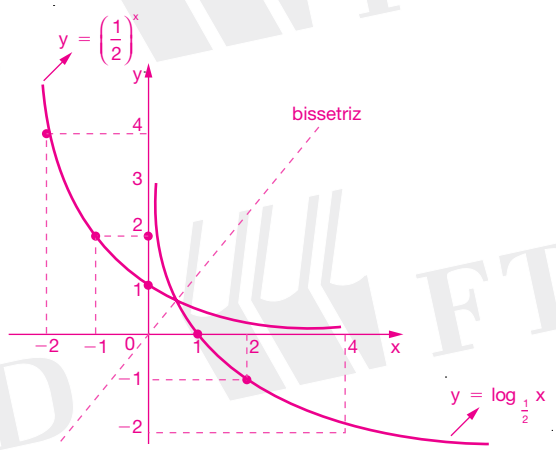
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Resolução:

a)



b)



32 (UFRJ) Resolvendo a inequação logarítmica $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) \geqslant 3$, qual a solução encontrada?

Resolução:

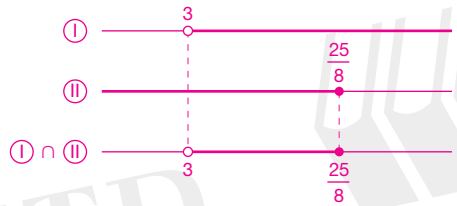
$\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) \geqslant 3$

C.E.: $\{x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ Ⓘ

$\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right)$

$x - 3 \leqslant \frac{1}{8}$

$x \leqslant \frac{25}{8}$ Ⓘⓘ



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant \frac{25}{8}\right\}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant \frac{25}{8}\right\}$

33 (FGV-SP)

a) Determine o domínio da função $f(x) = \log_2 x + \log_2 (x + 1)$. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

b) Resolva a inequação $\log_2 x + \log_2 (x + 1) > 1$. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

Resolução:

a) $f(x) = \log_2 x + \log_2 (x + 1)$

C.E.: $\left.\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x > 0$ (I)

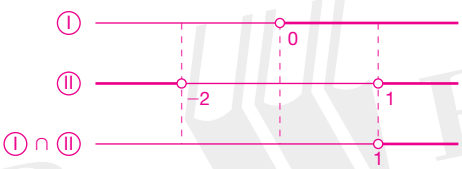
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

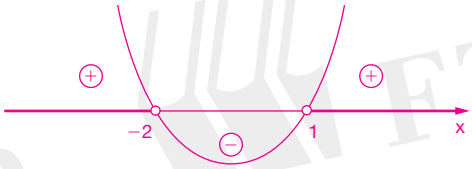
b) $\log_2 x + \log_2 (x + 1) > 1$

$\log_2 [x(x + 1)] > \log_2 2$

$x(x + 1) > 2$

$x^2 + x - 2 > 0$ (II)





$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

34 (Unicamp-SP) As populações de duas cidades, *A* e *B*, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \log_2(4t + 4)$, onde a variável *t* representa o tempo em anos.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

b) Após certo instante *t*, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante *t* e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

a) $t = 1$, A: 2 000 habitantes; B: 3 000 habitantes
$t = 7$, A: 6 000 habitantes; B: 5 000 habitantes

3 anos; cidade *A*

Resolução:

a) $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$; $B(t) = \log_2 (4t + 4)$

$t = 1$ $A(1) = \log_8 2^6 = \log_8 64 = 2 \Rightarrow$ *A* tem 2 000 habitantes

$B(1) = \log_2 8 = 3 \Rightarrow$ *B* tem 3 000 habitantes

$t = 7$ $A(7) = \log_8 8^6 = 6 \Rightarrow$ *A* tem 6 000 habitantes

$B(7) = \log_2 32 = 5 \Rightarrow$ *B* tem 5 000 habitantes

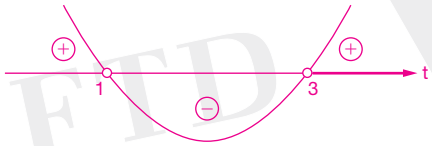
b) De acordo com os resultados obtidos no item *a*, temos, a partir de um instante *t*: $A(t) > B(t)$

$\log_8 (1 + t)^6 > \log_2 (4t + 4)$

$\dfrac{\log_2 (1 + t)^6}{\log_2 8} > \log_2 (4t + 4)$

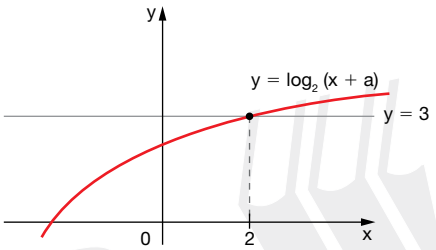
$\log_2 \left[(1 + t)^6\right]^{\frac{1}{3}} > \log_2 (4t + 4)$

$(1 + t)^2 > 4t + 4 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 > 0$



A partir de 3 anos, a população de *A* é maior que a de *B*.

35 (UERJ) No sistema cartesiano abaixo, estão representadas as funções $y = \log_2 (x + a)$ e $y = 3$, onde *a* é número real diferente de zero.



Assim, o valor de *a* é:

a) 5
b) 6
c) 8
d) 10

Resolução:

Ponto de intersecção das funções (2, 3)

$y = \log_2 (x + a) \Rightarrow 3 = \log_2 (2 + a) \Rightarrow 2 + a = 2^3 \Rightarrow a = 6$

36 (Unifor-CE) O mais amplo domínio da função real *f*, definida por $f(x) = \log_2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, é:

a) $]-\infty, 0[$
b) $]1, +\infty[$
c) $]0, 1[$
d) $]0, 1[\cup]1, +\infty[$
e) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

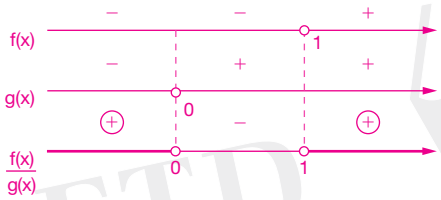
Resolução:

$1 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x - 1}{x} > 0$

$f(x) = x - 1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$g(x) = x \Rightarrow x = 0$



$S = \{x < 0 \text{ ou } x > 1\}$ ou $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

37 (UFMA) Em um *show* de *rock*, verificou-se que o nível sonoro foi maior que 110 dB (dB é a unidade do nível sonoro). Considerando que o nível sonoro (N) obedece a uma escala logarítmica e é definido por

$$N = 10 \log\left(\frac{i}{i_o}\right)$$

onde *i* é a intensidade sonora e i_o é a menor intensidade do som detectável pelo ouvido humano, podemos afirmar que:

a) $i_o < 10^{11} i$
b) $i < 10^{11} i_o$
c) $i = 10^{11} i_o$
d) $i_o > 10^{11} i$
e) $i > 10^{11} i_o$

Resolução:

$N > 110$

$10 \log\left(\frac{i}{i_o}\right) > 110 \Rightarrow \log\left(\frac{i}{i_o}\right) > 11$

$\frac{i}{i_o} > 10^{11} \Rightarrow i > 10^{11} i_o$

38 (FGV-SP) O mais amplo domínio real da função dada por $f(x) = \sqrt{\log_3 (2x - 1)}$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

Resolução:

$f(x) = \sqrt{\log_3 (2x - 1)}$

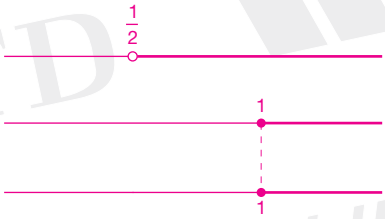
C.E.: $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ \log_3 (2x - 1) \geqslant 0 \end{cases}$

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$\log_3 (2x - 1) \geqslant 0$

$\log_3 (2x - 1) \geqslant \log_3 1$

$2x - 1 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 1$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

39 (Cefet-PR) Analisando o gráfico abaixo, podemos afirmar que os pontos *A* e *B* correspondem, respectivamente, a:

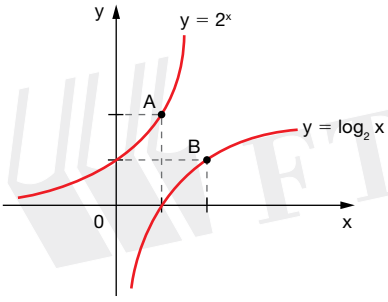
a) (3, 8) e (2, 1)

b) (2, 1) e (3, 8)

c) (2, 1) e (1, 2)

d) (1, 2) e (1, 1)

e) (1, 2) e (2, 1)



Resolução:

A ∈ gráfico de *f*

$y = 2^x$

x	y
1	2

B ∈ gráfico de *g*

$y = \log_2 x$

x	y
2	1

A(1, 2) e B(2, 1)

40 (PUCC-SP) As soluções reais da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5(x+3)} > 1$ são todos os números tais que:

a) $-3 < x < -2$
b) $x > -3$
c) $x > -2$
d) $x < -2$
e) $0 < x < 3$

Resolução:

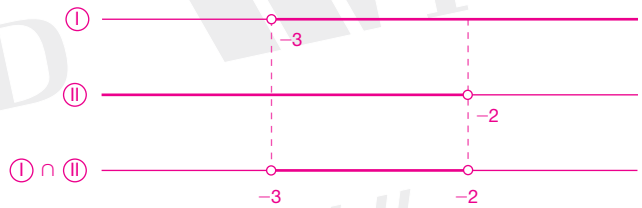
C.E.: $\{x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3\}$ Ⅰ

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5(x+3)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow \log_5(x + 3) < 0,$

pois a base $\left(\frac{1}{2}\right)$ está compreendida entre 0 e 1.

$\log_5(x + 3) < 0 \Leftrightarrow \log_5(x + 3) < \log_5 1$

Daí, $x + 3 < 1 \Rightarrow x < -2$ Ⅱ



$-3 < x < -2$

41 (ITA-SP) Dado um número real *a* com $a > 1$, seja *S* o conjunto solução da inequação

$\log_{\frac{1}{a}} \log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} \leqslant \log_{\frac{1}{a}}(x - 1).$

Então *S* é o intervalo:

a) $[4, +\infty[$
b) $[4, 7[$
c) $]1, 5]$
d) $]1, 4]$
e) $[1, 4[$

Resolução:

C.E.: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ \log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} > 0, \text{ com } a > 1 \end{cases}$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ Ⅰ

$\log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} > 0 \Rightarrow \log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} > \log_a 1$

$(a > 1)$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} > \left(\frac{1}{a}\right)^0$

Sendo $a > 1$, resulta que $\frac{1}{a} < 1$.

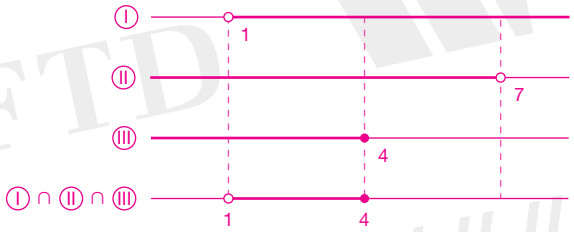
$\left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} > \left(\frac{1}{a}\right)^0 \Rightarrow x - 7 < 0 \Rightarrow x < 7$ Ⅱ

Resolvendo a inequação: $\log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} \geqslant x - 1$

$(x - 7)(\log_a 1 - \log_a a) \geqslant x - 1$

$(x - 7)(0 - 1) \geqslant x - 1 \Rightarrow -x + 7 \geqslant x - 1$

$-2x \geqslant -8 \Rightarrow x \leqslant 4$ Ⅲ



$1 < x \leqslant 4$

$S = \{1 < x \leqslant 4\}$, ou seja, $]1, 4]$

42 (UFG) Dados dois números reais positivos *a* e *b*, com $b \neq 1$, o número *y* tal que $b^y = a$ é denominado logaritmo de *a* na base *b*, e é representado por $\log_b a$.

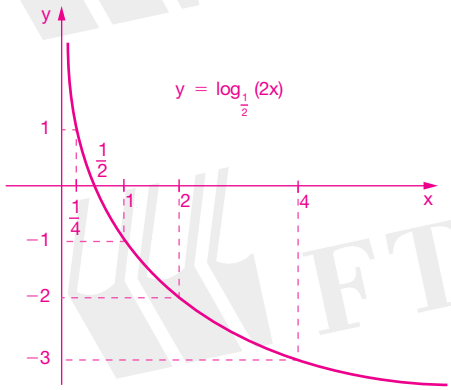
a) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (2x)$, $x > 0$.

b) Mostre que $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 2$.

Resolução:

a)

x	y
$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	0
1	−1
2	−2
4	−3



b) $\log_2 \frac{1}{2} = m \Rightarrow 2^m = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -1$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 = n \Rightarrow 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n = -1$

Portanto, $m = n$.

43 (UFBA) O custo de produção diária e a receita pela venda de determinado produto fabricado por uma empresa, em milhares de reais, são dados, respectivamente, pelas funções $c: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ e $R: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, com $c(x) = 2 + \log_2 (x + 1)$ e $R(x) = 2^x - 1$, sendo *x* o número de centenas de unidades produzidas.

Com base nessas informações, é correto afirmar:

(01) As funções *c* e *R* são crescentes.

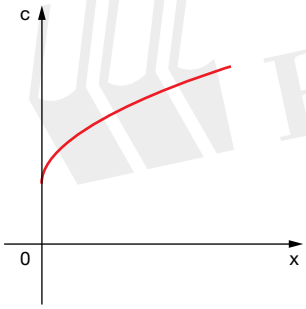
(02) *R* é a função inversa de *c*.

(04) Para uma receita igual a R$ 7 000,00, o custo é igual a R$ 4 000,00.

(08) Se a produção é de 100 unidades, então um aumento de 200% na produção acarretará um aumento de 100% no custo.

(16) A função lucro, definida por $L = R - c$, satisfaz a condição $L(0) = L(1)$, mas não é uma função constante.

(32) A figura abaixo representa um esboço do gráfico da função *c*.

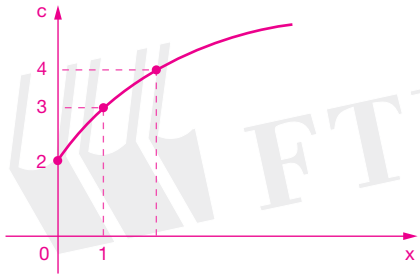


Resolução:

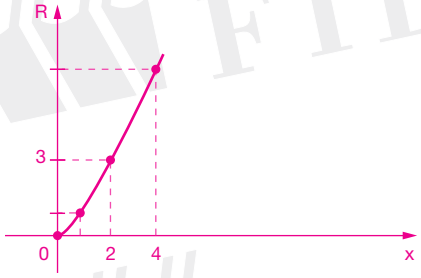
01. (Verdadeira)

Os gráficos de *c* e *R* são:

x	y
0	2
1	3
3	4



x	y
0	0
1	1
2	3
4	7



Portanto, c(x) e R(x) são crescentes.

02. (Falsa)

$c(x) = 2 + \log_2(x + 1)$

Cálculo da inversa: $x = 2 + \log_2(y + 1) \Rightarrow x - 2 = \log_2(y + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(y + 1) = x - 2 \Rightarrow y + 1 = 2^{x-2} \Rightarrow y = 2^{x-2} - 1$

$\therefore c^{-1}(x) = 2^{x-2} - 1$ (não é R(x)).

04. (Verdadeira)

Lembrando que R(x) é dada em milhares de reais.

$R(x) = 2^x - 1 = 7 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Substituindo em c(x):

$c(3) = 2 + \log_2(3 + 1) = 2 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4$, ou seja, o custo é de R$ 4 000,00.

08. (Falsa)

100 unidades: $c(1) = 2 + \log_2 2 = 3$

200% na produção equivale a 300 unidades:

$c(3) = 2 + \log_2 4 = 4$

$\therefore \dfrac{4}{3} = 1{,}33...$ (133%)

16. (Verdadeira)

Se L = R − c, dizemos que:

$L(x) = R(x) - c(x) \Rightarrow L(x) = (2^x - 1) - (2 + \log_2(x + 1)) =$

$= 2^x - 1 - 2 - \log_2(x + 1) = 2^x - 3 - \log_2(x + 1)$

L(x) é dependente de *x*.

32. (Verdadeira)

Ver gráfico do 1º item.

44 (UFJF-MG) Das afirmativas abaixo, a verdadeira é:

a) $\log_5 7 < \log_5 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 7$

c) $1 < \log_7 8$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} 2$

e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < 0$

Resolução:

A afirmativa verdadeira é a *d*, pois:

$\log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} 2 \Rightarrow 3 > 2$

45 (UFPE) Em 2002, um banco teve lucro de um bilhão de reais e, em 2003, teve lucro de um bilhão e duzentos milhões de reais. Admitindo o mesmo crescimento anual para os anos futuros, em quantos anos, contados a partir de 2002, o lucro do banco ultrapassará, pela primeira vez, um trilhão de reais? (Obs.: use as aproximações ln (1 000) ≃ 6,907, ln (1,2) ≃ 0,182.) 38 anos

Resolução:

A taxa de crescimento anual é igual a:

$$\frac{200 \text{ milhões}}{1 \text{ bilhão}} = \frac{200 \text{ milhões}}{1\,000 \text{ milhões}} = \frac{200}{1\,000} = 0{,}2 \text{ ou } 20\%$$

Passados *t* anos, o lucro do banco será de $1 \cdot (1 + 0{,}2)^t$ bilhões de reais.

O menor tempo *t* inteiro é igual a 1 trilhão = 1 000 bilhões.

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1 + 0{,}2)^t > 1\,000 &\Rightarrow 1{,}2^t > 1\,000 \\ &\ln (1{,}2)^t > \ln 1\,000 \\ &t \cdot \ln (1{,}2) > \ln 1\,000 \\ &t \cdot 0{,}182 > 6{,}907 \\ &t > 37{,}95 \end{aligned}$$

O menor *t* inteiro é igual a t = 38 anos.

46 (Uneb-BA) O número de soluções inteiras da inequação $\log_3 (2x - 9) \leqslant 1$ é:

1) 0

2) 1

3) 2

4) 3

5) 4

Resolução:

C.E.: $\left\{ 2x - 9 > 0 \Rightarrow x > \frac{9}{2} \quad ① \right.$

$$\begin{aligned} \log_3 (2x - 9) \leqslant 1 &\Rightarrow 2x - 9 \leqslant 3 \\ &2x \leqslant 12 \\ &x \leqslant 6 \quad ② \end{aligned}$$

Fazendo ① ∩ ②, obtemos $\frac{9}{2} < x \leqslant 6$.

As soluções inteiras desse intervalo são: 5 e 6, ou seja, duas soluções.

47 (Vunesp-SP) Considere as funções $f(x) = -5 + \log_2 (1 - x)$, definida para $x < 1$, e $g(x) = x^2 - 4x - 4$, definida para todo x real.

a) Resolva a inequação $f(x) \leqslant g(4)$ e a equação $g(x) = f\left(\frac{7}{8}\right)$. $-1 \leqslant x < 1$ e $x = 2$

b) Determine o domínio da função composta $f \circ g$, isto é, os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $f \circ g$ está definida. Determine também em qual valor de x a composta $f \circ g$ atinge seu valor máximo. $[-1, 5]$ e $x = 2$

Resolução:

a) $f(x) \leqslant g(4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5 + \log_2 (1 - x) \leqslant 4^2 - 4 \cdot 4 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 (1 - x) \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \leqslant 2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 1$

$g(x) = f\left(\frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = -5 + \log_2 \left(1 - \frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -5 + \log_2 (-x^2 + 4x + 5)$

$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow -5 + \log_2 (-x^2 + 4x + 5) \in R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$, ou seja, $D_{f \circ g} = [-1; 5]$

A função composta $f \circ g$ atinge seu valor máximo quando $\log_2 (-x^2 + 4x + 5)$ atinge seu valor máximo.

Como o polinômio $-x^2 + 4x + 5$ representa uma parábola com concavidade para baixo, o máximo de $f \circ g$ ocorre quando $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$.

48 (Uniderp-MS) Os valores de x, para os quais a inequação $\log (5x + 2) > \log 5x + \log 2$ é verificada, pertencem ao intervalo:

a) $\left]0, \frac{2}{3}\right[$

b) $\left[\frac{2}{3}, 1\right[$

c) $\left[1, \frac{3}{2}\right[$

d) $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$

e) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$

Resolução:

C.E.: $\begin{cases} 5x + 2 > 0 \\ 5x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$ ①

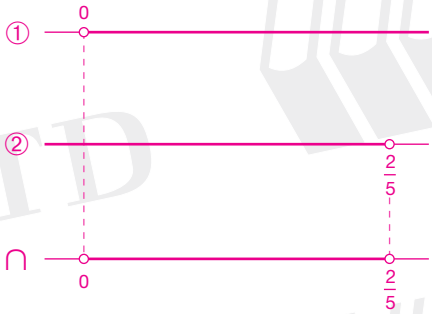
$\log (5x + 2) > \log 5x + \log 2 \Rightarrow \log (5x + 2) > \log 10x$

$5x + 2 > 10x$

$-5x > -2$

$x < \frac{2}{5}$ ②

Fazendo ① ∩ ②, obtemos:



$\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{5}\right\}$

49 (UAM-SP) Ao resolvermos uma equação ou inequação logarítmica, devemos tomar o cuidado de examinar a condição de existência do logaritmo; do contrário, poderemos dar uma resposta errada.
Não esquecendo desse detalhe, diga qual é a solução da seguinte inequação: $\log_4 (x + 2) - \log_4 (x - 1) < 1$.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$

Resolução:

Condição de existência: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 & ① \\ x > 1 & ② \end{cases}$

De ① e ②, vem: $x > 1$ ③

Aplicando as propriedades dos logaritmos:

$$\log_4 (x + 2) - \log_4 (x - 1) < 1 \Rightarrow \log_4 \frac{x + 2}{x - 2} < \log_4 4$$

Como a base é maior que 1, vem:

$$\frac{x + 2}{x - 1} < 4 \Rightarrow x + 2 < 4(x - 1) \Rightarrow x + 2 < 4x - 4 \Rightarrow$$

$$x - 4x < -4 - 2 \Rightarrow -3x < -6 \cdot (-1) \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2 \quad ④$$

De ③ e ④, temos: $x > 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

50 (MACK-SP)

I. $(0,\ 2)^{-0,3} < (0,\ 2)^{-\frac{2}{5}}$

II. $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{4}{7}} < 1$

III. $\log_8 1{,}5 < \log_8 \sqrt{2}$

Das desigualdades acima:

a) somente I é verdadeira.
b) somente II é verdadeira.
c) somente III é verdadeira.
d) somente II e III são verdadeiras.
e) somente I e II são verdadeiras.

Resolução:

I. (Verdadeira)

$$(0,2)^{-0,3} < (0,2)^{-\frac{2}{5}} \Rightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^{-0,3} < \left(\frac{2}{10}\right)^{-0,4} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,3} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,4} \Rightarrow (5^{-1})^{-0,3} < (5^{-1})^{-0,4} \Rightarrow 5^{0,3} < 5^{0,4}$$

Base maior que 1 e $0{,}3 < 0{,}4$.

II. (Falsa)

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{4}{7}} < 1 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{4}{7}} < \left(\sqrt{2}\right)^{0}$$

Base maior que 1, porém $\frac{4}{7} > 0$.

III. (Falsa)

$\log_8 1{,}5 < \log_8 \sqrt{2} \Rightarrow 1{,}5 < \sqrt{2}$

Como $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$, então: $1{,}5 > 1{,}41$.

51 (Fuvest-SP) Seja $f(x) = \log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1)$. Os valores de *x* para os quais *f* está definida e satisfaz $f(x) > 1$ são:

a) $x < \frac{7}{3}$

b) $\frac{1}{2} < x$

c) $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$

d) $-\frac{4}{3} < x$

e) $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$

Resolução:

$f(x) = \log_3 (3x + 4) - \log_3(2x - 1)$, $f(x) > 1$

Condição de existência: $\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{3} & ① \\ x > \frac{1}{2} & ② \end{cases}$

De ① e ②, vem: $x > \frac{1}{2}$ ③

Se $f(x) > 1$, temos: $\log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1) > 1$.

Aplicando as propriedades:

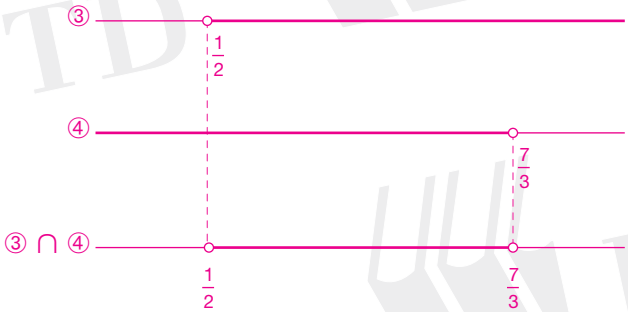
$\log_3 \frac{3x + 4}{2x - 1} > 1$, ou ainda, $\log_3 \frac{3x + 4}{2x - 1} > \log_3 3$

Como a base é maior que 1, temos:

$\frac{3x + 4}{2x - 1} > 3 \rightarrow 3x + 4 > 3(2x - 1) \rightarrow 3x + 4 > 6x - 3 \rightarrow$

$\rightarrow 3x - 6x > -3 - 4 \rightarrow -3x > -7 \cdot (-1) \rightarrow 3x < 7 \rightarrow x < \frac{7}{3}$ ④

De ③ e ④, conclui-se:



$\left\{\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}\right\}$