

Matemática

M11 – Trigonometria no ciclo

p. 60

1 Um atleta desloca-se à velocidade constante de 7,85 m/s numa pista circular de raio 200 m. Determine as medidas, em radianos e em graus, do arco que ele percorre no tempo de:

a) 10 segundos $\frac{\pi}{8}$ rad e $22,5^\circ$

b) 1 minuto $\frac{3\pi}{4}$ rad e 135°

Resolução:

$$V = 7,85 \text{ m/s}$$

$$r = 200 \text{ m}$$

$$\text{a)} t = 10 \text{ s}$$

$$V = \frac{s}{t} \Rightarrow s = V \cdot t \Rightarrow s = 7,85 \cdot 10 \Rightarrow s = 78,5 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{s}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{78,5}{200} \Rightarrow \alpha = 0,3925$$

$$\pi \text{ — } 180^\circ \text{ e } \pi \text{ — } 180^\circ$$

$$0,3925 \text{ — } x \text{ e } x \text{ — } 22,5^\circ$$

$$x = 22,5^\circ$$

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

$$\text{b)} 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$s = 7,85 \cdot 60 = 471 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{471}{200} = 2,355$$

$$\pi \text{ — } 180^\circ \text{ e } \pi \text{ — } 180^\circ$$

$$2,355 \text{ — } x \text{ e } x \text{ — } 135^\circ$$

$$x = 135^\circ$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

2 (UEL-PR) A medida do menor ângulo determinado pelos ponteiros de um relógio que marca 10h 20min é:

a) 170°

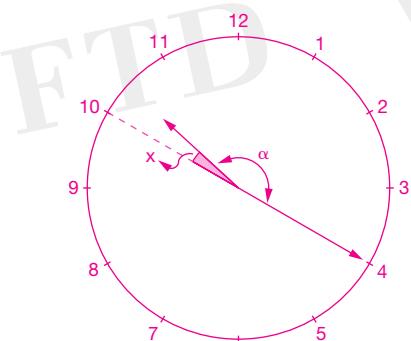
c) 160°

e) 150°

b) 165°

d) 155°

Resolução:



$\alpha \Rightarrow$ medida do ângulo pedido

$x \Rightarrow$ medida do ângulo descrito pelo ponteiro das horas, a partir das 10h, em 20 minutos

$$60 \text{ min} \text{ — } 30^\circ$$

$$20 \text{ min} \text{ — } x$$

$$x = \frac{30 \cdot 20}{60} \therefore x = 10^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - x \Rightarrow \alpha = 170^\circ$$

O menor ângulo mede 170° .

3 (Cesesp-PE) Tomando para π a aproximação 3,14, se um arco de circunferência mede 1,57 cm e o seu diâmetro, 8 cm, então o ângulo correspondente a este arco mede:

- a) $22^\circ 5'$ c) $11^\circ 25'$ e) $39^\circ 25'$
 b) $22^\circ 30'$ d) $11^\circ 15'$

Resolução:

$$\alpha = \frac{1,57}{4} \approx 0,3925 \text{ rad}$$

$$3,14 \text{ rad} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 180^\circ$$

$$0,3925 \text{ rad} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x$$

$$x = 22^\circ 30'$$

4 (UFAM) A medida do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 10h 30 min, em graus, é:

- a) 150 c) 105 e) 115
 b) 120 d) 135

Resolução:

O ângulo formado pelos ponteiros das horas e minutos, respectivamente no 10 e no 6, corresponde a 120° ; porém, enquanto o ponteiro de minutos desloca-se até o 6, o ponteiro das horas desloca-se até a metade do arco formado entre o 10 e o 11, ou seja, desloca-se 15° .

Portanto, às 10h 30min os ponteiros formam um ângulo de 135° ($120^\circ + 15^\circ$).

5 O polígono regular da figura está inscrito na circunferência trigonométrica. Determine, em graus e em radianos, as primeiras determinações positivas dos arcos cujas extremidades são vértices do polígono:

Resolução:

$$M = 60^\circ, \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$60^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x$$

$$180^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$N = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$150^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x$$

$$180^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$P = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$$

$$240^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x$$

$$180^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \pi \text{ rad}$$

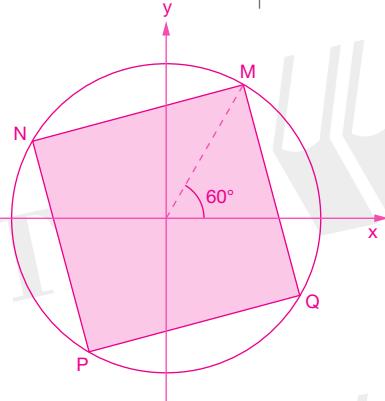
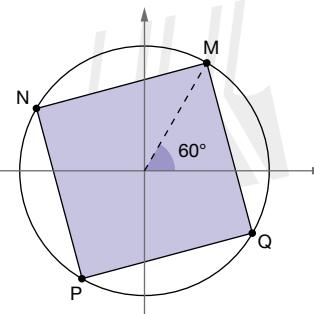
$$x = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$Q = 240^\circ + 90^\circ = 330^\circ$$

$$330^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x$$

$$180^\circ \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$



6 Represente, no ciclo trigonométrico, as extremidades dos arcos cujas medidas são dadas pela expressão:

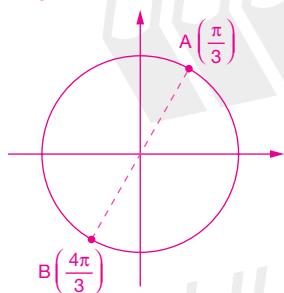
- a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = 90^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$

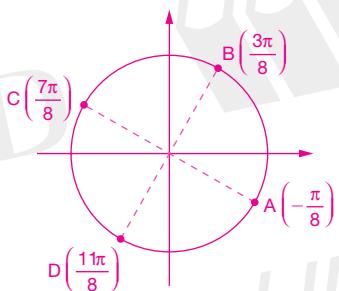
d) $x = -120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Resolução:

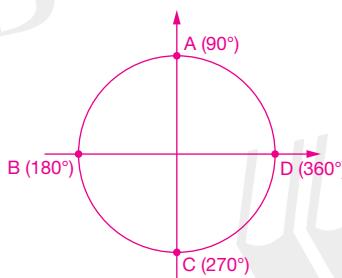
a)



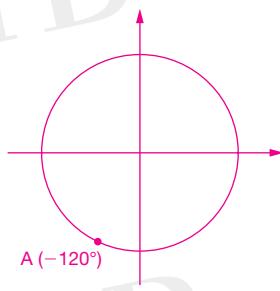
b)



c)



d)



p. 69

7 (Furb-SC) Analise o ciclo trigonométrico ao lado e determine o perímetro do retângulo MNPQ, em unidades de comprimento.

A alternativa correta é:

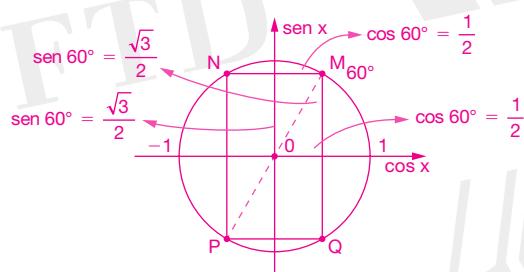
- a) $1 + 2\sqrt{3}$
 b) $2(1 + \sqrt{3})$
 c) $1 + \sqrt{3}$

d) $2 + \sqrt{3}$

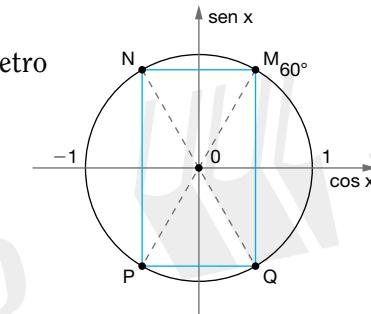
e) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

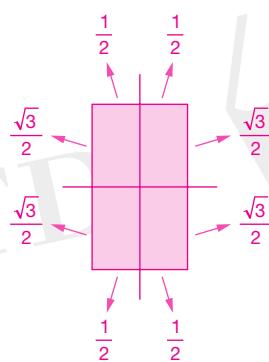
Analizando o ciclo trigonométrico, temos:



Seus lados medem $1 \times \sqrt{3}$; logo, seu perímetro será:
 $P = 1 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})$.



Portanto, o quadrilátero tem as seguintes medidas:



8 (Fuvest-SP) Qual dos números é o maior? Justifique.

- a) $\sin 830^\circ$ ou $\sin 1195^\circ$ b) $\cos(-535^\circ)$ ou $\cos 190^\circ$

Resolução:

a) $830^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 110^\circ$ e $1195^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 115^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 830^\circ &= \sin 110^\circ \\ \sin 1195^\circ &= \sin 115^\circ \end{aligned} \quad \Rightarrow \sin 110^\circ > \sin 115^\circ, \text{ porque ambos pertencem ao } 2^\circ \text{ quadrante, em}$$

que à medida que o ângulo aumenta, o seno diminui, ou seja, a função seno é decrescente.

b) $-535^\circ = (-1) \cdot 360^\circ - 175 \approx 185^\circ$

$$\begin{aligned} \cos(-535^\circ) &= \cos 185^\circ \\ \cos 190^\circ & \end{aligned} \quad \Rightarrow \cos 190^\circ > \cos 185^\circ, \text{ porque os ângulos pertencem ao } 3^\circ \text{ quadrante, em que a função cosseno é crescente.}$$

9 (UFAL) O valor de $\sin 5$ está compreendido entre:

a) $\frac{1}{2}$ e 1

b) 0 e $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 0

d) -1 e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) -2 e -1

Resolução:

Seja α a medida, em graus, correspondente a 5 rad, então:

$$180^\circ \quad \pi \text{ rad} \approx 3,14 \text{ rad}$$

$$\alpha \quad 5 \text{ rad}$$

$$\alpha \approx \frac{5 \cdot 180^\circ}{3,14} \therefore \alpha \approx 286^\circ$$

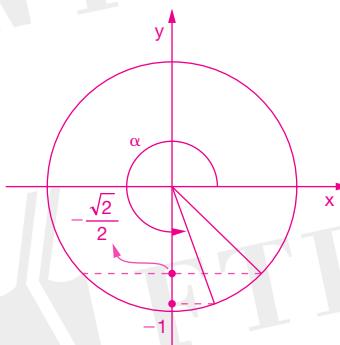
Veja na figura:

$$270^\circ < 286^\circ < 315^\circ$$

$$\sin 270^\circ < \sin 286^\circ < \sin 315^\circ$$

$$-1 < \sin 286^\circ < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1 < \sin 5 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



10 Simplifique as expressões:

a) $\sin(9\pi - x) + \sin(5\pi - x)$ 2 $\sin x$

b) $\sin(x - 900^\circ) + \cos(x - 540^\circ)$

$$-\sin x - \cos x$$

Resolução:

a) $\sin(9\pi - x) + \sin(5\pi - x)$

$$9\pi = 4 \cdot 2\pi + \pi \Rightarrow \sin(9\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$5\pi = 2 \cdot 2\pi + \pi \Rightarrow \sin(5\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\therefore \sin(9\pi - x) + \sin(5\pi - x) = \sin x + \sin x = 2 \sin x$$

b) $\sin(x - 900^\circ) + \cos(x - 540^\circ)$

$$900^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ$$

$$540^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 180^\circ$$

$$\sin(x - 900^\circ) + \cos(x - 540^\circ) = \sin(x - 180^\circ) + \cos(x - 180^\circ) = -\sin x - \cos x$$

- 11** (UFPB) Qual o maior valor da constante real k , para que a equação $3 \operatorname{sen} x + 13 = 4k$ possua solução?

- a) $\frac{5}{2}$
 b) 3
 c) $\frac{7}{2}$
 d) $\frac{11}{2}$

(e) 4

Resolução:

$$3 \operatorname{sen} x + 13 = 4k \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4k - 13}{3}$$

Lembrando que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{4k - 13}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 4k - 13 \leq 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3 + 13 \leq 4k \leq 3 + 13 \Rightarrow 10 \leq 4k \leq 16 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{10}{4} \leq k \leq \frac{16}{4} \Rightarrow 2,5 \leq k \leq 4 \\ \therefore \text{O maior valor da constante } k \text{ é 4.} \end{aligned}$$

- 12** Determine o valor de k para que exista o arco que satisfaça a igualdade $\operatorname{sen} x = \frac{5k - 2}{k - 3}$.

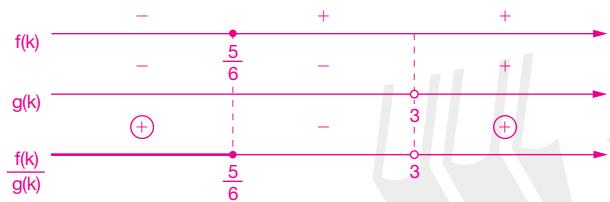
Resolução:

Devemos ter: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

Substituindo $\operatorname{sen} x$ por $\frac{5k - 2}{k - 3}$, vem: $-1 \leq \frac{5k - 2}{k - 3} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{5k - 2}{k - 3} \geq -1 & (\text{I}) \\ \frac{5k - 2}{k - 3} \leq 1 & (\text{II}) \end{cases}$

De (I), vem: $\frac{5k - 2}{k - 3} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{5k - 2 + k - 3}{k - 3} \geq 0 \Rightarrow \frac{6k - 5}{k - 3} \geq 0$

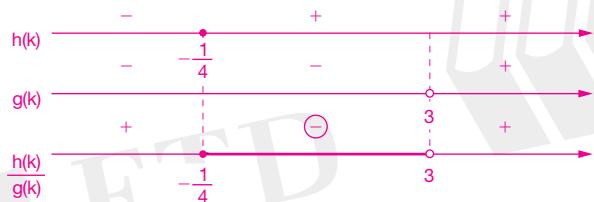
Considerando $f(k) = 6k - 5$ e $g(k) = k - 3$, temos:



(I) $\left\{ k \in \mathbb{R} \mid k \leq \frac{5}{6} \text{ ou } k > 3 \right\}$

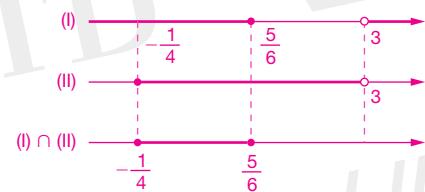
De (II), vem: $\frac{5k - 2}{k - 3} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{5k - 2 - k + 3}{k - 3} \leq 0 \Rightarrow \frac{4k + 1}{k - 3} \leq 0$

Considerando $h(k) = 4k + 1$ e $g(k) = k - 3$, temos:



(II) $\left\{ k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leq k < 3 \right\}$

A solução comum a ambas será:



$\therefore S = \left\{ k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{6} \right\}$

13 (UFPel-RS) Ao estudar certo fenômeno, um pesquisador determinou, experimentalmente, que o mesmo pode ser descrito pela função real de variável real definida por: $f(x) = 2 + \sin x$.

- Determine o domínio e a imagem dessa função.
- Mostre seu gráfico num sistema cartesiano ortogonal.

Resolução:

$$f(x) = 2 + \sin x$$

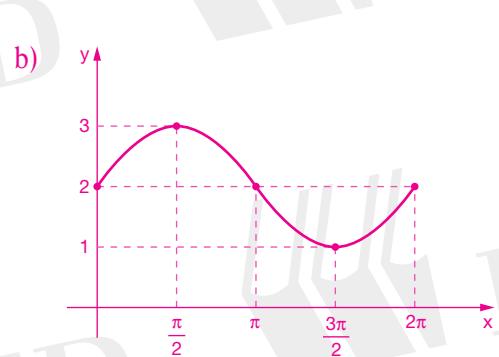
$$a) -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 + 2 \leq \sin x + 2 \leq 1 + 2$$

$$1 \leq \sin x + 2 \leq 3$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$



14 (UFRJ) Determine os valores reais de k , de modo que a equação $2 - 3 \cos x = k - 4$ admita solução.

Resolução:

$$S = \{k \in \mathbb{R} \mid 3 \leq k \leq 9\}$$

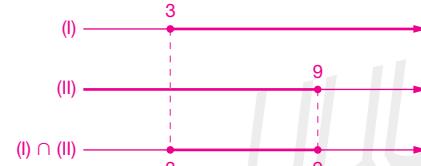
$$2 - 3 \cos x = k - 4 \Rightarrow -3 \cos x = k - 6 \Rightarrow \cos x = \frac{6 - k}{3}$$

Devemos ter: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

$$\text{Substituindo: } -1 \leq \frac{6 - k}{3} \leq 1$$

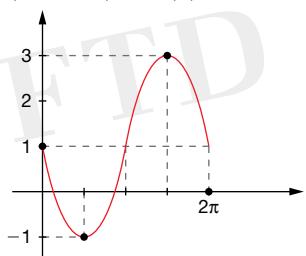
$$(I) \frac{6 - k}{3} \leq 1 \\ 6 - k \leq 3 \\ k \geq 3$$

$$(II) -1 \leq \frac{6 - k}{3} \\ 6 - k \geq -3 \\ k \leq 9$$



$$S = \{k \in \mathbb{R} \mid 3 \leq k \leq 9\}$$

15 (UFRGS) Se $f(x) = a + b \cdot \sin x$ tem como gráfico:



Então:

- $a = -2$ e $b = 1$
- $a = -1$ e $b = 2$
- $a = 1$ e $b = -1$

- $a = 1$ e $b = -2$
- $a = 2$ e $b = -1$

Resolução:

$$f(x) = a + b \sin x$$

Observando o gráfico, notamos que:

$$f(0) = 1 \quad \therefore a + b \cdot \sin 0 = 1, \text{ o que nos dá } a = 1.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \therefore a + b \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -1, \text{ o que nos dá } b = -2.$$

16 (Unesp-SP) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura h em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{12}(t - 26) \right]$, em que o tempo t é dado em segundos e a medida angular em radianos.

- Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ($t = 0$). **6,5 m**
- Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período). $h_{\min} = 1,5 \text{ m}$; $h_{\max} = 21,5 \text{ m}$; $p = 24 \text{ s}$

Resolução:

- Sendo $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned} h(0) &= 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{12}(0 - 26) \right] = 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{-26\pi}{12} \right] = \\ &= 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{-2\pi}{12} \right] = 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{-\pi}{6} \right] = 11,5 + 10 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) = 6,5 \text{ m} \end{aligned}$$

- As alturas máxima e mínima ocorrerão quando o seno for igual, respectivamente, a 1 e a -1.

Assim:

$$\text{Altura máxima: } 11,5 + 10 \cdot 1 = 21,5 \text{ m}$$

$$\text{Altura mínima: } 11,5 + 10 \cdot (-1) = 1,5 \text{ m}$$

O tempo gasto em uma volta (período) é dado por: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24 \text{ s}$.

p. 74

17 Determine m para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação $\operatorname{tg}^2 x - m \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$. **15**

Resolução:

$$\operatorname{tg}^2 x - m \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - m \cos^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3} = 0$$

$$(\sqrt{3})^2 - m \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0$$

$$3 - m \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

$$12 - m + 3 = 0 \Rightarrow m = 15$$

18 Simplifique:

a) $\operatorname{tg}(3\pi - x) + \operatorname{tg}(-5\pi - x)$ **-2 tg x**

b) $\operatorname{tg}(x + 540^\circ) - \operatorname{tg}(7\pi + x)$ **0**

Resolução:

a) $\operatorname{tg}(3\pi - x) + \operatorname{tg}(-5\pi - x)$

$$3\pi = 2\pi + \pi \Rightarrow \operatorname{tg}(3\pi - x) = \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$

$$-5\pi = (-2) \cdot 2\pi - \pi = (-3) \cdot 2\pi + \pi \Rightarrow \operatorname{tg}(-5\pi - x) = \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\therefore \operatorname{tg}(3\pi - x) + \operatorname{tg}(-5\pi - x) = -\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = -2 \operatorname{tg} x$$

b) $\operatorname{tg}(x + 540^\circ) - \operatorname{tg}(7\pi + x)$

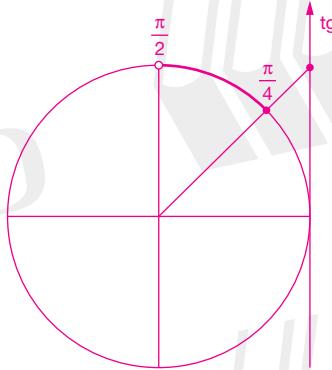
$$540^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 180^\circ \quad \left. \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(x + 540^\circ) - \operatorname{tg}(7\pi + x) = \operatorname{tg}(x + 180^\circ) - \operatorname{tg}(\pi + x) =$$

$$7\pi = 3 \cdot 2\pi + \pi \quad \left. \right\} = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 0$$

19 Ache o valor de m , $m \in \mathbb{R}$, que torne possível a condição $\operatorname{tg} x = 10 - m^2$, com $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Resolução:

$$\operatorname{tg} x = 10 - m^2; x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$$



$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \operatorname{tg} x \geq 1$$

Portanto:

$$10 - m^2 \geq 1 \Rightarrow -3 \leq m \leq 3$$
$$\therefore \{m \in \mathbb{R} \mid -3 \leq m \leq 3\}$$

20 Qual o domínio e o período da função f definida por $f(x) = 4 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$?

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}; p = 2\pi$$

Resolução:

Sendo $f(x) = 4 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$, a condição de existência é dada por:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{3x - 2\pi}{6} \neq \frac{3\pi + 6k\pi}{6} \Rightarrow 3x \neq 5\pi + 6k\pi \Rightarrow x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\therefore D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(\text{Período}) \quad p = \frac{\pi}{\left| \frac{1}{2} \right|} = 2\pi$$

21 Qual o período da função f definida por $f(x) = 4 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$? $p = 3\pi$

Resolução:

$$f(x) = 4 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}(x): p = \frac{\pi}{|k|}$$

$$f(x): p = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$$

22 Determine o domínio das funções:

a) $y = \operatorname{tg}(5x - 45^\circ)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 27^\circ + 36^\circ k\}$

Resolução:

a) $y = \operatorname{tg}(5x - 45^\circ)$

A condição de existência é:

$$5x - 45^\circ \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$5x \neq 45^\circ + 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$x \neq 27^\circ + 36^\circ \cdot k$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 27^\circ + 36^\circ \cdot k\}$$

b) $y = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\}$

b) $y = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

$$3x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$3x \neq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

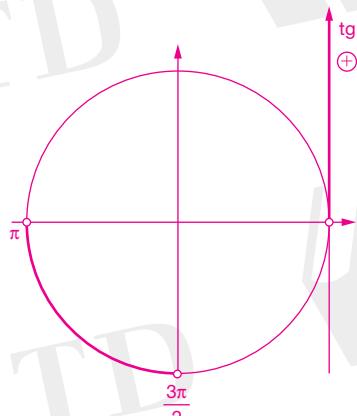
$$x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{k \cdot \pi}{3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\}$$

23 Ache a , de modo que $\operatorname{tg} \alpha = a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}$ e $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. $\left\{a \in \mathbb{R} \mid a < -\frac{1}{2} \text{ ou } a > 3\right\}$

Resolução:

Esquema:



$$\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$$

$$\text{Logo, } a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow 2a^2 - 5a - 3 > 0$$

Raízes: $2a^2 - 5a - 3 = 0$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$a = 3$$



$$\left\{a \in \mathbb{R} \mid a < -\frac{1}{2} \text{ ou } a > 3\right\}$$

p. 80

24 (UFAM) Qual das expressões a seguir é idêntica a $\sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x$?

a) $\operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x$

c) $1 - \operatorname{tg}^2 x$

e) $\sec x + \operatorname{cossec} x$

b) $\frac{\operatorname{sen} x}{\sec x}$

d) $1 - \operatorname{sen}^2 x$

Resolução:

$$\begin{aligned} \sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} - (1 - \cos^2 x) = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \cos^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} + \cos^2 x = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x \end{aligned}$$

25 Ache o domínio das funções:

- a) $f(x) = \sec\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}$
- b) $y = \operatorname{cossec}(2x + 180^\circ) \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -90^\circ + 90^\circ k, k \in \mathbb{Z}\}$

Resolução:

a) $f(x) = \sec\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$

Devemos ter:

$$5x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow 5x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow 5x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}$$

b) $y = \operatorname{cossec}(2x + 180^\circ)$

Devemos ter:

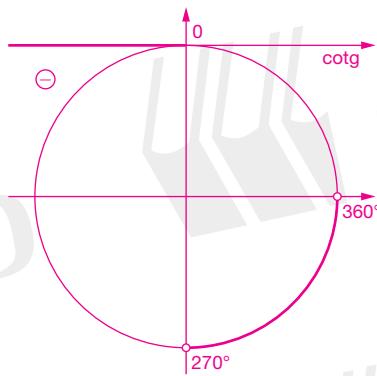
$$2x + 180^\circ \neq 180^\circ k \Rightarrow 2x \neq -180^\circ + 180^\circ k \Rightarrow x \neq -90^\circ + 90^\circ k$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -90^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

26 Ache k , de modo que $\cotg \alpha = k^2 - 7k + 10$ e $\alpha \in]270^\circ, 360^\circ[$. $\{k \in \mathbb{R} \mid 2 < k < 5\}$

Resolução:

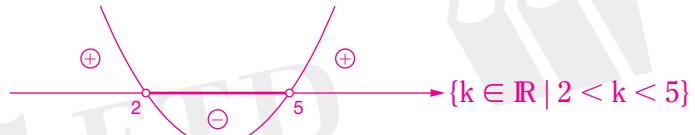
Esquema:



$$\alpha \in]270^\circ, 360^\circ[\Rightarrow \cotg \alpha < 0$$

Logo, $k^2 - 7k + 10 < 0$

Raízes: $k^2 - 7k + 10 = 0$



27 (Cefet-PR) Se a expressão $f(x) = \sqrt{3} \cdot \operatorname{cossec}(2x) + \cos(8x)$, então $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é igual a:

- a) $\frac{3}{2}$ c) 1 e) -1
 b) 0 d) $\frac{5}{2}$

Resolução:

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot \operatorname{cossec}(2x) + \cos(8x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cdot \operatorname{cossec}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cdot \operatorname{cossec}\frac{\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

- 28** (Fuvest-SP) Se $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de $y = \cos x - \operatorname{sen} x$. $-\frac{1}{5}$

Resolução:

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$y = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{4} \cos x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{9}{16} \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore y = \cos x - \operatorname{sen} x \Rightarrow y = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$$

- 29** (UCSal-BA) Sendo $\sec x = 2$ e x um arco do 1º quadrante, então o valor do $\operatorname{sen} x$ é:

a) $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) 1

b) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

Resolução:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \therefore \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Como } x \text{ é do 1º quadrante, } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- 30** (Uniube-MG) O valor da expressão $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ quando $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$ e $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ é:

a) $-\frac{24}{7}$

c) $-\frac{12}{5}$

e) $-\frac{7}{5}$

(b) $\frac{24}{7}$

d) $\frac{12}{5}$

Resolução:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5} \text{ e } \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \therefore \cos x = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{Como } \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \cos x = -\frac{4}{5}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

31 (UFSM-RS) Sabendo-se que $\cotg x = \frac{1}{2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, pode-se afirmar que o valor de $\sin x$ é:

a) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{2}{5}$

(d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Resolução:

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos x = \sin x$$

$$4 \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow 4(1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$5 \sin^2 x = 4 \Rightarrow \sin x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Como } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

32 (UFSC) Qual o valor numérico da expressão $y = \frac{\cos 4x + 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \sin 2x}{\cotg x \cdot \operatorname{cossec} x + \sec 8x}$, para $x = \frac{\pi}{2}$? 3

Resolução:

$$y = \frac{\cos 4x + 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \sin 2x}{\cotg x \cdot \operatorname{cossec} x + \sec 8x} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{\cos 4 \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \sin 2 \frac{\pi}{2}}{\cotg \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{cossec} \frac{\pi}{2} + \sec 8 \frac{\pi}{2}} = \frac{\cos 2\pi + 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \pi}{\cotg \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{cossec} \frac{\pi}{2} + \sec 4\pi} = \frac{1 + 2 \cdot 1 - 0}{0 \cdot 1 + 1} = 3$$

33 (PUC-SP) Sabendo que $\operatorname{cossec} x = \frac{5}{4}$ e x é do primeiro quadrante, calcule o valor da expressão $25 \sin^2 x - 9 \operatorname{tg}^2 x$. 0

Resolução:

$$\begin{cases} \operatorname{cossec} x = \frac{5}{4} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{16}{9}$$

$$25 \sin^2 x - 9 \operatorname{tg}^2 x = 25 \cdot \frac{16}{25} - 9 \cdot \frac{16}{9} = 0$$

- 34** (ITA-SP) Sabendo que $\cos \theta = -\frac{3}{7}$ e $\operatorname{tg} \theta < 0$, calcule o valor da expressão $x = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} \cdot \frac{12\sqrt{10}}{31}$

Resolução:

$$\cos \theta = -\frac{3}{7}; \operatorname{tg} \theta < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta > 0 \text{ e } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{40}}{7} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = -\frac{2\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{40}{9}$$

$$x = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2 \left(-\frac{2\sqrt{10}}{3} \right)}{1 - \frac{40}{9}} = \frac{12\sqrt{10}}{31}$$

- 35** (MACK-SP) Se x e y são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, tais que $\cos^2 x = 3 \cos^2 y$, então a diferença $y - x$ é igual a:

- a) 15° c) 45° e) 75°
 b) 30° d) 60°

Resolução:

Sendo x e y medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, temos: $\operatorname{sen} x = \cos y$.

Logo:

$$\cos^2 x = 3 \cdot \cos^2 y \Rightarrow \cos^2 x = 3 \cdot \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = 3 \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 3 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 30^\circ$$

Sendo $y = 90^\circ - x$, sabemos que $y = 60^\circ$; portanto, a diferença $y - x = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

- 36** (UEL-PR) Para qualquer número real x , $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

- a) $-\operatorname{sen} x$ c) $(\operatorname{sen} x)(\cos x)$ e) $-\cos x$
 b) $2 \operatorname{sen} x$ d) $2 \cos x$

Resolução:

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos x = \operatorname{sen} x \cdot 0 - 1 \cdot \cos x = -\cos x$$

p. 86

- 37** (UFAM) O cosseno do arco de medida 255° é igual a:

- a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
 b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Resolução:

$$\cos 255^\circ = \cos (180^\circ + 75^\circ) = \cos 180^\circ \cdot \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 180^\circ \cdot \operatorname{sen} 75^\circ =$$

$$= (-1) \cdot \cos 75^\circ - 0 \cdot \operatorname{sen} 75^\circ = -\cos 75^\circ = -\cos (45^\circ + 30^\circ) =$$

$$= -(\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ) =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

38 (UFAL) Se $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, qual é o valor de $\sin(\alpha + \beta)$? -1

Resolução:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta = \frac{4}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ e } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\text{Temos: } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ e } \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = \frac{9}{25} \therefore \cos \beta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$$

39 (UFRN) A expressão $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$ é equivalente a:

- a) $\cos b - \cos a$
b) $\sin b - \sin a$

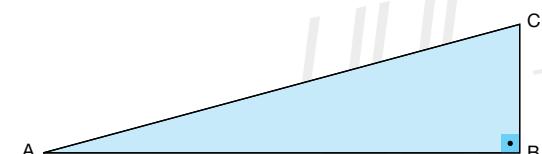
- c) $\cos^2 b - \cos^2 a$
d) $\sin^2 b - \sin^2 a$

- e) $\sin(a^2 - b^2)$

Resolução:

$$\begin{aligned} \sin(a+b) \cdot \sin(a-b) &= (\sin a \cos b + \sin b \cos a) - (\sin a \cos b - \sin b \cos a) = \\ &= \sin^2 a \cos^2 b - \sin a \sin b \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos a \cos b - \sin^2 b \cos^2 a = \\ &= \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = (1 - \cos^2 a) \cos^2 b - (1 - \cos^2 b) \cos^2 a = \\ &= \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 a \cdot \cos^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a \end{aligned}$$

40 (UFOP-MG) Num triângulo ABC, retângulo em B, os catetos \overline{AB} e \overline{BC} medem $(2 + \sqrt{3})$ e 1, respectivamente. Seja D um ponto de \overline{AB} tal que $DB = BC$. Se α e β são, respectivamente, as medidas de \hat{BAC} e \hat{BDC} , calcule $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. $\sqrt{3}$



Resolução:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{(2 + \sqrt{3})} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{(2 - \sqrt{3}) + 1}{1 - (2 - \sqrt{3}) \cdot 1} = \frac{(3 - \sqrt{3})}{(-1 + \sqrt{3})} \cdot \frac{(-1 - \sqrt{3})}{(-1 - \sqrt{3})} = \frac{-3 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3}{-2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

- 41** (Unesp-SP) Na figura, ABCD é um retângulo, $BD = 6$ cm, a medida do ângulo $\hat{A}BD$ é $\alpha = 30^\circ$, a medida do ângulo \hat{AED} é β e $x = BE$.

Determine:

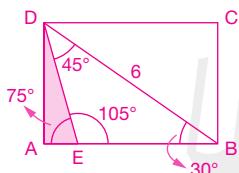
- a área do triângulo BDE, em função de x ; $\frac{3x}{2} \text{ cm}^2$
- o valor de x , quando $\beta = 75^\circ$. $6(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$

Resolução:

- Considerando a medida x em centímetros, a área do triângulo BDE é dada por:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BE \cdot \sin(\hat{DBE}) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{3x}{2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Nas condições propostas, temos a figura seguinte:



Aplicando a Lei dos Senos no triângulo BDE, temos:

$$\frac{6}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{Lembrando: } \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daí: } \frac{6}{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)} &= \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 12\sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 6(\sqrt{3} - 1) \text{ cm} \end{aligned}$$

- 42** (UFPE) Sabendo que $x - y = \frac{\pi}{3}$ rad, calcule o valor da expressão $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2$.

Resolução:

$$x - y = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} (\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 &= \\ &= \sin^2 x + 2 \sin x \sin y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2 \cos x \cos y + \cos^2 y = \\ &= 2 + 2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = 2 + 2 \cos(x - y) = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

- 43** (UFG) Se $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$, então $\cos 2\theta$ vale:

- | | | |
|--------------------|-----------------------------|------------------|
| a) $\frac{11}{12}$ | c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | e) $\frac{5}{6}$ |
| b) $\frac{1}{2}$ | d) $\frac{6 - \sqrt{3}}{6}$ | |

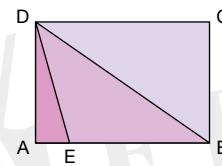
Resolução:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$\cos 2\theta = \frac{5}{6}$$



44 (Fuvest-SP) Se $\operatorname{tg} \theta = 2$, então o valor de $\frac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta}$ é:

- a) -3 c) $\frac{1}{3}$
 b) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{3}{4}$

Resolução:

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta} &= \frac{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{1 + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{\sec^2 \theta + 2 \operatorname{tg} \theta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta + 2 \operatorname{tg} \theta} = \frac{(1 + \operatorname{tg} \theta)(1 - \operatorname{tg} \theta)}{(1 + \operatorname{tg} \theta)^2} = \frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta} = \frac{1 - 2}{1 + 2} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

45 (UFU-MG) Se α é um número do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$, determine $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$.

Resolução:

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3} \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4}{3} \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{9} \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

$$16 \cos^2 2\alpha + 9 \cos^2 2\alpha = 9 \Rightarrow \cos^2 2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \therefore \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (\text{I}) \\ \operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3}{5} \quad (\text{II}) \end{array} \right.$$

$$(\text{II}) \quad 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{2}{10} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$(\text{I}) \quad 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

p. 87

46 Se $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1}{3}$, calcule $\operatorname{sen} 2x$. Sugestão: eleve os dois membros ao quadrado. $-\frac{8}{9}$

Resolução:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1}{3}$$

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9}$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x + 1 = \frac{1}{9}$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = -\frac{8}{9}$$

$$\operatorname{sen} 2x = -\frac{8}{9}$$

- 47** (FGV-SP) Reduza a expressão $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$ à expressão mais simples possível. $\frac{3}{2}$

Resolução:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

- 48** (UFMA) Se $\cos(2\phi) = \frac{5}{6}$ e $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, então $\sin \phi$ é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{11}{36}$

b) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Resolução:

$$\cos 2\phi = 1 - 2 \sin^2 \phi$$

$$\frac{5}{6} = 1 - 2 \sin^2 \phi \Rightarrow 2 \sin^2 \phi = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{12}, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

- 49** Se $\sin a = \frac{4}{5}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de $\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}$. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Resolução:

$$\sin a = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos a = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{8}{5}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{10}} + \sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

- 50** (UFES) Sabendo que $\sin \theta = \frac{5}{13}$ e $\theta \in 2^{\circ}$ quadrante, calcule $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. 5

Resolução:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{5}{13} \\ \theta \in 2^{\circ} \text{ Q} \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in 1^{\circ} \text{ Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{1 + \left(-\frac{12}{13}\right)}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5$$

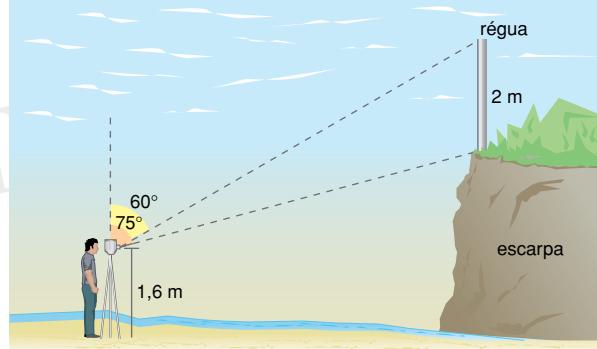
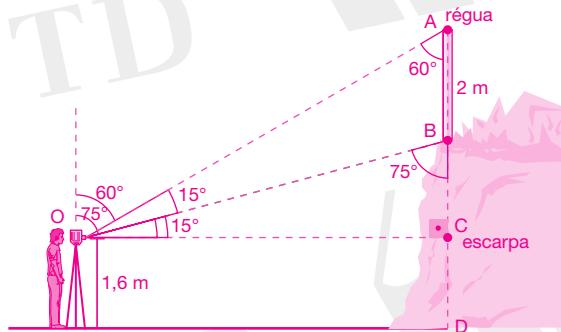
- 51** (Unicamp-SP) De uma praia, um topógrafo observa uma pequena escarpa sobre a qual foi colocada, na vertical, uma régua de 2 m de comprimento. Usando seu teodolito, o topógrafo constatou que o ângulo formado entre a reta vertical que passa pelo teodolito e o segmento de reta que une o teodolito ao topo da régua é de 60° , enquanto o ângulo formado entre a mesma reta vertical e o segmento que une o teodolito à base da régua é de 75° .

Sabendo que o teodolito está a uma altura de 1,6 m do nível da base da escarpa, responda às questões a seguir:

- a) Qual a distância horizontal entre a reta vertical que passa pelo teodolito e a régua sobre a escarpa?
b) Qual a altura da escarpa? $(1,6 + \sqrt{3})$ m
a) $(2\sqrt{3} + 3)$ m

Resolução:

Observe a figura:



Pela figura, observamos que OC é a distância, em metros, entre a reta vertical que passa pelo teodolito do observador e a escarpa. No triângulo retângulo OCA , temos:

- $\sin 60^{\circ} = \frac{OC}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Sendo \overline{OB} a bissetriz interna do ângulo AOC , podemos aplicar o Teorema da Bissetriz Interna:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CB}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CB}{2} \Rightarrow CB = \sqrt{3} \text{ m}$$
- $\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{AC}{OC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{OC} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot OC = 6 + 3\sqrt{3} \Rightarrow OC = 2\sqrt{3} + 3 \text{ m}$

Concluindo: a distância entre a vertical e a régua é $OC = 2\sqrt{3} + 3$ m, e a altura da escarpa é $B = CD + BC = 1,6 + \sqrt{3}$ m.

52 Resolva a equação $4^{-\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$$4^{-\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2 \operatorname{sen} x} = 2^{-1}$$

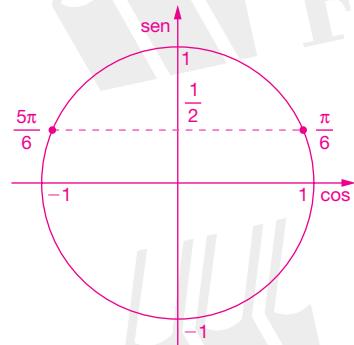
$$-2 \operatorname{sen} x = -1$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{ou } \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$



53 Se $0 \leq x \leq \pi$, qual o conjunto solução da equação $4(\cos x + 1) \cos x = 3$? $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$4(\cos x + 1) \cos x = 3$$

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = y$$

$$4y^2 + 4y - 3 = 0$$

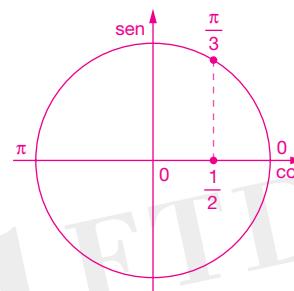
$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$$

$y' = -\frac{3}{2} < -1$ (não serve)
ou
 $y'' = \frac{1}{2}$

$$\cos x = y \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$$



54 (UFG) Determine todo x , no intervalo $[0, 2\pi]$, que satisfaz a equação $\frac{16^{\cos^2 x}}{4^{\cos x}} = 1$. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

Resolução:

$$\frac{16^{\cos^2 x}}{4^{\cos x}} = 1$$

$$(2^4)^{\cos^2 x} = (2^2)^{\cos x}$$

$$2^{4 \cos^2 x} = 2^{2 \cos x}$$

$$4 \cos^2 x = 2 \cos x$$

$$4 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

55 Sabendo que $2 \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = 1$ e que $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, calcule o valor de A , sendo $A = \operatorname{sen} x + \cos x$.

Resolução:

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = 1; x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\Rightarrow \operatorname{tg} x < 0$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = 1 \Rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1$$

$$\text{Portanto, } \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x.$$

$$\text{Assim, } A = \operatorname{sen} x + \cos x = -\cos x + \cos x = 0.$$

56 (Faap-SP) Resolver, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$, a equação $1 - \operatorname{sen} x + \cos^2 x = 0$. $\left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

Resolução:

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$1 - \operatorname{sen} x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow 1 - \operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = y$$

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad \therefore y' = -2 \text{ (não serve)} \\ y'' = 1$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

57 (Unesp-SP) Seja a expressão: $f(x) = \sin(2x) - \cotg(x)$, considerando o conjunto dos reais.

- a) Encontre o valor de $f(x)$ para $x = \frac{5\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}$. b) Resolva a equação $f(x) = 0$.

Resolução:

a) $f(x) = \sin(2x) - \cotg(x)$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) - \cotg(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 x \cos x - \cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{\cos x(2 \sin^2 x - 1)}{\sin x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x(2 \sin^2 x - 1) = 0 & (\text{I}) \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

De (I), vem: $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ou

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Desse modo: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

58 (UFPR) Resolva a equação trigonométrica $\sin x + \cos x - 1 = 0$, no intervalo fechado $[0, 2\pi]$.

Resolução:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0; [0, 2\pi]$$

$$\left\{ 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = (1)^2 \Rightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 0$$

$$\begin{array}{ll} x = 0 \text{ ou } x = \pi & (\text{não serve}) \\ \text{ou } x = 2\pi & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{2} & \text{ou } x = \frac{3\pi}{2} \\ (\text{não serve}) & \end{array}$$

$$S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

59 (UFRJ) A equação $x^2 - 2x \cos \theta + \sin^2 \theta = 0$ possui raízes reais iguais.

Determine θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$

Resolução:

Como a equação do 2º grau deve apresentar raízes iguais, devemos ter discriminante nulo, ou seja, $\Delta = 0$.

$$\text{Daí: } b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-2 \cos \theta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \theta - 4 \cdot \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 \theta - 4 \cdot (1 - \cos^2 \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \theta - 4 + 4 \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow 8 \cos^2 \theta = 4 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Os valores de θ que satisfazem a igualdade acima são: $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$.

60 (PUC-PR) O número de raízes reais distintas da equação $4|\cos x|^4 - 17|\cos x|^2 + 4 = 0$, com $0 \leq x \leq 2\pi$ é:

- a) 2
b) 3

- c) 4
d) 0

- e) 1

Resolução:

Considerando a equação do enunciado e fazendo $|\cos x| = a$, teremos uma equação biquadrada na variável a : $4a^4 - 17a^2 + 4 = 0$. A solução dessa equação é $S = \left\{-2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; porém, como $a = |\cos x|$, os valores -2 , 2 e $-\frac{1}{2}$ não são convenientes. Logo, $|\cos x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Os valores que satisfazem essas igualdades são:

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

Obs.: O gabarito oficial da PUC apresenta como resposta a alternativa (a).

61 (Unesp-SP) A temperatura, em grau Celsius ($^{\circ}\text{C}$), de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, da 0 hora às 24 horas, é dada aproximadamente pela função:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \quad 0 \leq t \leq 24, \text{ com } t \text{ em horas. Determine:}$$

2 horas: $0,35^{\circ}\text{C}$;
9 horas: $-0,7^{\circ}\text{C}$

- a) a temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas (use as aproximações $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$);
b) em quais horários do dia a temperatura atingiu 0°C . $0\text{ h}, 8\text{ h}, 16\text{ h}, 24\text{ h}$

Resolução:

a) Sendo $f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, temos:

$$f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 0,85 - 0,5 = 0,35^{\circ}\text{C}$$

$$f(9) = \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 9\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - 0 = -0,7^{\circ}\text{C}$$

- b) Para que a temperatura seja 0°C , devemos ter:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{\pi}{12} \cdot t + 2k\pi \Rightarrow 2\pi t = \pi t + 24k\pi \Rightarrow t = 24k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{-\pi}{12} \cdot t + 2k\pi \Rightarrow 2\pi t = -\pi t + 24k\pi \Rightarrow t = 8k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 8k, k \in \mathbb{Z}$$

Sabendo que $0 \leq t \leq 24 \Rightarrow 0 \leq 8k \leq 24 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3$; logo, k pode ser $0, 1, 2$ ou 3 . Daí, $t = 0\text{ h}, t = 8\text{ h}, t = 16\text{ h}$ ou $t = 24\text{ h}$.

62 (UFRGS) O conjunto solução da equação $\sin x + \cos x = 0$ é:

- a) $\left\{k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ c) $\left\{2k\pi + \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ e) $\left\{\frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
 b) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ d) $\left\{2k\pi - \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$$\sin x + \cos x = 0$$

$$\sin x = -\cos x$$

$$\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Considerando $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ (absurdo), ou}$$

$$x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

63 (Fuvest-SP) Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfazem a

$$\text{equação } \cos^2 2x = \frac{1}{2} - \sin^2 x. \quad \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \\ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$$

Lembrete: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Resolução:

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2} \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{\cos 2x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Para o intervalo $[0, 2\pi]$, temos: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

64 Sendo $0 \leq x \leq \pi$, determine a soma das raízes da equação $\log_2(\cos 2x) - \log_2(\sin x) = 0$.

Resolução:

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$\log_2(\cos 2x) - \log_2(\sin x) = 0 \Rightarrow \log_2 \frac{\cos 2x}{\sin x} = 0$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \cos 2x = \sin x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

$$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$\text{Temos: } \sin x = y$$

$$-2y^2 - y + 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4}$$

$$\begin{cases} y' = -1 \\ y'' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \text{ (não serve)} \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

65 (ITA-SP) O conjunto solução de $(\operatorname{tg}^2 x - 1)(1 - \operatorname{cotg}^2 x) = 4$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, é:

a) $\left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $\left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

e) $\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lembrete: $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$

Resolução:

$$(\operatorname{tg}^2 x - 1) \cdot (1 - \operatorname{cotg}^2 x) = 4 \Rightarrow \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \right) \left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) \cdot \left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = 1 \Rightarrow \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2}{4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(-\cos(2x))^2}{(2 \cdot \sin x \cdot \cos x)^2} = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} = 1 \Rightarrow \operatorname{cotg}^2(2x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg}(2x) = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{cotg}(2x) = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou} \\ \operatorname{cotg}(2x) = -1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Logo: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

- 66** (UENF-RJ) Uma população P de animais varia, aproximadamente, segundo a equação abaixo:

$$P = 800 - 100 \cdot \operatorname{sen} \frac{(t+3)\pi}{6}$$

Considere que t é o tempo medido em meses e que 1º de janeiro corresponde a $t = 0$.

Determine, no período de 1º de janeiro a 1º de dezembro de um mesmo ano, os meses nos quais a população de animais atinge:

a) um total de 750; março e novembro

b) seu número mínimo. janeiro

Resolução:

a) $P = 750$

$$750 = 800 - 100 \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{(t+3)\pi}{6} \right] \Rightarrow -100 \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{(t+3)\pi}{6} \right] = 750 - 800 \Rightarrow$$

$$\frac{(t+3)\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow t+3 = 1 + 12k \Rightarrow \\ \Rightarrow t = 12k - 2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = 10 \text{ (novembro)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \left[\frac{(t+3)\pi}{6} \right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{ou} \\ \frac{(t+3)\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow t+3 = 5 + 12k \Rightarrow \\ \Rightarrow t = 12k + 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ (março)} \end{cases}$$

b) A população será mínima quando o seno for máximo. Logo:

$$\operatorname{sen} \left[\frac{(t+3)\pi}{6} \right] = 1 \Rightarrow \frac{(t+3)\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t+3 = 3 + 12k \Rightarrow t = 12k$$

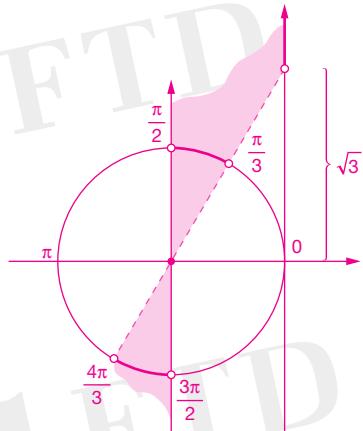
$$k = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ (janeiro)}$$

$$k = 1 \Rightarrow t = 12 \text{ (janeiro)}$$

- 67** Resolva a inequação $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, para $0 \leq x \leq 2\pi$. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2} \right\}$

Resolução:

Sabendo que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, temos:



Observando o gráfico, vemos que a solução da inequação é:

$$\operatorname{tg} x > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

68 Sendo $x \in [0, 2\pi[$, resolva: $\frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x} < 1$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \frac{5\pi}{4}\right\}$

Resolução:

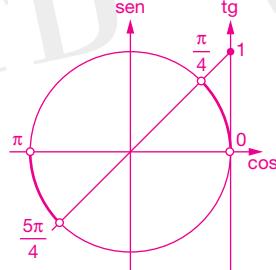
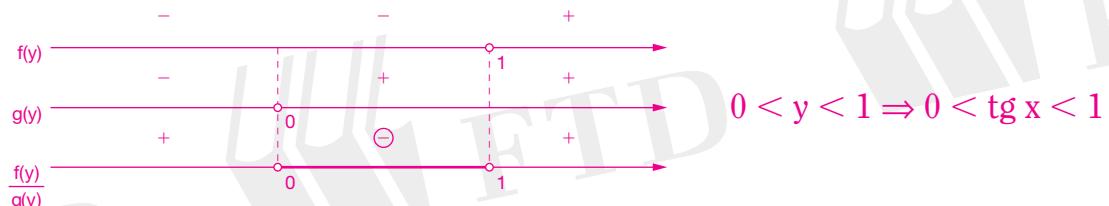
$$\frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x} < 1; x \in [0, 2\pi[$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} x - 1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} < 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x} < 0$$

$$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{y - 1}{y} < 0$$

$$f(y) = y - 1 \text{ e } g(y) = y$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \frac{5\pi}{4}\right\}$$

69 (FEI-SP) Resolva a inequação $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \geq 0$.

Resolução:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \geq 0$$

Mas $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, portanto:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - 1 + \operatorname{sen}^2 x \geq 0$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 \geq 0$$

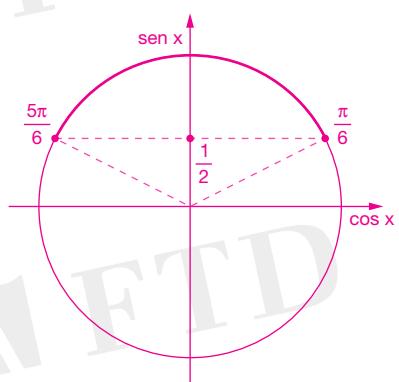
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$



$$\operatorname{sen} x \leq -1 \quad (\text{I})$$

ou

$$\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2} \quad (\text{II})$$



$$(\text{I}) \operatorname{sen} x \leq -1$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(\text{II}) \operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Os valores de (I) não estão implícitos na resposta de (II). Daí:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

70 Resolva a inequação $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 > 0$, sendo $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução:

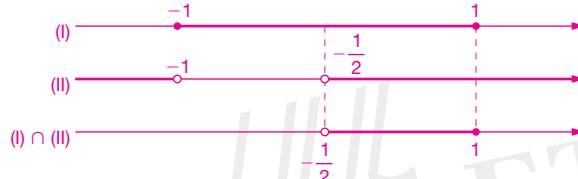
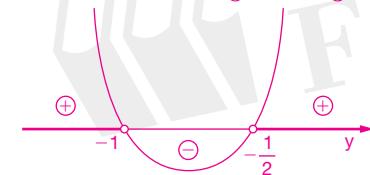
$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 > 0; x \in [0, 2\pi]$$

Fazendo $\cos x = y$, tem-se: $-1 \leq y \leq 1$ (I)

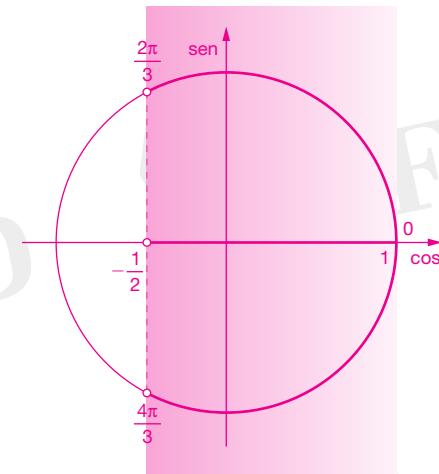
$$2y^2 + 3y + 1 > 0 \quad (\text{II})$$

$$f(y) = 2y^2 + 3y + 1 \Rightarrow \text{raízes: } y' = -\frac{1}{2} \text{ ou } y'' = -1$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \right\}$$



$$-\frac{1}{2} < y \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \right\}$$

71 (Unicamp-SP) Ache os valores de x , com $0 \leq x \leq 360^\circ$, tais que $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 \geq 0$.

Resolução:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 30^\circ \leq x \leq 150^\circ\}$$

$$2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 \geq 0; 0 \leq x \leq 360^\circ$$

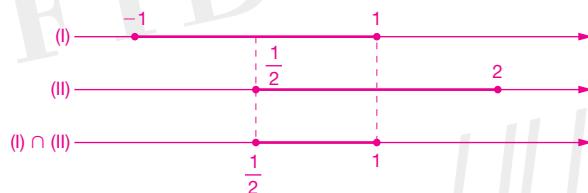
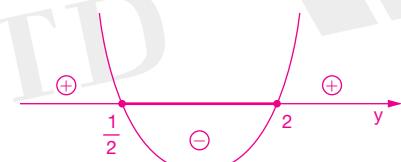
$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 4 \geq 0$$

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 \leq 0$$

Fazendo $\sin x = y$, tem-se: $-1 \leq y \leq 1$ (I)

$$2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \quad (\text{II})$$

$$f(y) = 2y^2 - 5y + 2 \Rightarrow \text{raízes: } y' = \frac{1}{2} \text{ ou } y'' = 2$$



$$\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 30^\circ \leq x \leq 150^\circ\}$$