Resolução das atividades complementares

Matemática

M5 – Análise combinatória

p. 6

1 Ao lançarmos um dado duas vezes, quantas e quais são as possibilidades de ocorrência dos números?

Resolução:

Ao lançarmos um dado duas vezes, obtemos as ocorrências:

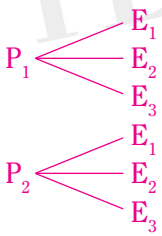
(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6);
(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6);
(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6);
(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6);
(5, 1); (5, 2), (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6);
(6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6).

O total de ocorrências é 36.

2 Um edifício possui duas portas de entrada e três elevadores. De quantas maneiras uma pessoa pode chegar ao 10º andar? 6

Resolução:

Para cada porta, temos 3 elevadores:



Portanto, uma pessoa possui 6 maneiras ($2 \cdot 3 = 6$) de chegar ao 10º andar.

3 Considere os algarismos 2, 4 e 6.

a) Quantos são os números de três algarismos que podemos formar com esses algarismos? 27

b) Quantos são os números de três algarismos distintos que podemos formar com esses algarismos? 6

Resolução:

a) Possibilidades: $\overline{3}\ \ \overline{3}\ \ \overline{3}$

Podemos formar $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ números de três algarismos.

b) Se os algarismos são distintos, não podemos repetir os que já foram usados, então:

$\overline{3}\ \ \overline{2}\ \ \overline{1}$

Podemos formar 6 números ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$) de três algarismos distintos.

4 Quantos divisores naturais possui o número 200? 12

Resolução:

Os divisores naturais de 200 são do tipo $2^a \cdot 5^b$.

Exemplo: $2^2 \cdot 5^2 = 100 \rightarrow$ é um divisor de 200.

$a \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $b \in \{0, 1, 2\}$

Portanto, o número 200 possui 12 divisores naturais ($4 \cdot 3 = 12$).

5 De quantas maneiras diferentes os assentos de um carro poderão ser ocupados se houver cinco pessoas que sabem dirigir e supondo que caibam um motorista e quatro passageiros? 120

Resolução:

	1	2	3	4	5
Possibilidades:	5	4	3	2	1

Para o primeiro banco temos 5 possibilidades, para o segundo, 4, para o terceiro, 3, para o quarto, 2 e para o quinto, 1 possibilidade. Portanto, temos um total de 120 maneiras ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$) diferentes de ocupar os assentos do carro.

6 Uma churrascaria oferece 30 tipos de salada, dez tipos de carne e cinco tipos de sobremesa. Mauro resolveu optar por um tipo de salada, um tipo de carne e um tipo de sobremesa. Quantas opções ele tem para montar seu prato? 1 500

Resolução:

Pelo princípio multiplicativo, temos: 1 500 opções ($30 \cdot 10 \cdot 5 = 1\,500$) para montar um prato com um tipo de salada, um tipo de carne e um tipo de sobremesa.

7 Oito atletas disputam as medalhas de ouro, prata e bronze na prova dos 100 metros rasos. Qual o número de resultados possíveis para essas medalhas? 336

Resolução:

ouro	prata	bronze
8	7	6

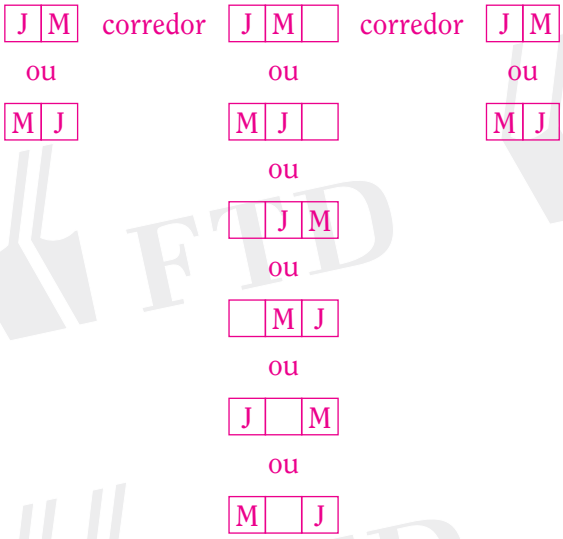
O número de resultados possíveis é 336 ($8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$).

8 (Mackenzie-SP) Num avião, uma fila tem sete poltronas dispostas como na figura abaixo:

Os modos de João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de:

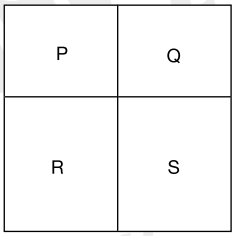
a) 6
b) 7
c) 8
d) 10
e) 12

Resolução:



Nas três poltronas centrais pode ficar uma poltrona vaga entre os dois, já que a condição é não haver corredor entre João e Maria. Portanto, são 10 possibilidades.

9 Dispomos de quatro cores distintas e temos de colorir o mapa mostrado na figura, com os países *P*, *Q*, *R* e *S*, de modo que países cuja fronteira é uma linha não possam ser coloridos com a mesma cor. Responda, justificando sua resposta, de quantas maneiras é possível colorir o mapa se:



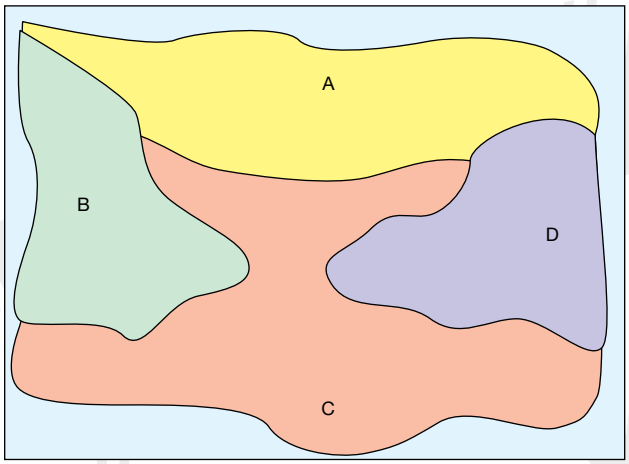
a) os países *P* e *S* forem coloridos com cores distintas. 48
b) os países *P* e *S* forem coloridos com a mesma cor. 36

Resolução:

a) Se *P* e *S* forem coloridos com cores distintas, teremos 4 possibilidades para *P*, 3 possibilidades para *S* e 2 possibilidades para *R* e *Q*, pois podem ser de mesma cor; portanto, teremos um total de 48 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$).

b) Se *P* e *S* forem coloridos com a mesma cor, teremos 4 possibilidades para *P* e *S* e 3 possibilidades para *R* e *Q*; portanto, teremos um total de 36 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$).

10 (UFMS) Considere o mapa da região formada pelos países *A*, *B*, *C* e *D*.



Ao colorir um mapa, pode-se usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois países vizinhos tenham cores diferentes. De acordo com essa informação e usando apenas quatro cores, pode-se colorir o mapa acima de *L* maneiras distintas. Então, é correto afirmar que *L* vale:

a) 24
b) 36
c) 40
d) 48
e) 32

Resolução:

Os únicos países que podem ser pintados com a mesma cor são *B* e *D*.

Se *B* e *D* forem pintados com cores diferentes, teremos:

$$\frac{A}{4}\ \frac{B}{3}\ \frac{C}{2}\ \frac{D}{1} \rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24;\ 24 \text{ possibilidades.}$$

Se *B* e *D* forem pintados com a mesma cor, teremos:

$$\frac{A}{4}\ \frac{B}{2}\ \frac{C}{\ }\ \frac{D}{3} \rightarrow 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24;\ 24 \text{ possibilidades.}$$

Total: $24 + 24 = 48$; 48 possibilidades.

11 (UFV-MG) Quero emplacar meu carro novo atendendo a algumas restrições. A placa do meu automóvel será formada por três letras distintas (incluindo *K*, *Y* e *W*), seguidas por um número de quatro algarismos divisível por 5, que deverá ser formado usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5. O número de placas que podem ser formadas atendendo às restrições descritas é igual a:

a) 1 124 800
b) 998 864
c) 998 400
d) 1 124 864
e) 1 054 560

Resolução:

São 26 letras para a primeira casa, 25 para a segunda e 24 para a terceira.

Como o número é divisível por 5, ele termina em 5, e cada casa pode ser formada por qualquer um dos 4 algarismos.

$$\frac{\ }{26}\ \frac{\ }{25}\ \frac{\ }{24}\ \frac{\ }{4}\ \frac{\ }{4}\ \frac{\ }{4}\ \frac{5}{\ }$$

Total: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 998\ 400$

12 (Unesp-SP) Na convenção de um partido para lançamento da candidatura de uma chapa ao governo de certo estado havia três possíveis candidatos a governador, sendo dois homens e uma mulher, e seis possíveis candidatos a vice-governador, sendo quatro homens e duas mulheres. Ficou estabelecido que a chapa governador/vice-governador seria formada por duas pessoas de sexos opostos. Sabendo que os nove candidatos são distintos, o número de maneiras possíveis de se formar a chapa é:

a) 18
b) 12
c) 8
d) 6
e) 4

Resolução:

Conforme o enunciado, teremos governador homem e vice-governador mulher ou governador mulher e vice-governador homem. Assim:

se o governador for homem $\rightarrow 2 \cdot 2$;

se o governador for mulher $\rightarrow 1 \cdot 4$.

Total: $2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 8$; 8 maneiras possíveis.

13 (ITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados, utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com dígito par?

a) 375
b) 465
c) 545
d) 585
e) 625

Resolução:

Temos 6 algarismos: 3 algarismos pares e 3 algarismos ímpares.

Números com 2 algarismos:

pares	ímpares
3	3

$\rightarrow 3 \cdot 3 = 9$

Números com 3 algarismos:

pares	———	ímpares
3	4	3

$\rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

Números com 4 algarismos:

pares	———	———	ímpares
3	4	3	3

$\rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 108$

Números com 5 algarismos:

pares	———	———	———	ímpares
3	4	3	2	3

$\rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 216$

Números com 6 algarismos:

pares	———	———	———	———	ímpares
3	4	3	2	1	3

$\rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 216$

Total: $9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585$; 585 números.

14 Calcule o valor de:

a) $7!$ $5\,040$

b) $(10 - 5)!$ 120

c) $\dfrac{9! \cdot 6!}{7! \cdot 10!}$ $\dfrac{1}{70}$

Resolução:

a) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

b) $(10 - 5)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $\dfrac{9! \cdot 6!}{7! \cdot 10!} = \dfrac{9! \cdot 6!}{7 \cdot 6! \cdot 10 \cdot 9!} = \dfrac{1}{70}$

15 Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{(n - 6)!}{(n - 5)!}$ $\dfrac{1}{n - 5}$

b) $\dfrac{(n + 3)!}{n!}$ $(n + 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 1)$

Resolução:

a) $\dfrac{(n - 6)!}{(n - 5)!} = \dfrac{(n - 6)!}{(n - 5) \cdot (n - 6)!} = \dfrac{1}{n - 5}$

b) $\dfrac{(n + 3)!}{n!} = \dfrac{(n + 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n!}{n!} = (n + 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 1)$

16 Resolva a equação: $\dfrac{(x - 1)!}{(x - 4)!} = 12 \cdot \dfrac{(x - 1)!}{(x - 2)!}$. $S = \{6\}$

Resolução:

$\dfrac{(x - 1)!}{(x - 4)!} = 12 \cdot \dfrac{(x - 1)!}{(x - 2)!}$

$\dfrac{(x - 1)!}{(x - 4)!} = 12 \cdot \dfrac{(x - 1)!}{(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)!} \rightarrow (x - 2) \cdot (x - 3) = 12$

$x^2 - 5x + 6 - 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow (x - 6) \cdot (x + 1) = 0 \rightarrow x = 6$ ou $x = -1$ (não convém)

$S = \{6\}$

17 Simplifique e calcule o valor numérico da expressão: $\dfrac{(k!)^2}{[(k - 1)!]^2}$, para $k = 7$. 49

Resolução:

$\dfrac{(k!)^2}{[(k - 1)!]^2}$, $k = 7$

$\dfrac{7! \cdot 7!}{6! \cdot 6!} = \dfrac{7 \cdot 6! \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 6!} = 49$

18 Prove que: $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} = \frac{n+3}{(n+2)!}$.

Resolução:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} = \frac{n+3}{(n+2)!}$$

Desenvolvendo o primeiro membro, temos:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)!} = \frac{n+2+1}{(n+2)\cdot(n+1)!} = \frac{n+3}{(n+2)!} \text{ (igual ao 2º membro)}$$

Portanto, $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} = \frac{n+3}{(n+2)!}$.

19 Resolva a equação: $(x+1)! = 15(x-1)!$. $S = \{\ \}$

Resolução:

$(x+1)! = 15 \cdot (x-1)!$

$(x+1) \cdot x \cdot (x-1)! = 15 \cdot (x-1)!$

$x^2 + x = 15 \rightarrow x^2 + x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+60}}{2}$

Não existe raiz quadrada exata de 61; logo, não existe um número inteiro que satisfaça essa equação.

$S = \{\ \}$

20 Resolva a equação: $\frac{(3n)!}{(3n-2)!} = 4$. $S = \{\ \}$

Resolução:

$$\frac{(3n)!}{(3n-2)!} = 4 \rightarrow \frac{3n \cdot (3n-1) \cdot (3n-2)!}{(3n-2)!} = 4 \rightarrow 3n \cdot (3n-1) = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9n^2 - 3n - 4 = 0 \rightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9+144}}{18} = \frac{3 \pm \sqrt{153}}{18}$$

Não existe raiz quadrada exata de 153; logo, não existe um número inteiro que satisfaça a equação.

$S = \{\ \}$

21 Exprima a expressão $A = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2, 4^2 \ldots n^2$ em função de fatoriais. $A = (n!)^2$

Resolução:

$A = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2, 4^2 \ldots n^2$

$A = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n =$
$= n! \cdot n! = (n!)^2$

$\therefore A = (n!)^2$

22 O valor numérico da expressão $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$, para n = 2 é:

a) 420

b) $\frac{1}{420}$

c) 402

d) $\frac{1}{402}$

e) $\frac{1}{6}$

Resolução:

$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}, n = 2$

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)\cdot n} \rightarrow \frac{1}{(2+1)\cdot 2} \rightarrow \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}$$

23 (Unifesp-SP) O valor de $\log_2\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n}{n!}\right)$ é:

a) n^2

b) 2n

c) n

d) $2\log_2 n$

e) $\log_2 n$

Resolução:

$\log_2\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n}{n!}\right)$

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n}{n!}\right) = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4\ \ldots\ 2n}{n!} = \frac{2^n\cdot n!}{n!} = 2^n$$

$\log_2 2^n = n$

Em questões como a 24, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

24 (UFMS) Definição 1: Dado um número natural *n*, define-se o fatorial de *n*, indicado por n!, como:

$0! = 1$

$1! = 1$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \ldots\ 2\cdot 1$, para $n \geqslant 2$

Definição 2: Dados dois números naturais *n* e *p*, com $n \geqslant p$, define-se o coeficiente binomial *n* sobre *p* por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Considerando a(s) definição(ões) 1 e/ou 2, é correto afirmar que:

(01) $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n}{3}$, para todo *n* natural tal que $n \geqslant 3$.

(02) a solução da equação $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 930$ é um número natural par.

(04) se $a = \binom{25}{5}$ e $b = \binom{25}{6}$, então $\frac{a}{b} = 0{,}3$.

(08) $\frac{(n+2)! + (n+1)\cdot(n-1)!}{(n+1)\cdot(n-1)!} = (n+1)^2$, para todo *n* natural tal que $n \geqslant 2$.

(16) $\binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)\cdot(n-1)}{2}$, para todo *n* natural tal que $n \geqslant 2$. 14

Resolução:

(01) (Falsa)

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n}{3}$$

$$\frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!}$$

$$\frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{3 \cdot 2 \cdot (n-3)!}$$

$$n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \neq \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

(02) (Verdadeira)

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 930 \rightarrow \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 930 \rightarrow n^2 + n - 930 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3\,720}}{2} = \frac{-1 \pm 61}{2}$$

$n = 30$ (natural par)

ou

$n = -31$ (não convém)

(04) (Verdadeira)

$$a = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$b = \frac{25!}{6! \cdot 19!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 19!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{6}{20} = 0{,}3$$

(08) (Verdadeira)

$$\frac{(n+2)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!} =$$

$$= \frac{(n+1) \cdot (n-1)! \cdot [(n+2) \cdot n + 1]}{(n+1) \cdot (n-1)!} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

(16) (Falsa)

$$\frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{2 \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \neq \frac{(n+1) \cdot (n-1)}{2}$$

soma $= 2 + 4 + 8 = 14$

25 Calcule:

a) $A_{10,3}$ 720

b) $\frac{A_{9,2}}{A_{7,3}} + 1$ $\frac{47}{35}$

Resolução:

a) $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$

b) $\frac{A_{9,2}}{A_{7,3}} + 1 = \frac{9 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5} + 1 = \frac{12}{35} + 1 = \frac{47}{35}$

26 A expressão $A_{n,k}$ existe para:

a) $n > 0$ e $k < 0$

b) $n > 0$ e $k \neq 0$

c) $k > n$

d) $n \geqslant k$

e) $n - k \neq 0$

Resolução:

$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow$ *A* existe para $n \geqslant k$

27 Para estimular o uso da bicicleta, o prefeito de uma cidade resolveu premiar os primeiros colocados de uma corrida de bicicletas ao redor da cidade com uma casa, um carro e uma bicicleta. De quantas maneiras distintas 20 concorrentes poderão ganhar esses prêmios? 6 840

Resolução:

casa	carro	bicicleta
20	19	18

$A_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$; 6 840 maneiras.

28 Uma urna contém seis bolas numeradas de 1 a 6. Outra urna contém quatro bolas numeradas de 1 a 4. De quantas maneiras diferentes podemos extrair quatro bolas da primeira urna e três bolas da segunda urna, sem fazer reposição de bolas? 8 640

Resolução:

urna 1	urna 2
1 2 3 4 5 6	1 2 3 4

$A_{6,4}\ A_{4,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8\,640$; 8 640 maneiras.

29 Um cofre é formado por um segredo de 5 algarismos distintos. Um especialista em cofres leva três minutos em cada tentativa de abertura. Supondo que o especialista só conseguiu abrir o cofre depois de experimentar todas as possibilidades e que trabalhou 12 horas por dia, podemos afirmar que, para abrir o cofre, ele levou:

a) quatro dias
b) um mês
c) dois meses
d) três meses
e) mais de quatro meses

Resolução:

$A_{10,\,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$; 30 240 tentativas.

Para cada tentativa, o especialista leva 3 minutos, então: $30\,240 \cdot 3 = 90\,720$; 90 720 minutos.

Uma hora tem 60 minutos, então: $\frac{90\,720}{60} = 1\,512$; 1 512 horas.

Como ele trabalhou 12 horas por dia: $\frac{1\,512}{12} = 126$; 126 dias, que corresponde a mais de quatro meses.

30 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de três algarismos distintos podemos formar? 504

Resolução:

$A_{9,\,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$; 504 números.

31 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, quantos números entre 400 e 800 com algarismos distintos podemos formar? 168

Resolução:

4 ___ ___ $A_{7,\,2}$

5 ___ ___ $A_{7,\,2}$

6 ___ ___ $A_{7,\,2}$ $\rightarrow 4 \cdot A_{7,\,2} = 4 \cdot 7 \cdot 6 = 168$; 168 números.

7 ___ ___ $A_{7,\,2}$

32 Uma sala tem 30 lugares. De quantas maneiras 25 alunos podem sentar-se? $\frac{30!}{5!}$

Resolução:

$A_{30,\,25} = \frac{30!}{5!}$

33 Quantas frações irredutíveis e diferentes de 1 podemos formar com os números 3, 5, 7, 11, 17 e 23? 30

Resolução:

Os números 3, 5, 7, 11, 17 e 23 são números primos.

$\therefore A_{6,\,2} = 6 \cdot 5 = 30$; 30 frações.

34 Quantos números ímpares de quatro algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? 1 680

Resolução:

Se são ímpares, devem terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9.

___ ___ ___ 1 $A_{8,3}$

___ ___ ___ 3 $A_{8,3}$

___ ___ ___ 5 $A_{8,3}$ $\rightarrow 5 \cdot A_{8,3} = 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1\,680$; 1 680 números.

___ ___ ___ 7 $A_{8,3}$

___ ___ ___ 9 $A_{8,3}$

35 Resolva a equação: $\dfrac{x!}{(x-2)!} = 2$. $S = \{2\}$

Resolução:

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 2 \rightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)!} = 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -1 \quad \text{(não convém)} \end{cases}$$

$\therefore S = \{2\}$

36 (Faap-SP) Para abrir um arquivo no microcomputador, o usuário deve digitar uma senha de quatro caracteres, numa certa ordem e sem repeti-los. O usuário sabe quais são os caracteres, mas não conhece a ordem em que devem ser digitados. Obstinado, procura acertar a senha por tentativas. O número de tentativas que deve fazer é:

a) 24
b) 30
c) 36
d) 40
e) 120

Resolução:

$A_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ tentativas

p. 11

37 Calcule:

a) $2P_5$ 240

b) $(P_5)^2$ 14 400

Resolução:

a) $2P_5 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$

b) $(P_5)^2 = 120^2 = 14\,400$

38 Quantos anagramas diferentes podemos formar com as letras da palavra THAÍS? 120

Resolução:

A palavra THAÍS possui 5 letras, então:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

39 (UPF-RS) O número de anagramas da palavra MELHOR, que começam e terminam por vogal, é definido por:

a) P_6

b) P_5

c) $4!$

d) $2P_6$

e) $2P_4$

Resolução:

A palavra MELHOR possui 2 vogais e 4 consoantes, então:

vogal					vogal
2	4	3	2	1	1

Portanto, $2P_4$.

40 Determine $n \in \mathbb{N}$ de modo que $P_n = 40\,320$. 8

Resolução:

$40\,320 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$

$P_n = n! = 8! \rightarrow n = 8$

41 Se n é um número natural, determine n para que $P_n = 30P_{n-2}$. 6

Resolução:

$P_n = 30P_{n-2}$

$n! = 30 \cdot (n-2)!$

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = 30 \cdot (n-2)!$

$n^2 - n = 30 \rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \rightarrow (n+5) \cdot (n-6) = 0$ → $n = -5$ (não convém) ou $n = 6$

42 Considere a palavra LUCIANE:

a) Quantos são os anagramas dessa palavra? 5 040

b) Quantos anagramas começam por *L*? 720

c) Quantos começam por *L* e terminam em *E*? 120

d) Quantos começam por vogal? 2 880

e) Quantos apresentam as letras ANE juntas e nessa ordem? 120

f) Quantos apresentam as letras ANE juntas? 720

Resolução:

a) $P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

b) L ____ ____ ____ ____ ____ ____ $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

c) L ____ ____ ____ ____ ____ E $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) A palavra possui 4 vogais e 3 consoantes, então:

vogal ____ ____ ____ ____ ____ ____
4 6 5 4 3 2 1 $4P_6 = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2\,880$

e) Consideremos ANE uma só letra, então:

____ ____ ____ ____ ANE $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

f) Podemos permutar ANE, ou seja, $P_3 \cdot P_5 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

p. 12

43 (Mackenzie-SP) Num quadro, as chaves de seis salas e de dois banheiros, todas distintas, estão dispostas em duas filas com quatro chaves cada uma. Se as chaves dos banheiros devem ocupar as extremidades da primeira fila, o número de formas diferentes de se colocar as chaves no quadro é:

a) 6!

b) $6 \cdot 6!$

c) $4 \cdot 6!$

d) 8!

e) $2 \cdot 6!$

Resolução:

Chaves do banheiro: 2!

Chaves das salas: 6!

Como estão dispostas uma seguida da outra, temos: $P_2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6!$

44 (Unesp-SP) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:

a) 2

b) 4

c) 8

d) 16

e) 24

Resolução:

Pedro e Luísa, P_2

João e Rita, P_2

Os dois casais, P_2

$P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; 8 formas diferentes.

45 Considere todos os números formados por seis algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1. 720 e 120

b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512 346 e que número ocupa a 24ª posição. 481ª e 126 543

Resolução:

a) No total: ____ ____ ____ ____ ____ ____ $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Iniciando com 1: 1 ____ ____ ____ ____ ____ $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) Colocando em ordem crescente, temos:

iniciando com 1: 1 ____ ____ ____ ____ ____ $P_5 = 120$

iniciando com 2: 2 ____ ____ ____ ____ ____ $P_5 = 120$

iniciando com 3: 3 ____ ____ ____ ____ ____ $P_5 = 120$

iniciando com 4: 4 ____ ____ ____ ____ ____ $P_5 = 120$

512 346 é o primeiro número iniciando com 5; como $4 \cdot 120 = 480$, 512 346 ocupa a 481ª posição.
Na 4ª posição, sabemos que o número inicia por 12.

1 2 ____ ____ ____ ____ $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, o maior número deste grupo é 126 543.

46 (FGV-SP) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR, de modo que as letras *A* e *R* fiquem juntas em qualquer ordem?

a) 360
b) 720
c) 1 080
d) 1 440
e) 1 800

Resolução:

Consideremos AR uma só letra, então:

E ____ ____ ____ ____ AR P_6

Como AR pode ficar em qualquer ordem $\rightarrow P_2$

$P_6 \cdot P_2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1\,440$; 1 440 formas.

47 Em quantos anagramas da palavra LEITO as vogais não aparecem lado a lado? 84

Resolução:

A palavra possui 3 vogais, então: P_3.
Considerando as permutações das 3 vogais juntas como uma só letra, temos: LTEIO = P_3.
Seja P_5 todas as permutações da palavra LEITO, e retirando todas as que possuem vogais lado a lado, temos:
$P_5 - P_3 \cdot P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 120 - 36 = 84$; 84 anagramas.

48 De quantos modos diferentes podemos dispor cinco livros de Matemática, três de História e quatro de Física numa prateleira, de modo que os livros de mesma disciplina permaneçam juntos? 103 680

Resolução:

M = Matemática; H = História; F = Física
MMMMMHHHFFFF = $P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 \cdot P_4 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 103\,680$;
103 680 modos diferentes.

49 Quantos são os anagramas da palavra MARCA? 60

Resolução:

A palavra possui 5 letras, e a letra *A* se repete 2 vezes, portanto:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60;\ 60 \text{ anagramas.}$$

50 Quantos anagramas tem a palavra CACAU? 30

Resolução:

A palavra possui 5 letras, e as letras *A* e *C* se repetem 2 vezes, então:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30;\ 30 \text{ anagramas.}$$

51 Considere a palavra ANAGRAMA.

a) Quantos são os anagramas dessa palavra? 1 680

b) Quantos são os anagramas que apresentam as letras NGM juntas e nessa ordem? 30

c) Quantos são os anagramas que apresentam as letras NGM juntas e em qualquer ordem? 180

Resolução:

a) A palavra possui 8 letras, e a letra *A* se repete 4 vezes, então:

$$P_8^4 = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 1\,680;\ 1\,680 \text{ anagramas.}$$

b) Considerando NGM uma só letra, temos A<u>NGM</u>ARAA, uma palavra com 6 letras, sendo 4 delas a letra *A*.

$$P_6^4 = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 30;\ 30 \text{ anagramas.}$$

c) $P_3 \cdot P_6^4 = 6 \cdot 30 = 180$; 180 anagramas.

52 Quantos são os anagramas da palavra CAVADA cujas letras *A* ficam juntas? 24

Resolução:

Considerando AAA uma só letra, temos:

<u>AAA</u> ____ ____ ____ $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, 24 anagramas.

53 Quantos são os anagramas da palavra ORANGOTANGO? 831 600

Resolução:

A palavra possui 11 letras: 3 letras *O*, 2 letras *N*, 2 letras *A* e 2 letras *G*.

$$P_{11}^{3,2,2,2} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 831\,600;\ 831\,600 \text{ anagramas.}$$

54 Quantos anagramas da palavra AMOROSO não apresentam letras AM juntas? 600

Resolução:

A palavra AMOROSO possui 7 letras, e a letra *O* se repete 3 vezes; portanto:

$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$; 840 anagramas totais.

Anagramas com as letras AM juntas: $P_2 \cdot P_6^3 = 2 \cdot \frac{6!}{3!} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 240$; 240 anagramas.

$840 - 240 = 600$

Então, 600 anagramas não apresentam as letras AM juntas.

55 Quantos anagramas da palavra TERREMOTO começam e terminam por *T*? 630

Resolução:

T ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ T

Das 7 letras que podemos permutar, temos 2 letras *R*, 2 letras *E* e 2 letras *O*; portanto:

$P_7^{2,2,2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 630$; 630 anagramas.

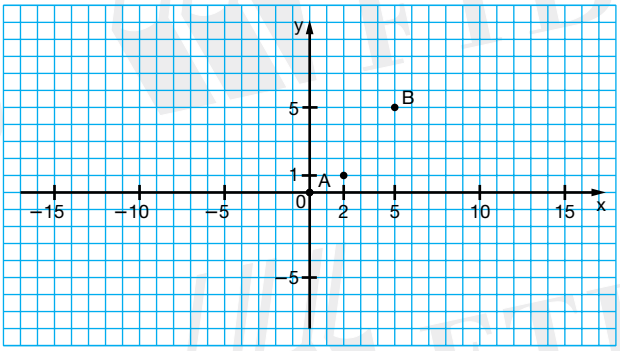
56 Uma prova contém dez testes, que devem ser respondidos com *V* ou *F* conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas. Paulo resolveu "chutar" todos os testes, colocando *V* em quatro testes e *F* nos demais. Quantas maneiras ele tem para responder à prova? 210

Resolução:

VVVVFFFFFF

$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$

57 Um menino encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Ele pode dar um só passo de cada vez, para norte ou leste. Passando obrigatoriamente pelo ponto (2, 1), quantas maneiras existem para ele chegar ao ponto (5, 5)? 105



Resolução:

Para chegar ao ponto (2, 1): $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$; 3 maneiras.

Para ir do ponto (2, 1) ao ponto (5, 5): $P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 4!} = 35$; 35 maneiras.

Para ir do ponto (0, 0) ao ponto (5, 5), temos: $3 \cdot 35 = 105$; 105 maneiras.

58 (UEM-PR) Um técnico de futebol dispõe de oito jogadores reserva, dos quais quatro serão convocados. Quantas são as possibilidades de escolher os quatro jogadores? 70

Resolução:

Podemos escolher 4 dos 8 jogadores, então:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{4! \cdot \cancel{4!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70;\ 70 \text{ possibilidades.}$$

59 Quantos planos são determinados por quatro pontos distintos e não coplanares? 4

Resolução:

3 pontos não coplanares determinam um plano, então:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4;\ 4 \text{ planos.}$$

60 Em uma escola há 20 professores e 12 alunos interessados em representar a escola num congresso. Quantas comissões podemos organizar compostas de três professores e dois alunos? 75 240

Resolução:

De 20 professores, 3 serão escolhidos, e de 12 alunos, apenas 2 serão escolhidos, então:

$$C_{20,3} \cdot C_{12,2} = \frac{20!}{17! \cdot 3!} \cdot \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 75\,240;\ 75\,240 \text{ comissões.}$$

61 (FGV-SP) De um grupo de oito pessoas, entre elas Antônio e Benedito, deseja-se escolher uma comissão de quatro pessoas. O número de comissões que podem ser formadas nas quais Antônio participa e Benedito não é igual a:

a) 15
b) 24
c) 30
d) 20
e) 36

Resolução:

Excluindo Benedito da comissão e mantendo sempre Antônio, devemos escolher 3 pessoas dentre as 6 que restam:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Portanto, são 20 comissões em que Antônio participa e Benedito não.

62 (Fuvest-SP) Na primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Resolução:

Seja n o número de jogadores.

Como cada jogador joga uma vez contra todos os demais, temos:

$$C_{n,2} = 78 \rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 78 \rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = 78 \rightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 64}}{2} = \frac{1 \pm 25}{2} \begin{cases} n = -12 \quad \text{(não convém)} \\ \text{ou} \\ n = 13 \end{cases}$$

Portanto, eram 13 jogadores no campeonato de xadrez.

63 (FGV-SP) Um administrador de um fundo de ações dispõe de ações de dez empresas para a compra, entre elas as da empresa R e as da empresa S.

a) De quantas maneiras ele poderá escolher sete empresas, entre as dez? 120

b) Se entre as sete empresas escolhidas devem figurar obrigatoriamente as empresas R e S, de quantas formas ele poderá escolher as empresas? 56

Resolução:

a) De 10 empresas, 7 serão escolhidas.

$$C_{10,7} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120; \text{ 120 maneiras.}$$

b) Se R e S devem figurar obrigatoriamente, sobrarão 8 empresas para escolher apenas 5, ou seja:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56; \text{ 56 formas.}$$

64 (Mackenzie-SP) Uma sala tem cinco lâmpadas com interruptores independentes. O número de formas de iluminá-la, com pelo menos duas lâmpadas acesas, é:

a) 26
b) 20
c) 28
d) 40
e) 46

Resolução:

Podemos ter duas, três, quatro ou cinco lâmpadas acesas.

$$C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{1! \cdot 4!} + \frac{5!}{0! \cdot 5!} = 10 + 10 + 5 + 1 =$$

$$= 26; \text{ 26 formas.}$$

65 (Fuvest-SP) Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo quatro itens distintos cada uma, para distribuir entre a população carente. Esses quatro itens devem ser escolhidos entre oito tipos de produtos de limpeza e cinco tipos de alimentos não perecíveis e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

a) 360
b) 420
c) 540
d) 600
e) 640

Resolução:

Total de produtos = 8 + 5 = 13

Retiramos do total os tipos de sacolas que só contêm 4 produtos de limpeza e 4 produtos de alimento.

$$C_{13,4} - C_{8,4} - C_{5,4} = \frac{13!}{9! \cdot 4!} - \frac{8!}{4! \cdot 4!} - \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 5 =$$

$$= 715 - 70 - 5 = 640$$

66 (Fuvest-SP) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

Resolução:

Seja x o número de homens.

x se cumprimentam com um aperto de mão na chegada e na despedida, então: $2C_{x,2}$

Entre um homem e uma mulher há $x \cdot (37 - x)$ cumprimentos.

$$2C_{x,2} + x \cdot (37 - x) = 720$$

$$\frac{2 \cdot x!}{2! \cdot (x - 2)!} + 37x - x^2 = 720$$

$$x^2 - x + 37x - x^2 - 720 = 0 \rightarrow 36x = 720 \rightarrow x = 20 \text{ (homens)}$$

$$\therefore 37 - 20 = 17 \text{ mulheres}$$

67 (FGV-SP)

a) Uma senha de banco é constituída de três letras escolhidas entre as 26 do alfabeto, seguidas de três algarismos, escolhidos entre os dez algarismos de 0 a 9. Quantas senhas podem ser formadas usando-se três vogais e três algarismos pares? $5^6 = 15\,625$; 15 625 senhas.

b) Um professor precisa elaborar uma prova de Matemática com cinco questões, sendo uma de trigonometria, duas de álgebra e duas de geometria. Ele dispõe de três questões de trigonometria, seis de álgebra e cinco de geometria. De quantas formas a prova pode ser elaborada, não se levando em conta a ordem das questões? 450

Resolução:

a) Temos 5 possibilidades para cada vogal e 5 possibilidades para cada algarismo par.

$$\underline{5}\quad \underline{5}\quad \underline{5}\quad \underline{5}\quad \underline{5}\quad \underline{5}$$

total $= 5^6 = 15\,625$; 15 625 senhas.

b) T = Trigonometria; A = Álgebra; G = Geometria

Há 3 questões *T*, 6 questões *A* e 5 questões *G*.

Para TAAGG, temos:

$$C_{3,1} \cdot C_{6,2} \cdot C_{5,2} = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 3 \cdot 15 \cdot 10 = 450$$

p. 16

68 (UEL-PR) Um professor entrega oito questões aos alunos para que, em uma prova, escolham cinco questões para resolver, sendo que duas dessas questões são obrigatórias. Ao analisar as provas, o professor percebeu que não havia provas com as mesmas cinco questões. Assim, é correto afirmar que o número máximo de alunos que entregou a prova é:

a) 6
b) 20
c) 56
d) 120
e) 336

Resolução:

Como 2 questões são obrigatórias, os alunos podem escolher 3 das 6 restantes. As possibilidades, então, são o número de alunos, pois não há provas com as mesmas 5 questões.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \rightarrow \text{número máximo de alunos que entregou a prova.}$$

69 (UEM-PR) Uma empresa conta com cinco motoristas e dez vendedores. As equipes de vendas são formadas por um motorista e três vendedores. Nessas condições, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

(01) A quantidade máxima possível de equipes de vendas pode ser obtida calculando $C_{15,4}$.

(02) A quantidade máxima possível de equipes de vendas pode ser obtida calculando $C_{5,1} \cdot C_{10,3}$.

(04) Com o motorista João e a vendedora Joana em uma mesma equipe, a quantidade máxima possível de equipes diferentes pode ser obtida efetuando $C_{9,2}$.

(08) Se o motorista João e a vendedora Joana estão em equipes diferentes, então a quantidade máxima possível de equipes que pode ser formada nessas condições é 564.

(16) Com as vendedoras Joana e Maria em uma mesma equipe, a quantidade máxima possível de equipes diferentes pode ser obtida efetuando $A_{8,1} \cdot A_{5,1}$. 30

Resolução:

(01) (Falsa); a quantidade máxima possível de equipes de vendas é dada por:

$$C_{5,1} \cdot C_{10,3} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 5 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 600; \text{ 600 equipes.}$$

(02) (Verdadeira); a quantidade máxima possível de equipes de vendas é dada por:
$C_{5,1} \cdot C_{10,3} = 600$; 600 equipes.

(04) (Verdadeira); com o motorista João e a vendedora Joana em uma mesma equipe, temos:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36; \text{ 36 equipes.}$$

(08) (Verdadeira); com o motorista João e a vendedora Joana em equipes diferentes, temos:
$600 - 36 = 564$; 564 equipes.

(16) (Verdadeira); fixando duas vendedoras, temos: $C_{8,1} \cdot C_{5,1} = A_{8,1} \cdot A_{5,1}$.

soma $= 02 + 04 + 08 + 16 = 30$

70 (Unifesp-SP) Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer essas escolhas?

a) 64
b) 126
c) 252
d) 640
e) 1 260

Resolução:

Para a escolha do síndico, temos 10 possibilidades, e para a escolha dos membros do conselho fiscal, temos 9 moradores para ocupar os 4 cargos.

$$10C_{9,4} = 10 \cdot \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 10 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1\,260$$

71 Calcule:

a) $\binom{5}{0}$ 1

b) $\binom{7}{7}$ 1

c) $\binom{13}{5}$ 1 287

d) $\binom{15}{14}$ 15

e) $\binom{20}{18}$ 190

Resolução:

a) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1$

b) $\binom{7}{7} = \frac{7!}{0! \cdot 7!} = 1$

c) $\binom{13}{5} = \frac{13!}{8! \cdot 5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,287$

d) $\binom{15}{14} = \frac{15!}{1! \cdot 14!} = 15$

e) $\binom{20}{18} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

72 Determine o valor de x na igualdade: $\binom{20}{6x} = \binom{20}{4x + 10}$. 1

Resolução:

$\binom{20}{6x} = \binom{20}{4x + 10}$

$6x = 4x + 10 \rightarrow x = 5$ (não convém) ou $6x + 4x + 10 = 20 \rightarrow 10x = 10 \rightarrow x = 1$

73 Calcule usando a relação de Stiffel.

a) $\binom{20}{13} + \binom{20}{14}$ 116 280

b) $\binom{18}{12} + \binom{18}{13}$ 27 132

Resolução:

Pela relação de Stiffel, temos: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

a) $\binom{20}{13} + \binom{20}{14} = \binom{21}{14} = \frac{21!}{7! \cdot 14!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 116\,280$

b) $\binom{18}{12} + \binom{18}{13} = \binom{19}{13} = \frac{19!}{6! \cdot 13!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 27\,132$

74 Calcule:

a) $\sum_{i=0}^{5} 2i$ 30

b) $\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i}$ $2^6 = 64$

Resolução:

a) $\sum_{i=0}^{5} 2i = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

b) $\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64$

75 Determine n sabendo que: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 4\,096$. 12

Resolução:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 4\,096$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$4\,096 = 2^{12} = 2^n$

Logo, $n = 12$.

76 Demonstre a validade da relação de Stiffel: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

Resolução:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Desenvolvendo os números binomiais, temos:

$$\frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)! \cdot (p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Desenvolvendo o primeiro membro, temos:

$$\frac{(n-1)!}{(n-p)! \cdot (p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-p-1)! \cdot p!}$$

Desenvolvendo os maiores números nos denominadores, temos:

$$\frac{(n-1)!}{(n-p) \cdot (n-p-1)! \cdot (p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-p-1)! \cdot p \cdot (p-1)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

O mmc é $(n-p)! \cdot p!$ ou $(n-p) \cdot (n-p-1)! \cdot p \cdot (p-1)!$; então:

$$\frac{p \cdot (n-1)! + (n-p) \cdot (n-1)!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

$$\frac{(n-1)! \cdot (p+n-p)}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

$$\frac{n \cdot (n-1)!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \quad \text{(igual ao 2º membro)}$$

77 A seqüência 1, 9, 36, 84, x, y, ... é uma linha do triângulo de Pascal. Determine x e y. $x = 126$ e $y = 126$

Resolução:

1, 9, 36, 84, x, y, ...

Observe que: $1 = \binom{9}{0}$, $9 = \binom{9}{1}$, $36 = \binom{9}{2}$, $84 = \binom{9}{3}$, $x = \binom{9}{4}$, $y = \binom{9}{5}$

$$x = \binom{9}{4} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$$

$$y = \binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126$$

78 Resolva a equação: $\binom{10}{x} + \binom{10}{x+1} = \binom{11}{5}$. $S = \{4, 5\}$

Resolução:

$\binom{10}{x} + \binom{10}{x+1} = \binom{11}{5}$

Aplicando a relação de Stiffel no primeiro membro, temos:

$\binom{11}{x+1} = \binom{11}{5} \rightarrow x + 1 = 5 \rightarrow x = 4$ ou $x + 1 + 5 = 11 \rightarrow x = 5$

$S = \{4, 5\}$

79 (FGV-SP) Se $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2 - n}{2}$, então *n* é igual a:

a) 4
b) 6
c) 9
d) 5
e) 8

Resolução:

$\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2 - n}{2}$

1º-membro: $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} \rightarrow$ pela relação de Stiffel, $\binom{n}{6}$

2º-membro: $\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \binom{n}{2}$

Igualando os dois membros, temos: $\binom{n}{6} = \binom{n}{2} \rightarrow 6 + 2 = n \rightarrow n = 8$

80 (UFAM) A soma $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 32\,768$ apresentada é a soma dos números binomiais da linha do "numerador" $n \in \mathbb{N}$ do triângulo de Pascal. Então *n* é:

a) 15
b) 10
c) 11
d) 12
e) 14

Resolução:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 32\,768$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

$32\,768 = 2^{15} = 2^n$

Logo, $n = 15$.

81 Calcule o valor da expressão: $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5} + \binom{10}{6}$. $\binom{11}{6} = 462$

Resolução:

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5} + \binom{10}{6}$$

Pela relação de Stiffel, temos:

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$$

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$$

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$$

$$\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{6} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

$$\therefore \binom{11}{6} = 462$$

p. 22

82 Desenvolva o binômio $(2x + 3y)^3$. $8x^3 + 36yx^2 + 54y^2x + 27y^3$

Resolução:

Seja a fórmula do binômio:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

Então, temos:

$$(2x + 3y)^3 = \binom{3}{0} (3y)^0 (2x)^3 + \binom{3}{1} (3y)^1 (2x)^2 + \binom{3}{2} (3y)^2 (2x)^1 + \ldots + \binom{3}{3} (3y)^3 (2x)^0$$

$$(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36yx^2 + 54y^2x + 27y^3$$

83 Efetue o desenvolvimento de $(x - 3)^4$. $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$

Resolução:

$$(x - 3)^4 = \binom{4}{0} x^4 (-3)^0 + \binom{4}{1} x^3 (-3) + \binom{4}{2} x^2 (-3)^2 + \binom{4}{3} x (-3)^3 + \binom{4}{4} (-3)^4$$

$$(x - 3)^4 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$$

84 Utilizando a fórmula do binômio de Newton, calcule: $\left(4 + \sqrt{2}\right)^4$. $452 + 288\sqrt{2}$

Resolução:

$$\left(4 + \sqrt{2}\right)^4 = \binom{4}{0}4^4(\sqrt{2})^0 + \binom{4}{1}4^3\sqrt{2} + \binom{4}{2}4^2(\sqrt{2})^2 + \binom{4}{3}4(\sqrt{2})^3 + \binom{4}{4}(\sqrt{2})^4$$

$$\left(4 + \sqrt{2}\right)^4 = 256 + 256\sqrt{2} + 192 + 32\sqrt{2} + 4 = 452 + 288\sqrt{2}$$

85 Se $a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 = 4\,096$, determine $(a + b)^3$. 64

Resolução:

$$a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 = 4\,096$$

$(a + b)^6 = 2^{12}$

$(a + b)^3 = 2^6 = 64$

86 Calcule o valor numérico da seqüência:

$p(x, y) = 1x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - 1y^5$, para $x = \dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7}}$ e $y = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7}}$. 32

Resolução:

$p(x, y) = 1x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - 1y^5 = (x - y)^5$

Se $x = \dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7}}$ e $y = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7}}$, então:

$$\left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7}} - \frac{3\sqrt{3} - \sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7}}\right)^5 = \left(\frac{2\sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7}}\right)^5 = 2^5 = 32$$

87 Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(5x + y)^3$? 216

Resolução:

Para acharmos a soma dos coeficientes, basta determinarmos os valores para $x = 1$ e $y = 1$; então:

$(5x + y)^3 = (5 + 1)^3 = 6^3 = 216$

88 (FGV-SP) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + y)^5$ é igual a:

a) 81
b) 128
c) 243
d) 512
e) 729

Resolução:

Para $x = 1$ e $y = 1$, temos:

$(2x + y)^5 = (2 + 1)^5 = 3^5 = 243$

89 (ITA-SP) Sabendo que 1 024 é a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos tomados dois a dois é:

a) 80
b) 90
c) 70
d) 100
e) 60

Resolução:

Para $x = 1$ e $y = 1$, temos:

$(1 + 1)^m = 1\,024 \rightarrow 2^m = 2^{10} \rightarrow m = 10$

$A_{10,\,2} = \dfrac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$; 90 arranjos.

90 (FGV-SP) x^6y^9 é a parte literal de um dos termos do desenvolvimento de $(x + y)^n$.

O termo cuja razão entre o seu coeficiente e o coeficiente do termo seguinte é igual a $\dfrac{7}{9}$ é:

a) o 8º termo
b) o 7º termo
c) o 6º termo
d) o 5º termo
e) o 4º termo

Resolução:

O termo geral de um binômio é dado por: $T_{p+1} = \binom{n}{p} p^p x^{n-p}$.

Como um dos termos possui parte literal x^6y^9, temos: $\begin{cases} n - \cancel{p} = 6 \\ \cancel{p} = 9 \end{cases}$

$n = 15$

Então: $T_{p+1} = \binom{15}{p} x^{15-p} y^p$.

Do enunciado, temos: $\dfrac{\binom{15}{p}}{\binom{15}{p+1}} = \dfrac{7}{9} \rightarrow \dfrac{\dfrac{15!}{(15-p)! \cdot p!}}{\dfrac{15!}{(15-p-1)! \cdot (p+1)!}} = \dfrac{7}{9} \rightarrow \dfrac{p+1}{15-p} = \dfrac{7}{9} \rightarrow$

$\rightarrow 9p + 9 = 105 - 7p \rightarrow 16p = 96 \rightarrow p = 6$

Assim, o termo é o 7º.

91 (ITA-SP) Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$. 414

Resolução:

$(1 + x + x^2)^9 = [(1 + x) + x^2]^9$

$T_{p+1} = \binom{9}{p}(1 + x)^{9-p}(x^2)^p \rightarrow$ desenvolvendo $(1 + x)^{9-p}$, temos:

$T_{q+1} = \binom{9-p}{q}1^{9-p-q}x^q = \binom{9-p}{q}x^q \rightarrow$ substituindo em T_{p+1}, temos:

$T_{p+1} = \binom{9}{p} \cdot \binom{9-p}{q}x^{2p}x^q$

Como o coeficiente desejado é o de x^4, então:

$$x^{2p+q} = x^4 \rightarrow 2p + q = 4 \begin{cases} \text{se } q = 0 \rightarrow p = 2 \\ \text{se } q = 2 \rightarrow p = 1 \\ \text{se } q = 4 \rightarrow p = 0 \end{cases}$$

Então: $T_{p+1} = \binom{9}{p} \cdot \binom{9-p}{q}x^{2p}x^q = \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{0}x^4 + \binom{9}{1} \cdot \binom{8}{2}x^4 + \binom{9}{0} \cdot \binom{9}{4}x^4$

$T_{p+1} = \binom{9}{p} \cdot \binom{9-p}{q}x^{2p}x^q = 36x^4 + 252x^4 + 126x^4 = 414x^4$

Portanto, o coeficiente de x^4 é 414.

92 (Fatec-SP) Para que o termo médio do desenvolvimento do binômio $(\text{sen } x + \cos x)^6$, segundo as potências decrescentes de sen x, seja igual a $\frac{5}{2}$, o arco x deve ter sua extremidade pertencente ao:

a) 1º ou 2º quadrantes
b) 1º ou 3º quadrantes
c) 2º ou 3º quadrantes
d) eixo das abscissas
e) eixo das ordenadas

Resolução:

O binômio possui 7 termos, e o termo do meio é o T_4.

$T_4 = \binom{6}{3}\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{6!}{3! \cdot 3!}\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x = 20\,\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x$

Então: $20\,\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{5}{2} \rightarrow \text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{5}{40}$

Para que $\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x$ seja positivo, é necessário que x pertença ao 1º ou 3º quadrantes, em que seno e cosseno possuem o mesmo sinal.

93 (ITA-SP) O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\dfrac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\dfrac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é:

a) $729\sqrt[3]{45}$

b) $972\sqrt[3]{15}$

c) $891\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

d) $376\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$

e) $165\sqrt[3]{75}$

Resolução:

$$\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12} = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{6}}\right]^{12} \rightarrow \text{o termo geral é:}$$

$$T_{p+1} = \binom{12}{p}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{12-p}{2}} x^{\frac{-12+p}{3}} (-1)^p \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{p}{3}} x^{\frac{p}{6}}$$

$$T_{p+1} = \binom{12}{p}(-1)^p \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{36-5p}{6}} x^{\frac{p-8}{2}}$$

Para acharmos o termo independente de x, temos: $\dfrac{p-8}{2} = 0 \rightarrow p = 8$.
Substituindo p, temos:

$$T_9 = \binom{12}{8}(-1)^8 \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = 495 \cdot \frac{5^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = 165 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 165\sqrt[3]{75}$$