Matemática

M13 – Determinantes

p. 20

1 (Unifor-CE) Sejam os determinantes $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. Nestas condições, é verdade que $AB - C^2$ é igual a:

a) −12
b) −11
c) −10
d) 1
e) 8

Resolução:

$A = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \therefore A = -3$

$B = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \therefore B = 2$

$C = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \therefore C = 2$

$AB - C^2 = (-3) \cdot 2 - 2^2 \therefore AB - C^2 = -10$

2 (UFRJ) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i < j \\ 3i + j, \text{ se } i \geq j \end{cases}$, encontre o determinante da matriz A^t. 18

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 3 \cdot 1 + 1 = 4; a_{12} = 2$

$a_{21} = 3 \cdot 2 + 1 = 7; a_{22} = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det A^t = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = 4 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = 18$$

3 (Vunesp-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcular o determinante da matriz $A \cdot B$. 14

Resolução:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 9 & 2 + 3 \\ -2 + 12 & 4 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det (A \cdot B) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 50 = 14$$

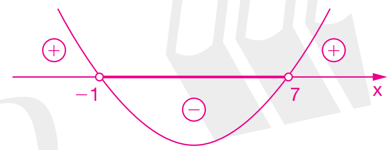
4 (Faap-SP) Resolva a inequação $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$

Resolução:

$2x^2 - 12x < 14 \Rightarrow 2x^2 - 12x - 14 < 0$

$f(x) = 2x^2 - 12x - 14$

$2x^2 - 12x - 14 = 0 \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 7 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$

5 (PUC-RS) A equação $\begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$ é equivalente a:

a) $\text{sen}(2x) = 1$
b) $\cos(2x) = 1$
c) $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
d) $\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$
e) $\cos^2(x) = 1$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

$\cos^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \cos(2x) = 1$

6 (Fuvest-SP) O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & y \end{bmatrix}$ pela sua transposta é a identidade. Determine *x* e *y*, sabendo que $\det A > 0$. $x = -\frac{4}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & x \\ \frac{4}{5} & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{25} + \frac{16}{25} & \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$3x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{25} \begin{cases} x' = -\frac{4}{5} \\ x'' = \frac{4}{5} \end{cases}$

$x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}$

$x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$

Como $\det A > 0$, temos $x = -\frac{4}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$.

7 (Fatec-SP) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Resolver a equação $\det(A - x \cdot B) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$. $\{0, 5\}$

Resolução:

$$A - xB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - x & 2 \\ 2 & 1 - x \end{bmatrix}$$

$$\det(A - xB) = 0 \therefore (4 - x)(1 - x) - 4 = 0$$

$$x^2 - 5x = 0 \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 5 \end{cases}$$

$$S = \{0, 5\}$$

8 (UFAL) Seja *D* o determinante da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} x + 1, \text{ se } i < j \\ 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}$

O menor número real *x*, de modo que $D = 0$, é:

a) -4

b) -3

c) -2

d) -1

e) 0

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x + 1 & x + 1 \\ 1 & 0 & x + 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & x + 1 & x + 1 \\ 1 & 0 & x + 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \therefore \text{ o menor } x \text{ é } -2.$$

9 (UFPR) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e sendo $N = 50 + \det(A \cdot B)$, encontre o valor de *N*. 50

Resolução:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \cdot B = 8 - 24 + 30 + 20 - 18 - 16 = 0$$

$$N = 50 + 0 = 50$$

10 (UFOP-MG) Determinar o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13 & 3^x & -3^{-x} \\ 27 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 10$. $\{0, 2\}$

Resolução:

$3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10 \Rightarrow 3^x + \frac{9}{3^x} = 10 \Rightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$y^2 - 10y + 9 = 0 \begin{cases} y' = 9 \\ y'' = 1 \end{cases}$

$y' = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x' = 2$

$y'' = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x'' = 0$

$S = \{0, 2\}$

11 (EEM-SP) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 1 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$2 \cos^2 x - 3 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 3 \operatorname{sen} x = 0$

$-2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2 = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x' = -2 \text{ (não tem solução)} \\ \operatorname{sen} x'' = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

12 (Fatec-SP) Os valores reais de *x* que satisfazem a equação $\begin{vmatrix} 2^x & 4^x & 8^x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ são números:

a) pares
b) irracionais
c) inteiros consecutivos
d) inteiros negativos
e) racionais não-inteiros

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 2^x & 4^x & 8^x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^x - 4^x + 8^x - 2 \cdot 4^x = 0$$

$$2 \cdot 2^x - 3 \cdot (2^x)^2 + (2^x)^3 = 0$$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$y^3 - 3y^2 + 2y = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \Rightarrow 2^x = 0 \ (\nexists\ x \in \mathbb{R}) \\ y_2 = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y_3 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Portanto, os valores de *x* são inteiros consecutivos.

13 (PUC-PR) O valor de x no determinante: $\begin{vmatrix} x & 2 & \log_3 9 \\ \log_9 \sqrt{3} & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & \log_3 9 \\ \log_9 \sqrt{3} & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow 13x - \frac{11}{2} - \frac{31}{2} = 5$$

$$13x = 26 \Rightarrow x = 2$$

14 (PUC-SP) Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} \cos\frac{7\pi}{i}, \text{ se } i = j \\ \text{sen}\frac{7\pi}{j}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

O determinante da matriz A é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) -1
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{7\pi}{1} & \text{sen}\frac{7\pi}{2} & \text{sen}\frac{7\pi}{3} \\ \text{sen}\frac{7\pi}{1} & \cos\frac{7\pi}{2} & \text{sen}\frac{7\pi}{3} \\ \text{sen}\frac{7\pi}{1} & \text{sen}\frac{7\pi}{2} & \cos\frac{7\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-1)^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

15 (UFSC) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcule det A. 70

Resolução:

Calculando pelos elementos da 1ª linha:

$$\det A = (-1) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 70$$

16 Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ x & x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. {1}

Resolução:

Calculando pelos elementos da 3ª coluna: $5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(-5) \cdot (2x + x^2 + 1 - 2 - x^2 - x) = 0 \Rightarrow -5 \cdot (x - 1) = 0$

$x = 1$ $\qquad$ $S = \{1\}$

17 (FGV-SP) Seja a raiz da equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$; então, o valor x^2 é:

a) 16
b) 4
c) 0
d) 1
e) 64

Resolução:

Usando o teorema de Laplace, escolhendo a 1ª linha, temos:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (2x^2) = 16 \Rightarrow x^3 = 8 \therefore x = 2 \text{ e } x^2 = 4$$

18 (UFC) Dada a matriz $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, calcular o determinante de P^2. 64

Resolução:
$\det P = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$
Pelo teorema de Binet: $\det P^2 = (\det P)^2 = 8^2 = 64$

19 (MACK-SP) O valor de um determinante é 42. Se dividirmos a primeira linha por 7 e multiplicarmos a primeira coluna por 3, qual será o valor do novo determinante? 18

Resolução:
Dividindo uma linha da matriz por 7, o determinante fica dividido por 7. Então, $42 : 7 = 6$.
Multiplicando uma coluna da matriz por 3, o determinante fica multiplicado por 3; portanto, $\det M = 6 \cdot 3 = 18$.

20 (FEI-SP) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e uma matriz *B*, também quadrada. Sabendo que $\det (A \cdot B) = 8$, calcular o valor do determinante da matriz *B*. -8

Resolução:
$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
$\det A = -3 + 2 = -1 \therefore 8 = -1 \cdot \det B \Rightarrow \det B = -8$

21 (Umesp-SP) Sejam *C* e *D* matrizes quadradas de ordem 3 tais que $C = 3D$. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) $\det C = 3 \det D$
b) $\det C = 6 \det D$
c) $\det C = 9 \det D$
d) $\det C = 18 \det D$
e) $\det C = 27 \det D$

Resolução:
Como *C* e *D* são matrizes quadradas de ordem 3, preciso multiplicar as três linhas de *D* por 3 para obter a matriz *C*. Logo, $\det C = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \det D \therefore \det C = 27 \det D$.

22 (UFPA) O valor de um determinante é 12. Se dividirmos a 1ª linha por 6 e multiplicarmos a 3ª coluna por 4, o novo determinante valerá:

a) 8
b) 18
c) 24
d) 36
e) 48

Resolução:
$$\det B = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \det A \Rightarrow \det B = \frac{4}{6} \cdot 12$$
Logo, $\det B = 8$.

23 (Esam-RN) Assinale a proposição verdadeira:

a) Se M e N são matrizes quadradas de mesma ordem, então $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N$.

b) Se A é uma matriz quadrada de 2ª ordem e $k \in \mathbb{R}^*$, então $\det(kA) = k \cdot \det A$.

c) Se $\det A = 0$, então a matriz A é nula.

d) Se $\det A = 0$, então qualquer que seja a matriz X, de mesma ordem de A, tem-se $AX = 0$.

e) O determinante da matriz soma de duas matrizes de mesma ordem é igual à soma dos determinantes dessas matrizes.

Resolução:

a) $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N$

b) Se a matriz é de ordem 2, $\det(kA) = k^2 \det A$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, embora a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ não seja nula.

d) Se $A = X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det A = 0$ e $A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$, $\det B = 0$ e $\det(A + B) = 2$

24 (UFU-MG) Se A e B são matrizes inversíveis de mesma ordem, então $\dfrac{\det(A^{-1}BA)}{\det B}$ é igual a:

a) 1 b) -1 c) $\det A + \det B$ d) $\det(AB)$

Resolução:

$A \in M_n$; $B \in M_n$

$$\frac{\det(A^{-1} \cdot B \cdot A)}{\det B} = \frac{\det A^{-1} \cdot \cancel{\det B} \cdot \det A}{\cancel{\det B}} = \det A^{-1} \cdot \det A = \det(A^{-1} \cdot A) = \det I_n = 1$$

25 (PUC-RS) Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n e $\det(A) = a$, $\det(B) = b$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $\det(4A \cdot B^{-1})$ é igual a:

a) $\dfrac{4^n \cdot a}{b}$ c) $\dfrac{4 \cdot n^2 \cdot a}{b}$ e) $\dfrac{4 \cdot a}{b}$

b) $\dfrac{4 \cdot n \cdot a}{b}$ d) $4 \cdot a \cdot b$

Resolução:

$A \in M_n$; $B \in M_n$

$$\det(4A \cdot B^{-1}) = \det(4A) \cdot \det(B^{-1}) = 4^n \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det B} = \frac{4^n \cdot a}{b}$$

26 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A^t + \det A^{-1}$ $\frac{257}{16}$

b) $\det (A^t \cdot A^{-1})$ 1

Resolução:

a) $\det A = -20 + 36 = 16 \Rightarrow \det A^t = \det A = 16 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A^t + \det A^{-1} = 16 + \frac{1}{16} = \frac{257}{16}$

b) $\det (A^t \cdot A^{-1}) = \det A^t \cdot \det A^{-1} = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1$

27 (ITA-SP) Sendo *A*, *B*, *C* matrizes reais $n \times n$, considere as seguintes afirmações:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $AB = BA$
3. $A + B = B + A$
4. $\det (AB) = \det (A) \cdot \det (B)$
5. $\det (A + B) = \det (A) + \det (B)$

Então, podemos afirmar que:

a) 1 e 2 são corretas

b) 2 e 3 são corretas

c) 3 e 4 são corretas

d) 4 e 5 são corretas

e) 5 e 1 são corretas

Resolução:

A afirmação 1 está correta: propriedade associativa da multiplicação de matrizes.

A afirmação 2 é incorreta: a comutatividade da multiplicação de matrizes nem sempre é válida.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Temos: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Logo, $AB \neq BA$. Esse fato nos leva a concluir que as alternativas *a* e *b* são falsas.

As afirmações 3 e 4 estão corretas: propriedade comutativa da adição e teorema de Binet, respectivamente.

A afirmação 5 nem sempre é válida.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Temos: $\det (A) = 2$, $\det (B) = -6$.

Mas $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det (A + B) = 6$

Logo, $\det (A + B) \neq \det (A) + \det (B)$ e as alternativas *d* e *e* são falsas.

28 (UFLA-MG) Os valores de x para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}$ admite inversa são:

a) $x = 0$ e $x = 1$
b) $x \neq 0$
c) $x > 1$
d) $x \neq 0$ e $x \neq 1$
e) $x \neq 0$ e $x \neq \frac{1}{2}$

Resolução:
Para a matriz A admitir inversa, temos necessariamente $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 2x & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = 3x - 6x^2$$

$$3x - 6x^2 \neq 0 \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \therefore\ x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{2}$$

29 (MACK-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se $M \cdot A - 2B = 0$, $\det M^{-1}$ vale:

a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) 4
d) $\frac{1}{4}$
e) 1

Resolução:

$$M \cdot A = 2B$$

$$\det (M \cdot A) = \det (2B)$$

$$\det M \cdot \det A = \det (2B) \Rightarrow \det M = \frac{\det (2B)}{\det A}$$

$$\det (2B) = \begin{vmatrix} 16 & 14 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\det M = \frac{4}{2} = 2$$

$$\det M^{-1} = \frac{1}{\det M} = \frac{1}{2}$$

30 (FURRN) Sejam as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Então, $\det (A \cdot B)$ é igual a:

a) -36
b) -6
c) 6
d) 12
e) 36

Resolução:
$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
$\det A = -6$ e $\det B = -6 \therefore \det (A \cdot B) = 36$

31 Ache o maior valor real de *x*, tal que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$ 8

Resolução:

Calculando pelos elementos da 1ª linha:

$$2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 8 \\ 0 & 8 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x^3 - 64x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 64) = 0, x > 0$$

$x' = 0$ (não serve)

$x'' = -8$ (não serve)

$x''' = 8$

Logo, o maior valor real de *x* é 8.

32 Determine os valores de *a* para os quais $\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0.$ $\left\{a \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}\right\}$

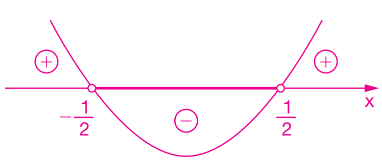
Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & -a^2 & a \\ 0 & -a^2 & 1 - a^2 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$(1 - a^2)^2 - a^4 - a^4 - a^2(1 - a^2) - a^2(1 - a^2) - a^4 > 0$$

$$4a^2 - 1 < 0$$

$$f(a) = 4a^2 - 1 \Rightarrow 4a^2 - 1 = 0 \begin{cases} a' = -\frac{1}{2} \\ a'' = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\left\{a \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}\right\}$$

33 (Fuvest-SP) Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 1

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

34 (MACK-SP) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = 3i - j$, o valor do determinante da matriz A^2 é:

a) 0
b) 1
c) 4
d) 9
e) 16

Resolução:

$A_{2 \times 2}$, $a_{ij} = 3i - j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 & 3 \cdot 1 - 2 \\ 3 \cdot 2 - 1 & 3 \cdot 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 30 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\det A^2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 30 & 21 \end{vmatrix} = 189 - 180 = 9$$

35 (Fatec-SP) O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal. Se os números inteiros x e y são tais que a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix}$ tem traço igual a 4 e determinante igual a -19, então o produto xy é igual a:

a) -4
b) -3
c) -1
d) 1
e) 3

Resolução:

Traço: $2 + x + y = 4 \Rightarrow x + y = 2$ (I)

Determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix} = -19 \Rightarrow 2xy + 4 - 8 - 3y = -19 \Rightarrow 2xy - 3y = -15$ (II)

De (I) e (II): $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2xy - 3y = -15 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \text{ e } x = -1$

Portanto, o produto $x \cdot y = (-1) \cdot 3 = -3$.

36 (FGV-SP) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & a & m \\ 4 & b & n \\ 4 & c & p \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} m & a & 3 \\ n & b & 3 \\ p & c & 3 \end{bmatrix}$$

Se o determinante da matriz A é igual a 2, então o determinante da matriz B é igual a:

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $-\sqrt{3}$
d) $-\frac{3}{2}$
e) $-\frac{2}{3}$

Resolução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & a & m \\ 4 & b & n \\ 4 & c & p \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} m & a & 1 \\ n & b & 1 \\ p & c & 1 \end{vmatrix}$$

Como o determinante de A é igual a 2, temos:

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} m & a & 1 \\ n & b & 1 \\ p & c & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & a & 1 \\ n & b & 1 \\ p & c & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Calculando o determinante de B:

$$\det B = \begin{vmatrix} m & a & 3 \\ n & b & 3 \\ p & c & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} m & a & 1 \\ n & b & 1 \\ p & c & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

37 (FGV-SP) É dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Se $B = A^t - \frac{3}{2}A$, em que A^t é a matriz transposta de A, e $B = \begin{bmatrix} \frac{y}{x} & -10 & 5x + 7y \\ \frac{15}{2} & \frac{x}{y} & \frac{7}{2} \\ 2 & \frac{3y}{x} & 3x + 7y \end{bmatrix}$, determine o número real w, tal que $w = |x \cdot y|$. 2

b) Considere a matriz C, tal que $C = -\frac{3}{2}A^t$. $\frac{-27}{8}$

Encontre o valor do número real p, sendo p o determinante da matriz $C \cdot A^{-1}$, isto é, $p = \det(C \cdot A^{-1})$ e A^{-1} a matriz inversa da matriz A.

Resolução:

a) Sendo $B = A^t - \frac{3}{2}A$, temos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 9 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 6 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -10 & -3 \\ \frac{15}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Como $B = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & -10 & 5x + 7y \\ \frac{15}{2} & \frac{x}{y} & \frac{7}{2} \\ 2 & \frac{3y}{x} & 3x + 7y \end{pmatrix}$, podemos afirmar que:

$$\begin{cases} 5x + 7y = -3 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -2, y = 1$$

Portanto: $w = |x \cdot y| = |(-2) \cdot 1| = |-2| = 2$

b) Sabendo que $\det A = \det A^t$, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, $\det(C \cdot A^{-1}) = \det C \cdot \det A^{-1}$ e ainda que

$\det C = \det\left(\frac{-3}{2} \cdot A^t\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \det A^t$, pois C é quadrada de ordem 3, temos:

$$p = \det(C \cdot A^{-1}) = \det C \cdot \det A^{-1} = \left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \det A^t \cdot \det A^{-1} = \frac{-27}{8} \cdot \cancel{\det A} \cdot \frac{1}{\cancel{\det A}} = \frac{-27}{8}$$

38 (MACK-SP) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, considere a seqüência formada por todas as potências inteiras e positivas de A, isto é, $A, A^2, A^3, \ldots A^n, \ldots$. Somando-se todas as matrizes dessa seqüência, obtemos uma matriz, cujo determinante é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{2}$

Resolução:

Sendo $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, temos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{81} \end{pmatrix},$$ e assim por diante. Assim, concluímos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

A soma dessa seqüência de matrizes será:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

O determinante dessa matriz é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

39 (PUC-SP) Indica-se por det A o determinante de uma matriz quadrada *A*. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, em que $a_{ij} = \begin{cases} \text{sen}\left[\frac{\pi}{4} \cdot (i + j)\right], \text{ se } i = j \\ \text{sen}\,[x \cdot (i - j)], \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

Quantos números reais *x*, tais que $-2\pi < x < 2\pi$, satisfazem a sentença $\det A = \frac{1}{4}$?

a) 10
b) 8
c) 6
d) 4
e) 2

Resolução:

Sendo $A = (a_{ij})$ de ordem 2, com $a_{ij} = \begin{cases} \text{sen}\left[\frac{\pi}{4} \cdot (i + j)\right], \text{ se } i = j \\ \text{sen}\,[x \cdot (i - j)], \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

Então: $a_{11} = \text{sen}\left[\frac{\pi}{4} \cdot (1 + 1)\right] = \text{sen}\,\frac{2\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$

$a_{12} = \text{sen}\,[x \cdot (1 - 2)] = \text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,x$

$a_{21} = \text{sen}\,[x \cdot (2 - 1)] = \text{sen}\,x$

$a_{22} = \text{sen}\left[\frac{\pi}{4} \cdot (2 + 2)\right] = \text{sen}\,\frac{4\pi}{4} = \text{sen}\,\pi = 0$

Como $\det A = \frac{1}{4}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\text{sen}\,x \\ \text{sen}\,x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \text{sen}^2\,x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \text{sen}\,x = \pm\frac{1}{2}$$

Logo, se $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$, temos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{-7\pi}{6}$ e $\frac{-11\pi}{6}$ como valores possíveis para *x*; se $\text{sen}\,x = \frac{-1}{2}$, temos $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{-\pi}{6}$ e $\frac{-5\pi}{6}$ como valores possíveis para *x*, ou seja, no intervalo $-2\pi < x < 2\pi$, existem 8 valores para *x*.

40 (Vunesp-SP) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$.

O determinante de *A* é um polinômio p(x).

a) Verifique se 2 é uma raiz de p(x). 2 é raiz de p(x).

b) Determine todas as raízes de p(x). -1, 1 e 2

Resolução:

Se $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$, o determinante de *A* será:

$\det A = p(x) = x^3 + 2 - x + 0 - 2x^2 - 0 - 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

a) $p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$

Portanto, 2 é raiz de p(x).

b) Fatorando o polinômio p(x), teremos:

$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - 1(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1)$

Os valores que anulam p(x) são tais que:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

As raízes de p(x) são -1, 1 e 2.

41 (ITA-SP) Se $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 0

b) 4

c) 8

d) 12

e) 16

Resolução:

$$\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -2 \cdot 3 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 \right) = -2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 12$$