# Resolução das atividades complementares

# Matemática

## M4 – Sistemas lineares

p. 38

**1** Verifique se (3, −4, 5) é solução da equação $5x + y + z = 4$. Não é solução.

*Resolução:*

$5x + y + z = 4 \rightarrow x = 3; y = -4; z = 5$

$5 \cdot 3 + (-4) + 5 = 16 \neq 0$

**2** Dê duas soluções da equação linear $5x - 3y = 7$. Respostas possíveis: $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{5}, 0\right)$.

*Resolução:*

$5x - 3y = 7$

Se $x = 0 \rightarrow y = -\frac{7}{3}$

Se $y = 0 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

$S = \left\{\left(0, -\frac{7}{3}\right)\right\}$ ou $S = \left\{\left(\frac{7}{5}, 0\right)\right\}$

**3** Determine o valor de *k* para que (−1, 0, 1) seja solução da equação $kx - y - 3z = -5$. $k = 2$

*Resolução:*

$kx - y - 3z = -5$

$k(-1) - 0 - 3 \cdot 1 = -5 \rightarrow -k = 3 - 5 \rightarrow k = 2$

**4** Determine uma solução da equação $2x - 3y = 0$, diferente de (0, 0). $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

*Resolução:*

$2x - 3y = 0$

Se $x = 1 \rightarrow y = \frac{2}{3}$

$\therefore \left(1, \frac{2}{3}\right)$

**5** Escreva duas equações equivalentes à equação $2x - 4y + 6z + w = 8$.

*Resolução:*

$4x - 8y + 12z + 2w = 16$

$2x - 4y + 6z + w - 7 = 1$

**6** Qual o valor de *m* para que a equação $6x + 7y - 2z + w = m^2 - 5m + 6$ seja uma equação homogênea? $m = 2$ ou $m = 3$

*Resolução:*

$6x + 7y - 2z + w = m^2 - 5m + 6$

$m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow (m - 2) \cdot (m - 3) = 0 \rightarrow m = 2$ ou $m = 3$

p. 40

**7** Dado o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 8 \\ 4x + 5y + 2z = 20 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

a) (0, 0, 0) é solução do sistema? não

b) (1, 2, 3) é solução do sistema? sim

*Resolução:*

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 8 \\ 4x + 5y + 2z = 20 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

a) (0, 0, 0)

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 0 \neq 8$; portanto, (0, 0, 0) não é solução do sistema.

b) (1, 2, 3)

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 = 8 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 20 \\ 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$ (1, 2, 3) satisfaz as equações; portanto, é solução do sistema.

**8** Determine os valores de *m* e *p* para que a seqüência (4, 2) seja solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x - my = 2 \\ px + 2y = 16 \end{cases}$$ $m = 3$ e $p = 3$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2x - my = 2 \\ px + 2y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 4 - m \cdot 2 = 2 \\ p \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16 \end{cases} \rightarrow m = 3 \text{ e } p = 3$$

**9** Determine $m$ e $n$ para que os sistemas abaixo sejam equivalentes:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} mx + ny = 13 \\ nx - my = 9 \end{cases}$$

$m = 3$ e $n = 4$

*Resolução:*

Dois sistemas são equivalentes quando possuem a mesma solução.

$$\begin{cases} x - \cancel{y} = 2 \\ x + \cancel{y} = 4 \end{cases}$$

$$2x = 6 \rightarrow x = 3$$

Substituindo $x$, temos:

$3 - y = 2 \rightarrow y = 1$

Substituindo $x$ e $y$ no segundo sistema, temos:

$$\begin{cases} 3m + n = 13 \\ -m + 3n = 9 \quad \times (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m + n = 13 \\ -3m + 9n = 27 \end{cases}$$

$$10n = 40 \rightarrow n = 4$$

Substituindo $n$, temos:

$3m + 4 = 13 \rightarrow 3m = 9 \rightarrow m = 3$

**10** Para que valores de $m$, $n$ e $p$ o sistema $\begin{cases} 2x - 4y + 5z = m - 2 \\ 3x + y - 3z = n + 4 \\ x - 2y + z = p^2 - 4 \end{cases}$ é homogêneo?

$m = 2$, $n = -4$ e $p = 2$ ou $p = -2$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = m - 2 \\ 3x + y - 3z = n + 4 \\ x - 2y + z = p^2 - 4 \end{cases}$$

O sistema será homogêneo se os termos independentes forem iguais a zero, então:

$m - 2 = 0 \rightarrow m = 2$

$n + 4 = 0 \rightarrow n = -4$

$p^2 - 4 = 0 \rightarrow p = 2$ ou $p = -2$

**11** Verifique se os sistemas abaixo são equivalentes:

$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ 5x - 7y = 46 \end{cases}$ sim

*Resolução:*

(I)

$$\begin{cases} x + \cancel{y} = 2 \\ x - \cancel{y} = 8 \end{cases}$$

$$2x = 10 \rightarrow x = 5$$

Substituindo $x$, temos:

$5 + y = 2 \rightarrow y = -3$

$S = \{(5, -3)\}$

(II)

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 & \times (5) \\ 5x - 7y = 46 & \times (-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15x + 30y = -15 \\ -15x + 21y = -138 \end{cases}$$

$$51y = -153 \rightarrow y = -3$$

Substituindo $y$, temos:

$3x + 6 \cdot (-3) = -3 \rightarrow 3x = -3 + 18 \rightarrow x = \frac{15}{3} \rightarrow x = 5$

$S = \{(5, -3)\}$

Os dois sistemas são equivalentes, pois possuem mesma solução.

**12** (Vunesp-SP) Dados os sistemas lineares, $S_1$: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ e $S_2$: $\begin{cases} C_1x + C_2y = 1 \\ C_1x - C_2y = 2 \end{cases}$ e admitindo que $S_1$ e $S_2$ são equivalentes:

a) defina o que são sistemas lineares equivalentes; Dois sistemas lineares são equivalentes se apresentam a mesma solução.

b) encontre os valores de $C_1$ e $C_2$. $C_1 = \frac{3}{2}$ e $C_2 = -\frac{1}{2}$

*Resolução:*

$S_1 \equiv S_2$

a) Sistemas lineares equivalentes são sistemas que apresentam a mesma solução.

b) Resolvendo $S_1$, temos:

$$\begin{cases} x - \cancel{y} = 0 \\ x + \cancel{y} = 2 \end{cases}$$

$$2x = 2 \rightarrow x = 1$$

Substituindo $x$, temos:

$1 - y = 0 \rightarrow y = 1$

Substituindo $x$ e $y$ em $S_2$, temos:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = 1 \\ C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + \cancel{C_2} = 1 \\ C_1 - \cancel{C_2} = 2 \end{cases}$$

$$2C_1 = 3 \rightarrow C_1 = \frac{3}{2}$$

Substituindo $C_1$, temos:

$\frac{3}{2} + C_2 = 1 \rightarrow C_2 = 1 - \frac{3}{2} \rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}$ $\therefore$ $C_1 = \frac{3}{2}$ e $C_2 = -\frac{1}{2}$

**13** Classifique e dê a solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 5x + 10y = 7 \end{cases}$. SI e S = {(1 − 2m, m)}

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & \times(-5) \\ 5x + 10y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{5x} - \cancel{10y} = -5 \\ \cancel{5x} + \cancel{10y} = 7 \end{cases}$$

$$0 = 2 \quad \text{(impossível)}$$

O sistema não possui solução, portanto: SI e S = { }

**14** (Unifesp-SP) Um determinado produto é vendido em embalagens fechadas de 30 g e 50 g. Na embalagem de 30 g, o produto é comercializado a R$ 10,00 e na embalagem de 50 g, a R$ 15,00.

a) Gastando R$ 100,00, qual é a quantidade de cada tipo de embalagem para uma pessoa adquirir precisamente 310 g desse produto? 7 embalagens de 30 g e 2 embalagens de 50 g

b) Qual a quantidade máxima, em gramas, que uma pessoa pode adquirir com R$ 100,00? 330 g (6 de 50 g e 1 de 30 g)

*Resolução:*

x = quantidade de embalagens de 30 g

y = quantidade de embalagens de 50 g

a) $$\begin{cases} 10x + 15y = 100 & \times(-3) \\ 30x + 50y = 310 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{30x} - \cancel{45y} = -300 \\ \cancel{30x} + \cancel{50y} = 310 \end{cases}$$

$$5y = 10 \rightarrow y = 2$$

Substituindo *y*, temos:

$10x + 15 \cdot 2 = 100 \rightarrow 10x = 100 - 30 \rightarrow x = 7$

Portanto, a quantidade de cada tipo de embalagem é 7 de 30 g e 2 de 50 g.

b) $10x + 15y = 100 \rightarrow$ em gramas: $30x + 50y$

Verificando os casos possíveis, temos:

| x | y | Quantidade em gramas = 30x + 50y |
|---|---|---|
| 10 | 0 | 300 g |
| 7 | 2 | 210 + 100 = 310 g |
| 4 | 4 | 120 + 200 = 320 g |
| 1 | 6 | 30 + 300 = 330 g |

Portanto, com R$ 100,00 uma pessoa pode comprar, no máximo, 330 g.

**15** Dado o sistema $\begin{cases} 5x + 9y = 10 \\ 10x + 18y = a \end{cases}$, qual o valor de *a* para que ele seja possível e indeterminado? 20

*Resolução:*

$$\begin{cases} 5x + 9y = 10 & \times(-2) \\ 10x + 18y = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{10x} - \cancel{18y} = -20 \\ \cancel{10x} + \cancel{18y} = a \end{cases}$$

$$0 = -20 + a \rightarrow a = 20$$

**16** (Fuvest-SP) Diz-se que a matriz quadrada $A$ tem posto 1 se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha.
Determine os valores de $a$, $b$ e $c$ para os quais a matriz $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \frac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$ tem posto 1. $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$

*Resolução:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \frac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{3a} - \cancel{b} + 2c = 4 \\ \cancel{b} + c - \cancel{3a} = 2 \\ c - 2a + b = 3 \end{cases} \rightarrow$$ pelas duas primeiras equações, temos $c = 2$, então:

$$\begin{cases} b + 2 - 3a = 2 \\ 2 - 2a + b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b - 3a = 0 & \times (-1) \\ -2a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{b} + 3a = 0 \\ -2a + \cancel{b} = 1 \end{cases}$$
$$a = 1$$

Substituindo $a$, temos:
$2 - 2 \cdot 1 + b = 3 \rightarrow b = 3$
$\therefore a = 1; b = 3; c = 2$

**17** Podemos dizer que o sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$ é:

a) SPD com solução $S = \{(-1, -2)\}$
b) SPD com solução $S = \{(-2, -1)\}$
c) SPD com solução $S = \{(-1, 2)\}$
d) SPI
e) SI

*Resolução:*

$$\begin{cases} x - y = 1 & \times (-3) \\ 3x - 4y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{3x} + 3y = -3 \\ \cancel{3x} - 4y = 5 \end{cases}$$
$$-y = 2 \rightarrow y = -2$$

Substituindo $y$, temos:
$x - (-2) = 1 \rightarrow x + 2 = 1 \rightarrow x = -1$
Portanto, o sistema é SPD com solução $S = \{(-1, -2)\}$.

**18** (FGV-SP) Num escritório há 3 impressoras: $A$, $B$ e $C$. Em um período de 1 hora:

- $A$ e $B$ juntas imprimem 150 folhas;
- $A$ e $C$ juntas imprimem 160 folhas;
- $B$ e $C$ juntas imprimem 170 folhas.

Em 1 hora, a impressora $A$ imprime sozinha:

a) 60 folhas
b) 65 folhas
c) 75 folhas
d) 70 folhas
e) 80 folhas

*Resolução:*

Sejam $a$, $b$ e $c$ o número de folhas que as impressoras $A$, $B$ e $C$ imprimem.

$$\begin{cases} a + b = 150 \\ a + c = 160 \\ b + c = 170 \end{cases} \rightarrow \text{somando as duas primeiras equações, temos: } 2 \cdot a + b + c = 310.$$

Substituindo $b + c = 170$, teremos:

$$2a + 170 = 310 \rightarrow 2a = 310 - 170 \rightarrow a = \frac{140}{2} \rightarrow a = 70$$

Em 1 hora, a impressora $A$ imprime 70 folhas sozinha.

**19** (UFC) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais. Determine $f(-2)$ sabendo que $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$ e $f(2) = 14$. $-6$

*Resolução:*

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$; $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$

$f(1) = a + b + c = 0$

$f(-1) = -a + b - c = 2$

$f(2) = 8a + 4b + 2c = 14$

Com os dados, temos $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + b - c = 2 \\ 8a + 4b + 2c = 14 \end{cases} \rightarrow$ somando as duas primeiras equações, temos:

$2b = 2 \rightarrow b = 1$

Então:

$$\begin{cases} -a + 1 - c = 2 \\ 8a + 4 + 2c = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - c = 1 \quad \times (2) \\ 8a + 2c = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - \cancel{2c} = 2 \\ 8a + \cancel{2c} = 10 \end{cases}$$

$$6a = 12 \rightarrow a = 2$$

Substituindo $a$, temos:

$-2 - c = 1 \rightarrow c = -3$

$\therefore f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$ e $f(-2) = -16 + 4 + 6 = -6$

**20** Classifique e resolva o sistema: $\begin{cases} 2x + y + 3 = x + 7 \\ 2x + y + 5 = x + 2y \end{cases}$. SPD e $S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)\right\}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = x + 7 \\ 2x + y + 5 = x + 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \cancel{y} = 4 \\ x - \cancel{y} = -5 \end{cases}$$

$$2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Substituindo *x*, temos:

$$-\frac{1}{2} + y = 4 \rightarrow y = 4 + \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{9}{2}$$

$\therefore$ SPD e $S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)\right\}$

**21** (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha-de-caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha-de-caju, R$ 20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha-de-caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita anteriormente.

b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades em grama de cada ingrediente por lata.

amendoim: 250 gramas; castanha-de-caju: 125 gramas e castanha-do-pará: 125 gramas

*Resolução:*

x = quantidade de amendoim em kg

y = quantidade de castanha-de-caju em kg

z = quantidade de castanha-do-pará em kg

a) Pelo enunciado, temos $\begin{cases} x + y + z = 0{,}5 \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 3y = x + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0{,}5 & \text{(I)} \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 & \text{(II)} \\ x - 3y + z = 0 \rightarrow x + z = 3y & \text{(III)} \end{cases}$

b) Substituindo (III) em (I), temos:

$3y + y = 0{,}5 \rightarrow 4y = 0{,}5 \rightarrow y = 0{,}125$

Substituindo *y* em (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 5x + 20 \cdot (0{,}125) + 16z = 5{,}75 \\ x + y = 3 \cdot (0{,}125) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 16z = 3{,}250 \\ x + z = 0{,}375 \quad \times (-5) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{5x} + 16z = 3{,}250 \\ -\cancel{5x} - 5z = -1{,}875 \end{cases}$$

$$11z = 1{,}375 \rightarrow z = 0{,}125$$

Substituindo *z*, temos:

$x + 0{,}125 + 0{,}125 = 0{,}5 \rightarrow x = 0{,}250$

Portanto, cada lata terá 250 gramas de amendoim, 125 gramas de castanha-de-caju e 125 gramas de castanha-do-pará.

**22** Qual dos pares (x, y) não é solução do sistema $\begin{cases} x - y = 7 \\ -2x + 2y = -14 \end{cases}$?

a) (13, 6)
b) (−5 , −12)
c) (6 , −1)
d) (4, −4)
e) (3, −4)

*Resolução:*

$\begin{cases} x - y = 7 \quad \times (2) \\ -2x + 2y = -14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 14 \\ -2x + 2y = -14 \end{cases} \rightarrow$ o sistema é possível e indeterminado;

portanto, possui infinitas soluções, como: $(\alpha, \alpha - 7)$, então:

a) (Verdadeira); $(13, 13 - 7) = (13, 6)$
b) (Verdadeira); $(-5, -5 - 7) = (-5, -12)$
c) (Verdadeira); $(6, 6 - 7) = (6, -1)$
d) (Falsa); $(4, 4 - 7) \neq (4, -4)$
e) (Verdadeira); $(3, 3 - 7) = (3, -4)$

**23** (Faap-SP) Uma competição nacional de futebol reuniu Corinthians, Palmeiras, São Paulo e Santos, que juntos marcaram 15 gols. Sabe-se que:

- cada time marcou um número diferente de gols;
- cada time marcou pelo menos um gol;
- o Corinthians e o Palmeiras marcaram juntos 6 gols;
- o Palmeiras e o São Paulo marcaram juntos 7 gols;
- um time marcou 4 gols.

O número de gols marcados pelo Palmeiras nessa competição foi:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

*Resolução:*

x = nº de gols marcado pelo Corinthians
y = nº de gols marcado pelo Palmeiras
z = nº de gols marcado pelo São Paulo
w = nº de gols marcado pelo Santos

Pelos dados, temos:

$\begin{cases} x + y + z + w = 15 \\ x + y = 6 \\ y + z = 7 \end{cases} \rightarrow$ se $x = 4$, temos:

$y = 6 - 4 \rightarrow y = 2$
$z = 7 - 2 \rightarrow z = 5$
$4 + 2 + 5 + w = 15 \rightarrow w = 4$ (não convém, pois só um time marcou 4 gols)

Se $y = 4$, temos:

$x = 6 - 4 \rightarrow x = 2$
$z = 7 - 4 \rightarrow z = 3$
$2 + 4 + 3 + w = 15 \rightarrow w = 6$

Portanto, o Palmeiras marcou 4 gols.

**24** (UFJF-MG) A tabela abaixo fornece a quantidade de proteína, carboidrato e gordura, contida em cada grama dos alimentos *A*, *B*, *C* e *D*.

| Alimentos | Unidades de proteína | Unidades de carboidrato | Unidades de gordura |
|---|---|---|---|
| A | 4 | 4 | 2 |
| B | 6 | 1 | 3 |
| C | 6 | 2 | 3 |
| D | 2 | 3 | 1 |

Um nutricionista deseja preparar uma refeição, composta somente desses alimentos, que contenha exatamente 50 unidades de proteínas, 21 unidades de carboidrato e 24 unidades de gordura. Então, quanto às maneiras de se combinarem quantidades desses quatro alimentos, em números inteiros de gramas, para compor tal refeição, é correto afirmar que:

a) não existe tal maneira.
b) existe uma única maneira.
c) existem exatamente duas maneiras.
d) existem exatamente três maneiras.
e) existem infinitas maneiras.

*Resolução:*

De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} 4A + 6B + 6C + 2D = 50 & \text{(I)} \\ 4A + B + 2C + 3D = 21 & \text{(II)} \\ 2A + 3B + 3C + D = 24 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) e (III), temos:

$$\begin{cases} 4A + 6B + 6C + 2D = 50 \\ 2A + 3B + 3C + D = 24 \quad \times(-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4A + 6B + 6C + 2D = 50 \\ -4A - 6B - 6C - 2D = -48 \end{cases}$$

$$0 = 2 \quad \text{(impossível)}$$

**25** (Fuvest-SP) Se (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \dfrac{3}{4} \\ y^3 - \dfrac{1}{2}xy^2 = 0 \end{cases}$, pode-se afirmar que:

a) $x = 0$ ou $x = -2 - \log_2 3$
b) $x = 1$ ou $x = 3 + \log_2 3$
c) $x = 2$ ou $x = -3 + \log_2 3$
d) $x = \dfrac{\log_2 3}{2}$ ou $x = -1 + \log_2 3$
e) $x = -2 + \log_2 3$ ou $x = -1 + \dfrac{\log_2 3}{2}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \dfrac{3}{4} & \text{(I)} \\ y^3 - \dfrac{1}{2}xy^2 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $y^2 \cdot \left(y - \dfrac{1}{2}x\right) = 0 \rightarrow y = 0$ ou $y = \dfrac{1}{2}x$

Se $y = 0$, em (I), teremos: $2^x \cdot 2^0 = \dfrac{3}{4} \rightarrow 2^x = \dfrac{3}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \log 2^x = \log \dfrac{3}{4} \rightarrow x \log_2 2 = \log_2 3 - \log_2 4 \rightarrow x = \log_2 3 - 2$

Se $y = \dfrac{1}{2}x$, teremos: $2^x \cdot 2^x = \dfrac{3}{4} \rightarrow 2^{2x} = \dfrac{3}{4} \rightarrow \text{Log}_2 2^{2x} = \log_2 3 - \log_2 4 \rightarrow$

$\rightarrow 2x = \log_2 3 - 2 \rightarrow x = \dfrac{\log_2 3}{2} - 1$

**26** Escreva a equação matricial dos sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 5x + 2y + 3z = 6 \\ x + 11y + 2z = 0 \end{cases}$

*Resolução:*

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

matriz incompleta: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

matriz das incógnitas: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

matriz dos termos independentes: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot X = B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 5x + 2y + 3z = 6 \\ x + 11y + 2z = 0 \end{cases}$

matriz incompleta: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{bmatrix}$

matriz das incógnitas: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

matriz dos termos independentes: $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A \cdot X = B \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

**27** Determine o sistema correspondente à equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ e resolva-o.

$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ e $S = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{2}\right)\right\}$

*Resolução:*

$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$

$-2y = 5 \rightarrow y = -\frac{5}{2}$

Substituindo *y*, temos:

$2x - \left(-\frac{5}{2}\right) = 2 \rightarrow 2x = 2 - \frac{5}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{4}$

$S = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{2}\right)\right\}$

**28** Resolva a equação matricial $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -16 \end{bmatrix}$ usando a regra de Cramer no sistema encontrado. $S = \{(1, -2, 0)\}$

*Resolução:*

Determinando o sistema da equação matricial, temos:

$$\begin{cases} 6x + y + 8z = 4 \\ 7x + 5y + 3z = -3 \\ 2x + 9y + 4z = -16 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 120 + 504 + 6 - 80 - 162 - 28 = 630 - 270 \rightarrow D = 360$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -3 & 5 & 3 \\ -16 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 80 - 216 - 48 + 640 + 12 - 108 = 732 - 372 \rightarrow D_x = 360$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 7 & -3 & 3 \\ 2 & -16 & 4 \end{vmatrix} = -72 + 24 - 896 + 48 - 112 + 288 = 360 - 1\,080 \rightarrow D_y = -720$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 \\ 2 & 9 & -16 \end{vmatrix} = -480 - 6 + 252 - 40 + 162 + 112 = 526 - 526 \rightarrow D_z = 0$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{360}{360} \rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -\frac{720}{360} \rightarrow y = -2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{360} \rightarrow z = 0$$

$$S = \{(1, -2, 0)\}$$

**29** O sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$ é:

a) normal
b) SPD
c) SPI
d) SI
e) completo

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 2 + 4 - 0 - 3 \rightarrow D = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 2 + 0 + 8 + 3 - 0 \rightarrow D_x = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 + 0 + 4 - 9 - 0 \rightarrow D_y = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 3 + 4 + 2 - 3 \rightarrow D_z = 0$$

Como D, $D_x$, $D_y$ e $D_z = 0$, o sistema é possível e indeterminado.

**30** Verifique se o sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 3x + 4y - 10z = 8 \\ 2x + 5y - 9z = 0 \end{cases}$ é um sistema possível e determinado.

Não é SPD, pois D = 0.

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 3x + 4y - 10z = 8 \\ 2x + 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -10 \\ 2 & 5 & -9 \end{vmatrix} = -36 - 20 - 45 + 24 + 27 + 50 = -101 + 101 \rightarrow D = 0$$

Como D = 0, o sistema não é SPD.

**31** Determine o valor de *a* para que $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 4y + az = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ seja um sistema possível e determinado. $a \neq 2$.

*Resolução:*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 4y + az = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \text{ o sistema será SPD se } D \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -4 - a + 2 + 4 - a + 2 \neq 0 \rightarrow -2a \neq -4 \rightarrow a \neq 2$$

**32** Determine o valor de *z* no sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$. $z = \frac{4}{3}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 + 1 - 2 - 2 + 2 \rightarrow D = 6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 4 - 1 - 8 + 3 - 2 \rightarrow D_z = 8$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{6} \rightarrow z = \frac{4}{3}$$

**33** (UFBA) Em uma certa época, uma epidemia atingiu determinada região. A fim de combater a doença, a população local foi dividida em três grupos, por faixa etária, e todas as pessoas foram vacinadas, cada uma recebendo a dose da vacina de acordo com o especificado no quadro a seguir:

| Grupo | Faixa etária | 1ª aplicação | 2ª aplicação | 3ª aplicação |
|---|---|---|---|---|
| I | até 15 anos | 1 mℓ | 2 mℓ | 3 mℓ |
| II | de 16 a 59 anos | 3 mℓ | 2 mℓ | 1 mℓ |
| III | a partir dos 60 anos | 5 mℓ | 2 mℓ | 1 mℓ |

Considerando que na primeira aplicação foram gastos 800 000 mℓ da vacina, na segunda, 600 000 mℓ e na terceira, 500 000 mℓ, calcule o número de pessoas de cada grupo.
grupo I: 100 000, grupo II: 150 000 e grupo III: 50 000

*Resolução:*

x = nº de pessoas do grupo I
y = nº de pessoas do grupo II
z = nº de pessoas do grupo III

De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 800\,000 \\ 2x + 3y + 2z = 600\,000 \\ 3x + y + z = 500\,000 \end{cases} \rightarrow \text{ resolvendo o sistema, vem:}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 18 + 10 - 30 - 6 - 2 \rightarrow D = -8$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 800\,000 & 3 & 5 \\ 600\,000 & 2 & 2 \\ 500\,000 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 100\,000 \begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 100\,000 \cdot (16 + 30 + 30 - 50 - 16 - 18) \rightarrow$$

$$\rightarrow D_x = -800\,000$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 800\,000 & 5 \\ 2 & 600\,000 & 2 \\ 3 & 500\,000 & 1 \end{vmatrix} = 100\,000 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 100\,000 \cdot (6 + 48 + 50 - 90 - 16 - 10) \rightarrow$$

$$\rightarrow D_y = -1\,200\,000$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 800\,000 \\ 2 & 2 & 600\,000 \\ 3 & 1 & 500\,000 \end{vmatrix} = 100\,000 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 100\,000 \cdot (10 + 16 + 54 - 48 - 6 - 30) \rightarrow$$

$$\rightarrow D_z = -400\,000$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{800\,000}{-8} = 100\,000$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -\frac{1\,200\,000}{-8} = 150\,000$$

$$z = \frac{D_z}{D} = -\frac{400\,000}{-8} = 50\,000$$

Então, grupo I = 100 000 pessoas, grupo II = 150 000 pessoas e grupo III = 50 000 pessoas.

**34** (UFSCar-SP) Sendo $m$ e $n$ números reais positivos, o sistema linear $\begin{cases} (\log_2 m) \cdot x + (\log_4 n) \cdot y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ nas variáveis $x$ e $y$ será possível e determinado se, e somente se:

a) $m \neq 2n$
b) $m \neq \sqrt{n}$
c) $m \cdot \sqrt{n} \neq 1$
d) $n = 2m$
e) $m = 2n$

*Resolução:*

$$\begin{cases} (\log_2 m) \cdot x + (\log_4 n) \cdot y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \text{ o sistema será possível e determinado se } D \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} \log_2 m & \log_4 n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \log_2 m - \log_4 n \neq 0 \rightarrow \log_2 m \neq \frac{\log_2 n}{\log_2 4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log_2 m \neq \frac{\log_2 n}{2} \rightarrow 2 \log_2 m \neq \log_2 n \rightarrow \log_2 m^2 \neq \log_2 n \rightarrow m^2 \neq n \rightarrow m \neq \sqrt{n}$$

**35** (UnB-DF) No Brasil, a gasolina tipo comum que se utiliza nos veículos automotores é um combustível composto de 75% de gasolina pura e 25% de álcool anidro. Alguns donos de postos de venda de combustíveis, de maneira desonesta, para aumentar as margens de lucro, modificam essa proporção e (ou) acrescentam solvente ao combustível. Considere que os postos $P$, $Q$ e $R$ vendam combustíveis com as seguintes composições e preços por litro:

| Posto | Composição do combustível | | | Custo por litro (em R$) | Preço de venda (em R$) |
|---|---|---|---|---|---|
| | Álcool | Gasolina | Solvente | | |
| P | 25% | 75% | 0% | 1,70 | 1,78 |
| Q | 30% | 70% | 0% | 1,64 | 1,78 |
| R | 30% | 40% | 30% | 1,37 | 1,78 |

Para os três postos, $P$, $Q$ e $R$, considere que $x$, $y$ e $z$ sejam os preços de custo, em reais, do litro de álcool anidro, de gasolina pura e de solvente, respectivamente, e que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sejam os preços de venda do litro, em reais, desses mesmos produtos, quando misturados para formar o combustível composto. Considere ainda que $A$, $B$, $C$, $X$ e $Y$ sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1{,}70 \\ 1{,}64 \\ 1{,}37 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1{,}78 \\ 1{,}78 \\ 1{,}78 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir:

I. O preço de custo por litro de combustível composto para cada um dos postos, $P$, $Q$ e $R$, pode ser representado pela matriz $B$, que pode ser obtida pelo produto $A \cdot X$. V

II. Se $Y$ é solução do sistema $A \cdot Y = C$ e $X$, a solução do sistema $A \cdot X = B$, então a matriz $Y - X$ representa o lucro de cada posto, por litro, com a venda do combustível composto. F

III. Para obter o mesmo lucro do posto $R$, enquanto este vende 1 000 ℓ de seu combustível composto, o posto $Q$ deverá vender mais de 4 000 ℓ de gasolina do tipo comum. V

IV. O sistema de equações lineares representado por $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}78 \\ 1{,}75 \\ 1{,}70 \end{bmatrix}$ tem mais de uma solução. F

V. O preço de custo do litro de gasolina pura é o dobro do preço de custo do litro de solvente, isto é, $y = 2z$. F

VI. Entre os componentes utilizados para formar os combustíveis compostos, o que possui menor preço de custo é o álcool anidro. V

*Resolução:*

I. (Verdadeira)

II. (Falsa); lucro por litro = C − B

III. (Verdadeira)

IV. (Falsa)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}78 \\ 1{,}75 \\ 1{,}70 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{vmatrix} = \frac{21}{400} + 0 + 0 - 0 - 0 - \frac{27}{400} = -\frac{6}{400} \neq 0$$

Portanto, o sistema é possível e determinado e possui uma única solução.

V. (Falsa)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}78 \\ 1{,}75 \\ 1{,}70 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{3y}{4} = 1{,}78 \\ \frac{3}{10}x + \frac{7}{10}y = 1{,}75 \\ \frac{3}{10}x + \frac{4}{10}y + \frac{3}{10}z = 1{,}70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 7{,}12 & \text{(I)} \\ 3x + 7y = 17{,}5 & \text{(II)} \\ 3x + 4y + 3z = 17 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 7{,}12 & \times(-3) \\ 3x + 7y = 17{,}5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{3x} - 9y = -21{,}36 \\ \cancel{3x} + 7y = 17{,}5 \end{cases}$$

$$-2y = -3{,}86 \rightarrow y = 1{,}93$$

Substituindo $y$, temos:

$$x + 3 \cdot 1{,}93 = 7{,}12 \rightarrow x = 7{,}12 - 5{,}79 \rightarrow x = 1{,}33$$

$$3x + 4y + 3z = 17 \rightarrow 3 \cdot 1{,}33 + 4 \cdot 1{,}93 + 3z = 17 \rightarrow z = \frac{5{,}29}{3} \rightarrow z = 1{,}76$$

VI. (Verdadeira)

**36** (ITA-SP) Seja o sistema linear nas incógnitas $x$ e $y$, com $a$ e $b$ reais, dado por $\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=1\\(a+b)x+(a-b)y=1\end{cases}$,

considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$.

II. O sistema é possível e determinado se $a$ e $b$ não são simultaneamente nulos.

III. $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas:

a) I
b) II
c) III
d) I e II
e) II e III

*Resolução:*

$$\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=1\\(a+b)x+(a-b)y=1\end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a-b & -(a+b) \\ a+b & a-b \end{vmatrix} = a^2 - ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$$

Se $D = 0 \rightarrow 2 \cdot (a^2 + b^2) = 0 \rightarrow a = b = 0$, pois $a$ e $b$ são reais.

$$\begin{cases}0x+0y=1\\0x+0y=1\end{cases} \rightarrow \text{o sistema é impossível}$$

Se $D \neq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \rightarrow$ o sistema será possível e determinado se $a$ e $b$ não forem simultaneamente nulos.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -(a+b) \\ 1 & a-b \end{vmatrix} = a - b + a + b \rightarrow D_x = 2a$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a+b & 1 \end{vmatrix} = a - b - a - b \rightarrow D_y = -2b$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2a}{2 \cdot (a^2 + b^2)} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$x = \frac{D_y}{D} = \frac{-2b}{2 \cdot (a^2 + b^2)} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{-1}$$

Portanto: I. (Falsa); II. (Verdadeira); III. (Verdadeira)

**37** (FGV-SP) O sistema linear nas incógnitas $x$ e $y$:

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x + my = 0 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \text{ é:}$$

a) determinado qualquer que seja $m$.

b) indeterminado para $m = \frac{2}{3}$.

c) impossível para $m \neq \frac{2}{3}$.

d) determinado para $m \neq \frac{2}{3}$.

e) impossível qualquer que seja $m$.

*Resolução:*

$$\begin{cases} x - 2y = 7 & \text{(I)} \\ 2x + my = 0 & \text{(II)} \\ 3x - y = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 7 & \times(-3) \\ 3x - y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + 6y = -21 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

$$5y = -15 \rightarrow y = -3$$

Substituindo $y$, temos:

$3x - (-3) = 6 \rightarrow x = \frac{3}{3} \rightarrow x = 1$

Para que o sistema seja possível e determinado, $2x + my = 0$.

$2 \cdot 1 + m \cdot (-3) = 0 \rightarrow 2 - 3m = 0 \rightarrow m = \frac{2}{3}$

Se $m \neq \frac{2}{3}$, o sistema será impossível.

p. 52

**38** (Fuvest-SP) Dado o sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$. Então, $x$ é igual a:

a) 27

b) 3

c) 0

d) $-2$

e) 1

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$$

O sistema já está escalonado:

$z = 3$

$4y + 5 \cdot 3 = 23 \rightarrow 4y = 8 \rightarrow y = 2$

$x + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 \rightarrow x = 1$

**39** Escalone e resolva o sistema $\begin{cases} x - 7y + z = 1 \\ 2x - 4y - 8z = -8 \\ -3x + y - 2z = -2 \end{cases}$. SPD e $S = \{(0, 0, 1)\}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x - 7y + z = 1 \\ 2x - 4y - 8z = -8 \\ -3x + y - 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 7y + z = 1 \\ 2x - 4y - 8z = -8 \\ -3x + y - 2z = -2 \end{cases} (-2)(3) \rightarrow \begin{cases} x - 7y + z = 1 \\ 0x + 10y - 10z = -10 \\ 0x - 20y + z = 1 \end{cases} (2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 7y + z = 1 \\ 10y - 10z = -10 \\ 0y - 19z = -19 \end{cases}$$

$z = 1$

$10y - 10 \cdot 1 = -10 \rightarrow 10y = 0 \rightarrow y = 0$

$x - 7 \cdot 0 + 1 = 1 \rightarrow x = 0$

$\therefore$ SPD e $S = \{(0, 0, 1)\}$

**40** (FGV-SP) Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -12 \end{cases}$, obtém-se para *z* o valor:

a) $-3$
b) $-2$
c) $0$
d) $2$
e) $3$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -12 \end{cases} (-2) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x - 3y - 4z = 1 \\ 6y + 3z = -12 \end{cases} (2) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 4z = 1 \\ 0y - 5z = -10 \end{cases}$$

$z = 2$

**41** (UEM-PR) Determine a soma das soluções do sistema de equações dado por: $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^{x+1} + 2^y - 2^z = 9 \\ 2^x - 2^{y+1} + 2^{z+1} = 2 \end{cases}$

(*Sugestão*: considere $2^x = a$, $2^y = b$, $2^z = c$.) 3

*Resolução:*

$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^{x+1} + 2^y - 2^z = 9 \\ 2^x - 2^{y+1} + 2^{z+1} = 2 \end{cases}$ ; considerando $2^x = a$, $2^y = b$ e $2^z = c$, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ 2a + b - c = 9 \\ a - 2b + 2c = 2 \end{cases} (-2)(-1) \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 7 \\ 0a - b - 3c = -5 \\ 0a - 3b + c = -5 \end{cases} (-3) \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 7 \\ -b - 3c = -5 \\ 0b + 10c = 10 \end{cases}$$

$c = 1$

$-b - 3 \cdot 1 = -5 \rightarrow b = 2$

$a + 2 + 1 = 7 \rightarrow a = 4$

Substituindo *a*, *b* e *c*, temos:

$2^x = a \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x = 2$

$2^y = b \rightarrow 2^y = 2 \rightarrow y = 1$

$2^z = 1 \rightarrow 2^z = 2^0 \rightarrow z = 0$

$\therefore$ soma $= 2 + 1 + 0 = 3$

**42** (FGV-SP) O sistema linear $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$

a) é impossível.
b) admite apenas uma solução.
c) admite apenas duas soluções.
d) admite apenas três soluções.
e) admite infinitas soluções.

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases} (-2) \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 0x - 5y + 5z = 2 \end{cases} \rightarrow \text{o sistema é possível, indeterminado}$$

e admite infinitas soluções.

**43** (Unifesp-SP) A solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} x - 2y - 2z = -1 \\ x \quad\quad - 2z = 3 \\ \quad\quad y - z = 1 \end{cases}$ é:

a) $x = -5, y = -2$ e $z = -1$
b) $x = -5, y = -2$ e $z = 1$
c) $x = -5, y = 2$ e $z = 1$
d) $x = 5, y = 2$ e $z = -1$
e) $x = 5, y = 2$ e $z = 1$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = -1 \\ x \quad\quad - 2z = 3 \\ \quad\quad y - z = 1 \end{cases} (-1) \rightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = -1 \\ 0x + 2y + 0z = 4 \\ \quad\quad y - z = 1 \end{cases}$$

$y = 2$
$2 - z = 1 \rightarrow z = 1$
$x - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow x = 5$

**44** (Fuvest-SP) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10 000 frutas. As frutas estão acondicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas, e custa 3 300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas. 2 000 maçãs, 3 000 peras e 5 000 laranjas

*Resolução:*

$x$ = quantidade de caixas de maçãs
$y$ = quantidade de caixas de peras
$z$ = quantidade de caixas de laranjas

$$\begin{cases} 50x + 60y + 100z = 10\,000 \\ x + y + z = 140 \\ 20x + 40y + 10z = 3\,300 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 140 \\ 50x + 60y + 100z = 10\,000 \\ 20x + 40y + 10z = 3\,300 \end{cases} (-50)(-20) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 140 \\ 0x + 10y + 50z = 3\,300 \\ 0x + 20y - 10z = 500 \end{cases} (-2) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 140 \\ 10y + 50z = 3\,000 \\ 0y - 110z = -5\,500 \end{cases}$$

$z = 50$
$10y + 50 \cdot 50 = 3\,000 \rightarrow y = 50$
$x + 50 + 50 = 140 \rightarrow x = 40$
quantidade de maçãs $= 50 \cdot 40 = 2\,000$
quantidade de peras $= 60 \cdot 50 = 3\,000$
quantidade de laranjas $= 100 \cdot 50 = 5\,000$

**45** (FGV-SP) Nas sentenças abaixo classificá-las em: verdadeiras (V) ou falsas (F). No caso de você classificar uma sentença falsa, justifique a resposta.

a) Se $A$, $B$ e $C$ são matrizes de ordem 2 e $AB = AC$, então $B = C$. F

b) Uma matriz identidade admite como matriz inversa ela própria. V

c) Se $A$ é uma matriz quadrada de ordem 2, então $\det(3A) = 3\det(A)$. F

d) As equações abaixo formam um sistema linear possível e determinado. F

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

*Resolução:*

a) (Falsa); se $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, então: $AB = AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B \neq C$.

b) (Verdadeira)

c) (Falsa); se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $3A = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \det A = ad - cb$ e $\det 3A = 9ad - 9cb = 9 \cdot (ad - cb) = 3^2 \det A$

d) (Falsa); escalonando o sistema, temos: $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \quad (-3) \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 0x - 4y + 5z = -3 \end{cases} \rightarrow$ o sistema é possível e indeterminado.

**46** (UFPE) O sistema linear a seguir admite pelo menos duas soluções (distintas). Indique o valor de $m$.

$$\begin{cases} -5x - 4y + mz = -9 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$ 13

*Resolução:*

$$\begin{cases} -5x - 4y + mz = -9 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \quad (1)(5) \\ -x + y + 2z = 3 \\ -5x - 4y + mz = -9 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 0x + 3y - z = 8 \quad (-2) \\ 0x + 6y + (m - 15)z = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 3y - z = 8 \\ 0y + (m - 15 + 2)z = 0 \end{cases}$$

Se o sistema admite pelo menos duas soluções distintas, o sistema é possível e indeterminado; logo, $m - 13 = 0 \rightarrow m = 13$.

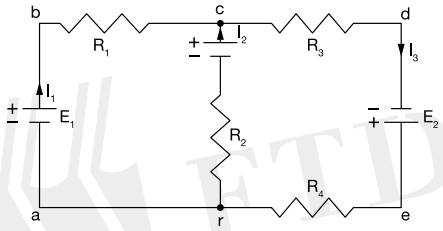
**47** (Unipar-PR) Sobre o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$ é correto afirmar que é:

a) possível e determinado
b) possível e indeterminado
c) impossível
d) homogêneo
e) inclassificável

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 4 \end{cases} \quad (-2)(-3) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{o sistema é impossível.}$$

**48** (UFMT) A figura ilustra um exemplo de circuito elétrico.




Para esse circuito, as correntes desconhecidas $I_1$, $I_2$ e $I_3$ (em ampère), para determinados valores das resistências (em ohm) e da variação do potencial eletrostático (em volt) em cada bateria, devem satisfazer o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

A partir das informações dadas, julgue os itens:

0. O sistema dado é normal. V

1. $I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -16 & 0 \\ 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ V

2. $I_1 = 4{,}50$ A, $I_2 = 6{,}25$ A, $I_3 = 2{,}75$ A. F

*Resolução:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

0. (Verdadeira); o número de equações é o mesmo que o número de incógnitas, e o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 1 + 0 - 0 - 5 - 0 \rightarrow D = -16 \neq 0.$$

1. (Verdadeira); $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -16 & 0 \\ 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-80 - 0) - 1 \cdot (20 - 0) \rightarrow D_2 = -100$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -16 & 0 \\ 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow I_2 = \frac{-100}{-16} = 6{,}25$$

2. (Falsa); no enunciado, chamando $I_1$ de $x$, $I_2$ de $y$ e $I_3$ de $z$, e passando da forma matricial para a forma de um sistema, temos:

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y = -16 \\ y + 5z = 20 \end{cases} \rightarrow$ resolvendo por escalonamento, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y = -16 \\ y + 5z = 20 \end{cases} (-1) \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + z = -16 \\ y + 5z = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 5z = 20 \\ -3y + z = -16 \end{cases} (3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 5z = 20 \\ 16z = 44 \end{cases}$$

$z = 2{,}75$

$y + 5 \cdot 2{,}75 = 20 \rightarrow y = 6{,}25$

$x + 6{,}25 - 2{,}75 = 0 \rightarrow x = -3{,}5$

Portanto, $I_1 = -3{,}5A$, $I_2 = 6{,}25A$ e $I_3 = 2{,}75A$.

p. 55

**49** Discuta o sistema $\begin{cases} ax + 3y = -2 \\ 3x + y = -7 \end{cases}$ em função de $a$. $\begin{cases} \text{se } a \neq 9 \rightarrow \text{SPD} \\ \text{se } a = 9 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

*Resolução:*

$\begin{cases} ax + 3y = -2 \\ 3x + y = -7 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow D = a - 9$

Se $a - 9 \neq 0 \rightarrow a \neq 9 \rightarrow$ o sistema é possível e determinado.

Se $a = 9 \rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = -2 \\ 3x + y = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = -7 \\ 9x + 3y = -2 \end{cases} (-3) \rightarrow \begin{cases} 3x + y = -7 \\ 0x + 0y = 19 \end{cases} \rightarrow$ o sistema é impossível.

**50** Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas $x$ e $y$: $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 2y = 10. \\ 2x + y = k \end{cases}$

a) Discuta o sistema em função de $k$. $\begin{cases} \text{se } k = 15 \rightarrow \text{SPD} \\ \text{se } k \neq 15 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

b) Resolva o sistema para $k = 15$. $S = \{(8, -1)\}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 2y = 10 \\ 2x + y = k \end{cases}$$

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 2y = 10 \end{cases} (-1) \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 0x - 5y = 5 \end{cases}$

$y = -1$

$x + 3 \cdot (-1) = 5 \rightarrow x = 8$

O sistema será possível e determinado se $2x + y = k$ satisfizer os valores de $x$ e $y$, ou seja:

$2 \cdot 8 + (-1) = k \rightarrow k = 15.$

O sistema será impossível se $k \neq 15$.

Se $k = 15 \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 2y = 10 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$

$x = 5 - 3y$

$5 - 3y - 2y = 10 \rightarrow y = -1$

$x + 3 \cdot (-1) = 5 \rightarrow x = 8$

$S = \{(8, -1)\}$

**51** Discuta o sistema $\begin{cases} mx + y - z = 5 \\ x + my + z = 0. \\ x - y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} m \neq -1 \rightarrow \text{SPD} \\ m = -1 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} mx + y - z = 5 \\ x + my + z = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 + m + m - 0 \rightarrow D = 2m + 2$$

Se $D \neq 0$, SPD; portanto, se $2m + 2 \neq 0$, então: $m \neq -1$.

Se $m = -1 \rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x - y + z = 0 \\ x - y = 3 \end{cases} (1) \rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 5 \end{cases} \rightarrow$ o sistema é impossível.

**52** Discuta o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + mz = 4 \end{cases}$. $\begin{cases} \text{se } m \neq -2 \rightarrow \text{SPI} \\ \text{se } m = -2 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \quad (-2) \\ 2x + 2y + mz = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + (m + 2)z = 2 \end{cases}$$

Se $m + 2 = 0 \rightarrow m = -2 \rightarrow$ o sistema é impossível.
Se $m \neq -2 \rightarrow$ o sistema é possível e indeterminado.

**53** (Vunesp-SP) Dado o sistema de equações lineares *S*:

$$\begin{cases} x + 2y + cz = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \end{cases}, \text{ em que } c \in \mathbb{R}, \text{ determine:}$$

a) a matriz *A* dos coeficientes de *S* e o determinante de *A*;
b) o coeficiente *c*, para que o sistema admita uma única solução. $c \neq 2$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 2y + cz = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 0 - 3c - 0 - 2 \rightarrow \det A = 6 - 3c$

b) Para que o sistema admita uma única solução, $D \neq 0$, então: $6 - 3c \neq 0 \rightarrow c \neq 2$.

**54** (ITA-SP) O sistema linear $\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$ não admitirá solução se, e somente se, o número real *b* for igual a:

a) $-1$
b) $0$
c) $1$
d) $2$
e) $-2$

*Resolução:*

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

Se $D = 0$, o sistema não admitirá solução.

$$D = \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow b^3 + 1 = 0 \rightarrow b = -1$$

$$\text{Se } b = -1 \rightarrow \begin{cases} -x + y + 0z = 1 \quad (1) \\ 0x - y + z = 1 \\ x + 0y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + 0z = 1 \\ 0x - y + z = 1 \quad (1) \\ 0x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + 0z = 1 \\ -y + z = 1 \\ 0y + 0z = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow$ o sistema é impossível.

**55** (Mackenzie-SP) O sistema $\begin{cases} ax + 2y + z = 0 \\ 2x + ay - z = 1 - a \\ x + y + az = 1 \end{cases}$:

a) não admite solução para, exatamente, 2 valores de *a*.
b) não admite solução para, exatamente, 3 valores de *a*.
c) admite solução única para todos os valores positivos de *a*.
d) admite mais de uma solução para, exatamente, 2 valores de *a*.
e) admite mais de uma solução para, exatamente, 3 valores de *a*.

*Resolução:*

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 0 \\ 2x + ay - z = 1 - a \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 2 + 2 - a - 4a + a \rightarrow D = a^3 - 4a$$

Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.
Se $D = 0$, o sistema é impossível.
$a^3 - 4a = 0 \rightarrow a(a^2 - 4) = 0 \rightarrow a = 0$ ou $a = 2$ ou $a = -2$
Portanto, o sistema é impossível para os três valores de *a*.

**56** (ITA-SP) A condição para que as constantes reais *a* e *b* tornem incompatível o sistema linear $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$ é:

a) $a - b \neq 2$
b) $a + b = 10$
c) $4a - 6b = 0$
d) $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$
e) $ab = 24$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$$

Para que o sistema seja incompatível, $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2a + 10 + 6 - 12 - 10 - a = 0 \rightarrow a - 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

Se $a = 6$, temos:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + 6z = b \end{cases} \begin{matrix} (-1)(-2) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 0x + y + 2z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = b - 4 \end{cases}$$

Se $b - 4 \neq 0 \rightarrow b \neq 4 \rightarrow$ o sistema é impossível.
Se $b \neq 4$ e $a = 6$, temos: $-b \neq -4 \rightarrow a - b \neq a - 4 \rightarrow a - b \neq 2$.

*Em questões como a 57, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.*

**57** (UEM-PR) Sobre matrizes e sistemas de equações lineares, assinale o que for correto.

(01) Se a matriz $A = \begin{bmatrix} x - y & x + y & z + 1 \\ x + z & x - z & z \\ y + z & x + y & y + z \end{bmatrix}$ é simétrica, então $x = 0$, $y = z = 1$ e seu determinante é igual a 9.

(02) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, então $X^tAX \geqslant 0$, para todo $X$.

(04) Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, então $A^2 - 5A$ é igual à matriz identidade de ordem 2.

(08) A solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} mx - y + z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ x - 3mz = 4 \end{cases}$ é única apenas quando $m \neq 0$ e $m \neq -1$.

(16) Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, então o sistema de equações lineares homogêneo $AX = 0$ tem apenas a solução nula. 19

*Resolução:*

(01) (Verdadeira); $A = \begin{bmatrix} x - y & x + y & z + 1 \\ x + z & x - z & z \\ y + z & x + y & y + z \end{bmatrix}$ é simétrica, então: $A = A^t$.

$$\begin{bmatrix} x - y & x + y & z + 1 \\ x + z & x - z & z \\ y + z & x + y & y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y & x + z & y + z \\ x + y & x - z & x + y \\ z + 1 & z & y + z \end{bmatrix} \rightarrow x + y = x + z \rightarrow y = z$$

$z + 1 = y + z \rightarrow y = 1$, então: $z = 1$

$x + y = z \rightarrow x + 1 = 1 \rightarrow x = 0$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 + 2 + 2 + 4 + 1 - 2 \rightarrow D = 9$$

(02) (Verdadeira); $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y + 2z & x + 2y + z & 0 + y + 2z \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(2x + y + 2z) + y(x + 2y + z) + z(y + 2z) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x^2 + xy + 2xz + xy + 2y^2 + yz + yz + 2z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x + y)^2 + (y + z)^2 + (x + z)^2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow X^tAX \geqslant 0$, para todo $X$.

(04) (Falsa); $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 - 5A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 25 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 25 & 10 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$ não é matriz identidade.

(08) (Falsa); $D = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3m \end{vmatrix} = -3m^2 - 2 - 1$

Se $D \neq 0 \rightarrow$ o sistema é possível e determinado.
$D = -3m^2 - 3 = 0 \rightarrow -3m^2 = 3 \rightarrow m^2 = -1 \rightarrow$ não existe solução, portanto: $D \neq 0$ para qualquer $m \rightarrow$ o sistema é sempre possível e determinado.

(16) (Verdadeira); $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 + 4 - 2 + 1 \rightarrow D = 9 \neq 0$

$D \neq 0$, o sistema é possível e determinado, pois possui uma única solução. Como é homogêneo, $S = \{(0, 0, 0)\}$.

$\therefore$ soma $= 01 + 02 + 16 = 19$

p. 56

**58** (UFRGS) Em cada prova de uma competição esportiva, foram distribuídas uma medalha de ouro (3 pontos), uma de prata (2 pontos) e uma de bronze (1 ponto). Foram realizadas dez provas, e três equipes conquistaram todas as medalhas da competição, sendo vencedora a equipe que obteve o maior número de pontos. Observe a tabela abaixo, que apresenta a distribuição das medalhas.

| | Ouro | Prata | Bronze |
|---|---|---|---|
| Equipe I | x | z | x |
| Equipe II | 2y | x | y |
| Equipe III | x | y | z |

Considerando-se que a equipe III obteve 18 pontos, a equipe vencedora obteve:

a) 19 pontos
b) 20 pontos
c) 21 pontos
d) 22 pontos
e) 23 pontos

*Resolução:*
Para dez provas realizadas, temos 10 medalhas de ouro, 10 de prata e 10 de bronze. Como a equipe III obteve 18 pontos, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + x = 10 \\ z + x + y = 10 \\ 3x + 2y + z = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 2y = 10 \\ 3x + 2y + z = 18 \end{cases} (-2)(-3) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 0x + 0y - 2z = -10 \\ 0x - y - 2z = -12 \end{cases}$$

$z = 5$
$-y - 2 \cdot 5 = -12 \rightarrow y = 2$
$x + 2 + 5 = 10 \rightarrow x = 3$
equipe I $= 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 22$ pontos
equipe II $= 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 20$ pontos
equipe III $= 18$ pontos
Portanto, a equipe vencedora foi a I com 22 pontos.

**59** (UFRGS) Um fabricante produziu três lotes de suco de uva. Dois dos lotes contêm as vitaminas A e C nas concentrações indicadas na tabela abaixo.

| Lote | Vitamina A por litro | Vitamina C por litro |
|---|---|---|
| 1 | 5 mg | 5 mg |
| 2 | 1 mg | 3 mg |

O suco do terceiro lote não contém vitaminas. O fabricante deseja misturar porções convenientes desses três lotes de maneira que o suco obtido contenha as concentrações de 1 mg de vitamina A e 2 mg de vitamina C por litro. Essa mistura conterá:

a) os três lotes em quantidades iguais.
b) dois lotes em quantidades iguais e o outro numa quantidade maior.
c) dois lotes em quantidades iguais e o outro numa quantidade menor.
d) um dos lotes em quantidade igual à soma das quantidades dos outros dois.
e) um dos lotes em quantidade superior à soma das quantidades dos outros dois.

*Resolução:*
x = quantidade de litros do lote 1
y = quantidade de litros do lote 2
z = quantidade de litros do lote 3

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 5x + 3y = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \quad (-5) \\ 5x + y = 1 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x - 4y - 5z = -4 \\ 0x - 2y - 5z = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 5z = 3 \\ -4y - 5z = -4 \end{cases} \quad (2) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 5z = 3 \\ 0y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$z = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$2y + 5 \cdot 0{,}4 = 3 \rightarrow y = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$x + 0{,}5 + 0{,}4 = 1 \rightarrow x = 0{,}1$$

Portanto, lote 1 = 0,1 ℓ, lote 2 = 0,5 ℓ e lote 3 = 0,4 ℓ.
Nota-se, no entanto, que lote 2 = lote 1 + lote 3.

**60** (UPF-RS) A empresa Brinque Muito realizou uma grande doação de brinquedos para um orfanato. Essa doação compreendeu 535 brinquedos, entre bolas e bonecas, 370 brinquedos, entre bonecas e carrinhos, e o total de doação entre bolas e carrinhos foi de 455 brinquedos. É possível afirmar que, para realizar a doação, a empresa produziu:

a) 320 bolas
b) 145 carrinhos
c) 235 bonecas
d) 780 brinquedos
e) 1 350 brinquedos

*Resolução:*
x = nº de bolas
y = nº de bonecas
z = nº de carrinhos

Com os dados, temos:

$$\begin{cases} x + y = 535 \\ y + z = 370 \\ x + z = 455 \end{cases} \rightarrow \text{somando as três equações, temos:}$$

$2x + 2y + 2z = 1360.$
Portanto: $x + y + z = 680 \rightarrow z = 145$
A empresa produziu 145 carrinhos.

**61** Resolva o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \\ 5x - 10y = 0 \end{cases}$ $S = \{(0, 0)\}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \\ 5x - 10y = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 \rightarrow D = 1 \neq 0$$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado, e admite solução trivial que satisfaz a terceira equação.

**62** Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ $S = \{(0, 0, 0)\}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 15 + 12 - 10 - 9 - 20 \rightarrow D = -2 \neq 0$$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado, e admite apenas a solução trivial.

**63** Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 4y - 8z = 0 \\ 5x + 10y - 20z = 0 \end{cases}$ SPI e $S = \{(-2b + 4a, b, a)\}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 4y - 8z = 0 \\ 5x + 10y - 20z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ 5 & 10 & -20 \end{vmatrix} = -80 - 80 - 80 + 80 + 80 + 80 \rightarrow D = 0$$

Como $D = 0$, o sistema é possível e indeterminado.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 4y - 8z = 0 \\ 5x + 10y - 20z = 0 \end{cases} \begin{matrix} (-2)(-5) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

então, para $z = a$ e $y = b$, temos: $x = -2b + 4a$.

**64** O sistema $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$ admite somente a solução trivial se $m \in \mathbb{R}$ e:

a) $m = 6$
b) $m \neq 6$
c) $m = -6$
d) $m \neq -6$
e) $m = 0$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3z = 0 \rightarrow D \neq 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 6 - m \neq 0 \rightarrow m \neq 6$$

**65** Determine o valor de *m* para que o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \end{cases}$ admita somente a solução trivial.

$m \neq -\frac{11}{5}$

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \rightarrow D \neq 0 \\ x + 2y + mz = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m + 4 - 4 - 3 - 2m - 8 \neq 0 \rightarrow -5m - 11 \neq 0 \rightarrow m \neq -\frac{11}{5}$$

**66** Dado o sistema $\begin{cases} 2x + my + z = 0 \\ x - 2y + mz = 0 \\ mx + y = 0 \end{cases}$, considere as afirmações:

I. se $m \neq -1 \rightarrow$ SPD e $S = \{(0, 0, 0)\}$
II. se $m = -1 \rightarrow$ SPI e $S = \{(-a, -a, a)\}$
III. se $m = -1 \rightarrow$ SI

Assinale a afirmação correta:

a) só I é verdadeira.
b) só II é verdadeira.
c) só III é verdadeira.
d) I e II são verdadeiras.
e) I e III são verdadeiras.

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2x + my + z = 0 \\ x - 2y + mz = 0 \\ mx + y = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & -2 & m \\ m & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = m^3 + 2m - 0 - 2m \rightarrow D = m^3 + 1$$

O sistema é possível e determinado se $D \neq 0$, ou seja, $m \neq -1$.

Se $m = -1 \rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

$x = y$
$x - 2x - z = 0$
$x - z = 0 \rightarrow x = z$
O sistema é possível e indeterminado.
Se $z = a$, $x = -a$ e $y = -a$, $S = \{(-a, -a, a)\}$, portanto:
I. (Verdadeira)
II. (Verdadeira)
III. (Falsa)

**67** (UFRGS) A soma dos valores de *k* que tornam o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 3y + 4z = 0 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$ indeterminado é:

a) $-7$
b) $-2$
c) 2
d) 7
e) 10

*Resolução:*

Para que o sistema seja indeterminado, $D = 0$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 3y + 4z = 0 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 4 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 + k^2 - 3 - 4k - 3k = 0 \rightarrow k^2 - 7k + 10 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (k - 5) \cdot (k - 2) = 0 \rightarrow k = 5 \text{ ou } k = 2$$

soma $= 5 + 2 = 7$

**68** O sistema linear $\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ admite solução não trivial se:

a) $\alpha = -2$
b) $\alpha \neq -2$
c) $\alpha = 2$
d) $\alpha \neq 2$
e) $\alpha \in \mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

*Resolução:*

$$\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \rightarrow D = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + \alpha + 2 + 1 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -2$$

**69** (Mackenzie-SP) Em $[0, \pi]$, os valores de $\alpha$ para que o sistema $\begin{cases} (\cos \alpha)x + (\text{sen } \alpha)y = 0 \\ (\text{sen } \alpha)x + (\cos \alpha)y = 0 \end{cases}$ seja indeterminado são em número de:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

*Resolução:*

$$\begin{cases} (\cos \alpha)x + (\text{sen } \alpha)y = 0 \\ (\text{sen } \alpha)x + (\cos \alpha)y = 0 \end{cases} \rightarrow D = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = 0 \rightarrow \cos 2a = 0 \rightarrow \cos 2a = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$2a = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow a = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$a = \frac{\pi}{4} \text{ ou } a = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 24\,000 \\ 0{,}12x + 0{,}15y + 0{,}20z = 3\,590 \\ 0{,}12x - 0{,}15y - 0{,}20z = 0 \end{cases}$$

**70** (FGV-SP)

a) Um investidor possui R$ 24 000,00 e pretende aplicar totalmente esse valor por 1 ano, em três fundos: *A*, *B* e *C*. As rentabilidades anuais esperadas de *A*, *B* e *C* são, respectivamente, de 12%, 15% e 20%. Se seu ganho total esperado for de R$ 3 590,00 e seu ganho esperado em *A* for igual à soma dos ganhos esperados nos outros dois fundos, escreva o sistema linear de equações correspondente aos dados, considerando *x* o valor aplicado em *A*, *y* o valor aplicado em *B*, e *z* o valor aplicado em *C*.

b) Para que valores de *k* o sistema abaixo (nas incógnitas *x*, *y* e *z*) é indeterminado? $k = -3$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + ky = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

*Resolução:*

a) $x$ = valor aplicado no fundo *A*
$y$ = valor aplicado no fundo *B*
$z$ = valor aplicado no fundo *C*
De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 24\,000 \\ 0{,}12x + 0{,}15y + 0{,}20z = 3\,590 \\ 0{,}12x = 0{,}15y + 0{,}20z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 24\,000 \\ 0{,}12x + 0{,}15y + 0{,}20z = 3\,590 \\ 0{,}12x - 0{,}15y - 0{,}20z = 0 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + ky = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow$ o sistema é indeterminado para $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & k & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -k - 3 + 0 + 2k + 6 - 0 = 0 \rightarrow k = -3$$

**71** (Fuvest-SP) Dado um número real *a*, considere o seguinte problema:
"Achar números reais $x_1, x_2, ..., x_6$, não todos nulos, que satisfaçam o sistema linear:
$(r-2)\cdot(r-3)\cdot x_{r-1} + (r-1)\cdot(r-3)\cdot(r-4)\cdot(r-6)\cdot a + (-1)^r\cdot x_r + (r-3)\cdot x_{r+1} = 0$, para $r = 1, 2, ..., 6$, em que $x_0 = x_7 = 0$".

a) Escreva o sistema linear acima em forma matricial.

b) Para que valores de *a* o problema acima tem solução?

c) Existe, para algum valor de *a*, uma solução do problema $x_1 = 1$? Se existir, determine tal solução.

*Resolução:*

a) $r = 1 \rightarrow 0 + 0 - x_1 - 2x_2 = 0$
$r = 2 \rightarrow 0 + (-8a + 1)x_2 - x_3 = 0$
$r = 3 \rightarrow 0 - x_3 + 0 = 0$
$r = 4 \rightarrow 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$
$r = 5 \rightarrow 6x_4 + (-8a - 1)x_5 + 2x_6 = 0$
$r = 6 \rightarrow 12x_5 + x_6 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8a+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -8a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) O sistema é homogêneo; basta $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8a+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -8a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{ pelo teorema de Laplace, temos:}$$

$$D = (-1)\cdot(-8a+1)\cdot(-1)\cdot(-8a-1-24-6) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{8} \text{ ou } a = -\frac{31}{8}$$

c) Substituindo $x_1 = 1$ na 1ª equação, temos: $-1 - 2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$.

Substituindo nas demais equações, temos: $x_3 = 0$, $a = \frac{1}{8}$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ e $x_6 = 0$.

Para $a = \frac{1}{8} \rightarrow S = \{(1, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)\}$

**72** (ITA-SP) Seja $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)\cdot y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)\cdot x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)\cdot z = 0 \end{cases}.$$

O produto dos valores de *m* para os quais o sistema admite solução não trivial é:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) $2\log_2 5$

*Resolução:*

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{ para que o sistema não admita solução trivial, } D = 0.$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -\log_4 m & 5 \\ \log_2 m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & (-\log_2 m^2) \end{vmatrix} = -2\log_2 m^2 + 5\log_2 m + 2\frac{\log_2 m}{2} - 5 + 4 -$$

$$-2\log_2 m \cdot \log_2 m \cdot \frac{\log_2 m}{2} = 0$$

Fazendo $\log_2 m = t$, temos:

$-4t + 5t + t - 1 - t^3 = 0 \rightarrow t^3 - 2t + 1 = 0 \rightarrow t^3 - t^2 + t^2 - 2t + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t^2(t-1) + (t-1)^2 = 0 \rightarrow (t-1)\cdot(t^2 + t - 1) = 0 \rightarrow$

$$t = 1 \text{ ou } t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$m = 2^t \rightarrow m_1 = 2^1;\ m_2 = 2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}};\ m_3 = 2^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Portanto, o produto $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2^{1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = 2^0 = 1$.