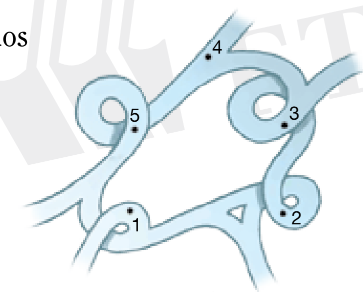
Matemática

M12 – Matrizes

p. 06

1 O anel rodoviário de uma grande metrópole passa pelos pontos indicados no mapa ao lado.



Os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$, associada a esse mapa, são tais que:

- $a_{ij} = 0$, se os pontos *i* e *j* estiverem ligados entre si ou se $i = j$;
- $a_{ij} = 1$, se os pontos *i* e *j* não estiverem ligados.

Construa a matriz *A*.

Resolução:

$$\begin{cases} a_{11} = 0, \text{ pois } i = j = 1 \\ a_{12} = 0, \text{ pois } i = 1 \text{ está ligado a } j = 2 \\ a_{13} = 1 \\ a_{14} = 1 \\ a_{15} = 0, \text{ pois } i = 1 \text{ está ligado a } j = 5 \end{cases}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{cases} a_{21} = 0;\ a_{31} = 1;\ a_{41} = 1;\ a_{51} = 0 \\ a_{22} = 0;\ a_{32} = 0;\ a_{42} = 1;\ a_{52} = 1 \\ a_{23} = 0;\ a_{33} = 0;\ a_{43} = 0;\ a_{53} = 1 \\ a_{24} = 1;\ a_{34} = 0;\ a_{44} = 0;\ a_{54} = 0 \\ a_{25} = 1;\ a_{35} = 1;\ a_{45} = 0;\ a_{55} = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 (Efei-MG) Encontre a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $A = \begin{bmatrix} i^2 & 2i \\ -j & 2j \end{bmatrix}$.

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} i^2 & 2i \\ -j & 2j \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1^2 = 1 \\ a_{12} &= 2 \cdot 1 = 2 \\ a_{21} &= -1 \\ a_{22} &= 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

3 Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 4, em que $a_{ij} = i - j$. zero

Resolução:

Diagonal principal: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$

$a_{ij} = i - j \Rightarrow a_{11} = 1 - 1 = 0$

$a_{22} = 2 - 2 = 0$

$a_{33} = 3 - 3 = 0$

$a_{44} = 4 - 4 = 0$

Diagonal secundária: $a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}$

$a_{14} = 1 - 4 = -3$

$a_{23} = 2 - 3 = -1$

$a_{32} = 3 - 2 = 1$

$a_{41} = 4 - 1 = 3$

$(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) + (a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41}) = (0 + 0 + 0 + 0) + (-3 - 1 + 1 + 3) = 0$

4 (UFRJ) Uma confecção vai fabricar três tipos de roupa utilizando materiais diferentes. Considere a matriz $A = (a_{ij})$, em que a_{ij} representa quantas unidades do material *j* serão empregadas para fabricar uma roupa do tipo *i*.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Quantas unidades do material 3 serão empregadas na confecção de uma roupa do tipo 2? 3 unidades

b) Calcule o total de unidades do material 1 que será empregado para fabricar cinco roupas do tipo 1, quatro roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3. 33 unidades

Resolução:

a) $j = 3$ e $i = 2 \Rightarrow a_{23} = 3$ unidades

b) $j = 1 \Rightarrow a_{11} = 5$

$a_{21} = 0$

$a_{31} = 4$

$x = 5 \cdot a_{11} + 4 \cdot a_{21} + 2 \cdot a_{31} \Rightarrow x = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \Rightarrow x = 33$ unidades

5 (UFLA-MG) Os números reais *x* e *y* que satisfazem a equação abaixo são:

$$\begin{pmatrix} 3x + y & 2x - y \\ x + y & 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $(3, -2)$

b) $(5, 7)$

c) $(2, 1)$

d) $(3, -1)$

e) $(1, 2)$

Resolução:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2; y = 1$$

Note que estes valores também satisfazem o sistema: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

6 A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix}$ admite a transposta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ x-2 & y & 1 \\ 3y & 6-y & z \end{pmatrix}$.

Nessas condições, calcule *x*, *y* e *z*. $x = 4; y = 1; z = 5$

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ x-2 & y & 1 \\ 3y & 6-y & z \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & x-2 & 3y \\ x & y & 6-y \\ 2 & 1 & z \end{bmatrix}$$

$2 = x - 2 \Rightarrow x = 4$

$3 = 3y \Rightarrow y = 1$

$z = 6 - y \Rightarrow z = 6 - 1 \Rightarrow z = 5$

7 Determine *x* para que $M = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ seja simétrica. $x = \pm 2$

Resolução:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ x^2 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = M^t \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = \pm 2$$

8 (UEL-PR) Uma matriz quadrada *A* se diz *anti-simétrica* se $A^t = -A$. Nessas condições, se a matriz *A* a seguir é uma matriz anti-simétrica, então $x + y + z$ é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) 3

b) 1

c) 0

d) −1

e) −3

Resolução:

$$A^t = \begin{bmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 0 & 3 \\ z & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } -A = \begin{bmatrix} -x & -y & -z \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^t = -A \Rightarrow \begin{cases} x = -x \Rightarrow x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$x + y + z = 0 + (-2) + 1 = -1$

9 Determine x, y e z para que: $\begin{bmatrix} 2^x & y^2 \\ \log_2^{32} & |z| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 25 \\ y & 9 \end{bmatrix}$. $x = -3$; $y = 5$; $z = \pm 9$

Resolução:

$2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow x = -3$ $\begin{cases} y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5 \\ \log_2 32 = y \Rightarrow y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 5$

$|z| = 9 \Rightarrow z = \pm 9$

p. 12

10 Calcule x e y, sabendo que: $\begin{bmatrix} x^2 & y^3 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. $x = 1$ e $y = -1$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} x^2 + 3x & y^2 - y \\ x^2 + 4x & y^2 + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(I) $x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

(II) $x^2 + 4x = 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$ $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

De (I) e (II) concluímos que $x = 1$.

(III) $y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0$ $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$

(IV) $y^2 + 2y = -1 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0$

$y_1 = y_2 = -1$

De (III) e (IV) obtemos $y = -1$.

11 Dadas $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcule X tal que $X + A - (B + C) = 0$. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Resolução:

$X + A - (B + C) = 0$

$X = -A + B + C \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

12 Resolva o sistema $\begin{cases} X + Y = A + B \\ X - Y = 2A - B \end{cases}$, sendo $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. $X = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$\oplus \begin{cases} X + Y = A + B \\ \underline{X - Y = 2A - B} \end{cases}$$

$$2X = 3A \Rightarrow X = \frac{3}{2}A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 3 \\ \frac{3}{2} \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Y = A + B + (-X) \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$$

13 (Vunesp-SP) Seja $A = (a_{ij})$ a matriz 2×2 real definida por $a_{ij} = 1$ se $i \leq j$ e $a_{ij} = -1$ se $i > j$. Calcule A^2.

Resolução:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

p. 13

14 (UCSal-BA) A igualdade matricial $2 \cdot \begin{bmatrix} x & x^2 - 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 6x & 30 \\ -2 & -2x \end{bmatrix}$, em que $x \in \mathbb{R}$, é verdadeira, se e somente se x^3 é igual a:

a) -64
b) 64
c) 0
d) -64 ou 64
e) -64, 0 ou 64

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 2x & 2x^2 - 2 \\ -2 & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 6x & 30 \\ -2 & -2x \end{bmatrix}$$

(I) $2x = x^2 + 6x \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

(II) $2x^2 - 2 = 30 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

O único valor de x que satisfaz as condições (I) e (II) simultaneamente é $x = -4$.
Logo, $x^3 = (-4)^3 \therefore x^3 = -64$

15 Efetue: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$$

16 (UFJF-MG) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Determine *a* e *b* reais, tais que: $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a = 1 e b = −1

Resolução:

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 1 \cdot 0 & a + b \\ 0 \cdot a + b \cdot 0 & 0 \cdot 1 + b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} a^2 & a + b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2a & a + b + 2 \\ 0 & b^2 + 2b \end{pmatrix}$$

Do enunciado, vem: $\begin{pmatrix} a^2 + 2a & a + b + 2 \\ 0 & b^2 + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Logo: (I) $a^2 + 2a = 3 \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -3 \text{ (não serve)} \end{cases}$

(II) $b^2 + 2b = -1 \Rightarrow b = -1$

(III) $a + b + 2 = 2 \Rightarrow a = -b \Rightarrow a = 1$

17 Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule *x* para que $A \cdot B = B \cdot A$. x = 0

Resolução:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 3x & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

Por outro lado, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ x & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$

$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow$ (I) = (II) $\therefore 3x = x$, ou seja, $x = 0$

18 (UFPR) Calcule o valor de *a* de modo que exista somente uma matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, tal que o produto $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -a \\ a & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ seja igual a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. 2

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -a \\ a & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y & \text{(I)} \\ 4x - ay = 3 & \text{(II)} \\ ax - 4y = -1 & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{(I) em (II): } 4(2 - y) - ay = 3 \\ \text{(I) em (III): } a(2 - y) - 4y = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y + ay = 5 \\ \underline{-4y - ay + 2a = -1} \end{cases}$$

$$a = 2;\ y = \frac{5}{6};\ x = \frac{7}{6} \therefore a = 2$$

19 (Vunesp-SP) Considere as matrizes 2×2 do tipo $A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{bmatrix}$.

a) Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$. $\begin{bmatrix} 1 & \text{sen } 2x \\ \text{sen } 2x & 1 \end{bmatrix}$

b) Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$. $\{0, 2\pi\}$

Resolução:

a) $A(x) \cdot A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x + \text{sen}^2 x & \cos x \,\text{sen } x + \text{sen } x \cos x \\ \text{sen } x \cos x + \cos x \,\text{sen } x & \text{sen}^2 x + \cos^2 x \end{bmatrix}$$

$$A(x) \cdot A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \,\text{sen } x \cos x \\ 2 \,\text{sen } x \cos x & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A(x) \cdot A(x) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } 2x \\ \text{sen } 2x & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A(x) \cdot A(x) = A(x) \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } 2x \\ \text{sen } 2x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{bmatrix}$

(I) $\cos x = 1$

(II) $\text{sen } 2x = \text{sen } x$

(I) $x = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos: $x = 0$ $(k = 0)$ e $x = 2\pi$ $(k = 1)$.

(II) $x = m \cdot \pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Como $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos: $x = 0$ $(m = 0)$, $x = \pi$ $(m = 1)$ e $x = 2\pi$ $(m = 2)$.

Comparando as soluções obtidas em (I) e (II), concluímos que os valores procurados são $x = 0$ e $x = 2\pi$.

20 (UFRS) A matriz *C* fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante: $C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array}$

A matriz *P* fornece o número de porções de arroz, carne e salada usadas na composição dos pratos tipo P_1, P_2, P_3 desse restaurante:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{array}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2, P_3 é:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3 + 2 \\ 1 + 6 + 2 \\ 2 + 6 + 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P \cdot C = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

21 (UFRJ) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 19\,941\,994 & 19\,941\,994 \\ 19\,941\,994 & 19\,941\,995 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Seja $A^2 = A \cdot A$ e $B^2 = B \cdot B$. Determine a matriz $C = A^2 - B^2 - (A + B)(A - B)$.

Resolução:

$$C = AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = A^2 - B^2 - (A + B) \cdot (A - B) \Rightarrow C = A^2 - B^2 - A^2 - BA + AB + B^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = A \cdot B - B \cdot A$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 19\,941\,994 & 19\,941\,994 \\ 19\,941\,994 & 19\,941\,995 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19\,941\,994 & 19\,941\,994 \\ 19\,941\,994 & 19\,941\,995 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

22 (UFJF-MG) Considere $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então, podemos concluir que:

a) $A^{100} = -I$, em que I é a matriz identidade 2×2.
b) $A^{100} = A$.
c) $A^{101} = A$.
d) $A^{101} = 0$, em que 0 é a matriz nula 2×2.

Resolução:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Logo, $A^{100} = (A^2)^{50} \Rightarrow A^{100} = I^{50} \therefore A^{100} = I$

$A^{101} = A^{100} \cdot A \Rightarrow A^{101} = I \cdot A \therefore A^{101} = A$

23 (UFES) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Determine A^{1998}. $2^{1998} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$A^2 = A \cdot A \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Ou seja, $A^3 = (-2)^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como $A^{1998} = (A^3)^{666}$, temos:

$$A^{1998} = \left[(-2)^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{666} = (-2)^{1998} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{666}$$

Lembrando que $(-2)^{1998} = 2^{1998}$, concluímos que: $A^{1998} = 2^{1998} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24 (UFRJ) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine $A^3 = A \cdot A \cdot A$. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Se A^n denota o produto de *A* por *A* *n* vezes, determine o valor do número natural *k* tal que $A^{k^2} - A^{5k} + A^6 = I$, em que *I* é a matriz identidade. 2 ou 3

Resolução:

a) $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Suponha que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$. Calculemos o valor de A^{n+1}:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore A^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como já verificamos, no item *a*, a validade da hipótese para $n = 1, 2$ e 3, concluímos pelo princípio de indução finita que: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A^{k^2} - A^{5k} + A^6 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & k^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

25 (UEL-PR) A soma de todos os elementos da inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é igual a:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

Resolução:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Temos $A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1,\ c = 0,\ b = d = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 2$$

26 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine:

a) M^{-1}. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) o traço da matriz $M^{-1} \cdot A \cdot M$, sabendo que o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal. 3

Resolução:

a) $M \cdot M^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(I) \begin{cases} a = 1 \\ 2a + c = 0 \Rightarrow c = -2 \end{cases}$ $(II) \begin{cases} b = 0 \\ 2b + d = 1 \Rightarrow d = 1 \end{cases}$ $\therefore M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \therefore t_r(M^{-1} \cdot A \cdot M) = 4 + (-1) \Rightarrow t_r(M^{-1} \cdot A \cdot M) = 3$

27 (UNI-RIO) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, determine o valor de $A^{-1} + A^t - I_2$. $\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Resolução:

$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(I) \begin{cases} -5a - 3c = 1 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases}$ $(II) \begin{cases} -5b - 3d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases}$ $\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$a = -2; c = 3$ $b = -3; d = 5$

$A^{-1} + A^t - I_2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

28 (UFCE) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine os seguintes produtos matriciais:

a) $P \cdot A \cdot P^{-1}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $P \cdot A^6 \cdot P^{-1}$ $\begin{bmatrix} 4\,096 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

a) $P \cdot P^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(I) \begin{cases} a + c = 1 \\ 3a - 2c = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $(II) \begin{cases} b + d = 0 \\ 3b - 2d = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$a = \frac{2}{5};\ c = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $b = \frac{1}{5};\ d = -\frac{1}{5}$

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103 & 102 \\ 153 & 154 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^4 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 103 & 102 \\ 153 & 154 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,639 & 1\,638 \\ 2\,457 & 2\,458 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot A^6 \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1\,639 & 1\,638 \\ 2\,457 & 2\,458 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,096 & 4\,096 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$P \cdot A^6 \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 4\,096 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29 (FGV-SP) *A*, *B* e *C* são matrizes de mesma ordem. Sabendo-se que o sistema de equações a seguir (cuja incógnita é a matriz *X*) tem solução única, obtenha o valor da matriz *X*.

a) $AX + B = C$ $\quad X = A^{-1} \cdot (C - B)$

b) $XA - X + B = C$ $\quad X = (C - B) \cdot (A - I)^{-1}$

Resolução:

a) $AX + B = C$
$AX = C - B$
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$
$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$
$X = A^{-1} \cdot (C - B)$

b) $XA - X + B = C$
$XA - X = C - B$
$XA - XI = C - B$
$X \cdot (A - I) = C - B$
$X \cdot (A - I) \cdot (A - I)^{-1} = (C - B) \cdot (A - I)^{-1}$
$X \cdot I = (C - B) \cdot (A - I)^{-1}$
$X = (C - B) \cdot (A - I)^{-1}$

30 (UESPI) A igualdade definida pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

é válida se, e somente se, a matriz *A* for igual a:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 2a - c & 2b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + c = -7 \\ 2a - c = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -2, c = -1$$

$$\begin{cases} 3b + d = 2 \\ 2b - d = -2 \end{cases} \Rightarrow b = 0, d = 2$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

31 (MACK-SP) O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal. O traço da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $a_{ij} = i^j$, é:

a) 3^3

b) 2^5

c) 5^2

d) 4^3

e) 2^6

Resolução:

O traço da matriz *A* é dado por $a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

$1^1 + 2^2 + 3^3 = 1 + 4 + 27 = 32 = 2^5$

32 (FMJ-SP) O administrador da SÓCARRÃO, uma cadeia de revenda de automóveis Tigre e Flecha, montou as seguintes tabelas para controlar as quantidades vendidas desses carros durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2002, nas três lojas da rede.

Tabela 1: Preço por unidade (milhares de reais)

Loja \ Tipo	Tigre	Flecha
A	20	10
B	18	15
C	22	10

Tabela 2: Unidades vendidas

Tipo \ Mês	Janeiro	Fevereiro	Março
Tigre	5	10	2
Flecha	12	15	1

A matriz que melhor representa a receita, em milhares de reais, de cada loja, nos meses de janeiro, fevereiro e março, é:

a) $\begin{pmatrix} 220 & 405 & 54 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 220 & 350 & 50 \\ 270 & 405 & 51 \\ 230 & 370 & 54 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 37 & 55 & 33 \\ 50 & 58 & 36 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 220 \\ 405 \\ 54 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 100 & 200 & 20 \\ 120 & 300 & 10 \\ 90 & 180 & 30 \\ 150 & 225 & 15 \\ 110 & 220 & 44 \\ 120 & 150 & 10 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 18 & 15 \\ 22 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 12 & 15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot 5 + 10 \cdot 12 & 20 \cdot 10 + 10 \cdot 15 & 20 \cdot 2 + 10 \cdot 1 \\ 18 \cdot 5 + 15 \cdot 12 & 18 \cdot 10 + 15 \cdot 15 & 18 \cdot 2 + 15 \cdot 1 \\ 22 \cdot 5 + 10 \cdot 12 & 22 \cdot 10 + 10 \cdot 15 & 22 \cdot 2 + 10 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 + 120 & 200 + 150 & 40 + 10 \\ 90 + 180 & 180 + 225 & 36 + 15 \\ 110 + 120 & 220 + 150 & 44 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 & 350 & 50 \\ 270 & 405 & 51 \\ 230 & 370 & 54 \end{pmatrix}$$

33 (Unipar-PR) Sabendo que *A* é uma matriz quadrada de ordem 2 e está definida pela lei de formação:

$$a_{ij} = \begin{cases} \log_2^{(i+j)}, \text{ se } i = j \\ 2^{i+j}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Podemos concluir que a sua transposta é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

$a_{11} = \log_2 (1 + 1) = \log_2 2 = 1$

$a_{12} = 2^{1+2} = 2^3 = 8$

$a_{21} = 2^{2+1} = 2^3 = 8$

$a_{22} = \log_2 (2 + 2) = \log_2 4 = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

34 (Unipar-PR) Sabendo que $A = \begin{pmatrix} \log_3 2 & \log_4 3 & \log_5 4 \\ \log_3 8 & \log_4 27 & \log_5 64 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \log_2 3 & \log_2 9 \\ \log_3 4 & \log_3 16 \\ \log_4 5 & \log_4 25 \end{pmatrix}$, a soma dos elementos da matriz AB é igual a:

a) 42

b) 38

c) 36

d) 24

e) 12

Resolução:

Sendo $C = A \cdot B$, temos:

$C_{11} = \log_3 2 \cdot \log_2 3 + \log_4 3 \cdot \log_3 4 + \log_5 4 \cdot \log_4 5 = 1 + 1 + 1 = 3$

$C_{12} = \log_3 2 \cdot \log_2 9 + \log_4 3 \cdot \log_3 16 + \log_5 4 \cdot \log_4 25 = 2 + 2 + 2 = 6$

$C_{21} = \log_3 8 \cdot \log_2 3 + \log_4 27 \cdot \log_3 4 + \log_5 64 \cdot \log_4 5 = 3 + 3 + 3 = 9$

$C_{22} = \log_3 8 \cdot \log_2 9 + \log_4 27 \cdot \log_3 16 + \log_5 64 \cdot \log_4 25 = 6 + 6 + 6 = 18$

Soma: $C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22} = 3 + 6 + 9 + 18 = 36$

35 (Unipac-MG) Uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo 2×3, sendo $a_{ij} = i + j$, é representada por:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

36 (Faap-SP) Durante a 1ª fase da Copa do Mundo de Futebol, realizada na Coréia do Sul e no Japão em 2002, o grupo *C* era formado por quatro países: Brasil, Turquia, China e Costa Rica. A matriz *A* fornece os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada um. Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto ou 0 ponto). Veja esse fato registrado na matriz *B*.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{vitória} & \text{empate} & \text{derrota} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Brasil} \\ \text{Turquia} \\ \text{China} \\ \text{Costa Rica} \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{vitória} \\ \text{empate} \\ \text{derrota} \end{array}$$

Terminada a 1ª fase, a classificação foi obtida com o total de pontos feitos pelo país.
A matriz que fornece essa classificação é:

a) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

37 (Fatec-SP) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$ tal que $A^2 = \begin{bmatrix} -19 & -8 \\ 10 & -19 \end{bmatrix}$.

É verdade que a + b é igual a:

a) 0
b) 1
c) 9
d) −1
e) −9

Resolução:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ab & b + b \\ a + a & ab + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ab & 2b \\ 2a & ab + 1 \end{pmatrix}$$

Sendo $A^2 = \begin{pmatrix} -19 & -8 \\ 10 & -19 \end{pmatrix}$, então:

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$2b = -8 \Rightarrow b = -4$; logo, $a + b = 5 + (-4) = 1$.