

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 10.12.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas
aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

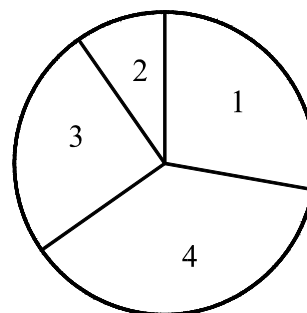
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 13. Quantos elementos dessa linha são menores do que 70?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

2. Na figura está representado um círculo dividido em quatro sectores circulares diferentes, numerados de 1 a 4.

Estão disponíveis **cinco** cores para pintar este círculo.



Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- todos os sectores devem ser pintados;
- cada sector é pintado com uma única cor;
- sectores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
- o círculo deve ficar pintado com **duas** ou com **quatro** cores.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?

(A) 140 (B) 230 (C) 310 (D) 390

- 3.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)
Sabe-se que $P(A) = 0,5$ e que $P(B) = 0,7$
Podemos então garantir que ...

- (A) A e B são acontecimentos contrários
(B) A e B são acontecimentos compatíveis
(C) A está contido em B
(D) o acontecimento $A \cup B$ é certo

- 4.** A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	b	0,5

(a e b designam números reais)

O valor médio desta variável aleatória é 1,4
Qual é o valor de a ?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,5

- 5.** O diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos por uma certa máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 9.
Qualquer parafuso produzido por essa máquina passa por um controle de qualidade. Ao passar por esse controle, o parafuso é aprovado se o seu diâmetro estiver compreendido entre 8,7 e 9,3 milímetros. Caso contrário, é rejeitado.
Sabe-se que 99,73% dos parafusos são aprovados.
Qual é o desvio padrão da variável aleatória X ?

- (A) 0,1 (B) 0,3 (C) 0,6 (D) 0,9

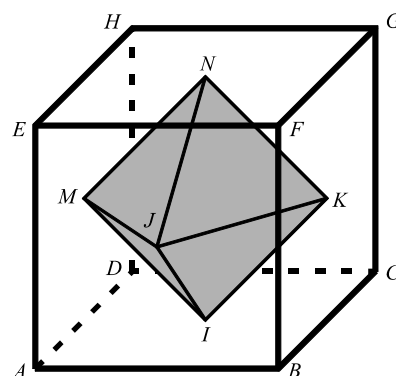
Grupo II

Nas respostas a itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo $[ABCDEFGH]$ e o octaedro $[IJKLMN]$ (o vértice L do octaedro não está visível).

Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo.



- 1.1. Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, $\{A, B, C, K, L\}$).

- 1.1.1. Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

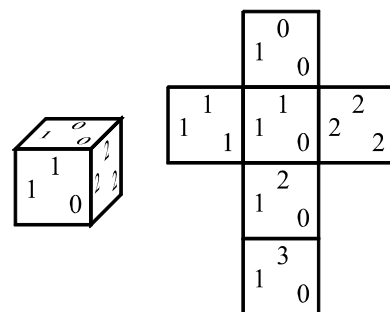
- 1.1.2. Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

- 1.2. Escolhem-se ao acaso cinco dos catorze vértices dos dois poliedros. Qual é a probabilidade de os cinco vértices escolhidos pertencerem todos à mesma face do cubo? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.

Conforme se pode observar na figura, existem três números em cada face.

Lança-se este dado **uma só vez** e observam-se os números da face que fica voltada para cima. Diz-se então que saíram esses três números.



- 2.1. Seja X a variável aleatória «**produto dos três números saídos**». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X . Apresente as probabilidades na forma de fracção.

- 2.2. Seja R o acontecimento «os números saídos são todos iguais». Seja S o acontecimento «a **soma dos números saídos** é igual a 3». Os acontecimentos R e S são independentes? Justifique.

3.

3.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) de probabilidade não nula.

Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que $P(A|B)$ e $P(B|A)$ designam probabilidades condicionadas.

Mostre que $P(A|\overline{B}) = P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$

3.2. Relativamente a uma turma do 12º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota:

Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos A e B , no contexto do problema.

Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

4. Um saco contém bolas brancas e bolas pretas, pelo menos uma de cada cor, num total de cinco.

Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «*número de bolas brancas retiradas*».

Sabendo que a variável X toma exclusivamente os valores 2 e 3, indique o número de bolas brancas e o número de bolas pretas que estão inicialmente no saco.

Numa pequena composição, explique o seu raciocínio.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I(5 × 10 pontos)50 pontos

Grupo II150 pontos

1. 50 pontos

1.1. 30 pontos

1.1.1. 15 pontos

1.1.2. 15 pontos

1.2. 20 pontos

2. 40 pontos

2.1. 20 pontos

2.2. 20 pontos

3. 40 pontos

3.1. 20 pontos

3.2. 20 pontos

4. 20 pontos

TOTAL 200 pontos